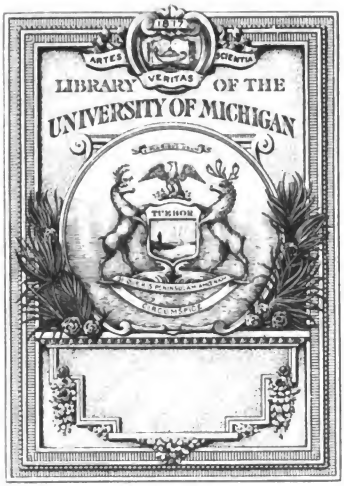
Digitized by Google



Digitized by Google

QA
103
.B19

113716

Digitized by Google

Digitized by Google

Das

Kopf- und Ziffer-Rechnen

theoretisch und praktisch

nach der

Methode vom Einfachen zum Zusammengesetzten

mit besonderer Berücksichtigung

der Decimalbrüche und der Raumgrößen

behandelt;

zum Gebrauche für Stadt- und Landschulen

und

zur Selbstbelehrung

von

S. Ed. Baltrusch.

Mit 4 lithographirten Tafeln.

Königsberg, 1846.

Im Verlage der Gebrüder Bornträger.

Digitized by Google

Digitized by Google

Hist. of Sci.
Gibbs
9-25-30
22346

Vorrede.

Dieses Rechenbuch enthält die niedere Arithmetik, sowohl das Theoretische als auch das Praktische derselben; überhaupt diejenigen Lehren und Verfahrungsarten, welche den aufmerksamen Leser in Stand setzen, alle Aufgaben, die im bürgerlichen Verkehre vorkommen, leicht und sicher berechnen zu können.

Die einleitende Uebersicht, welche dem Buche voransteht, und das beigefügte Inhaltsverzeichniß überheben mich einer genauern Auseinandersetzung des Umfanges von demselben, und ich bemerke nur noch, daß ich absichtlich die Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel hinweggelassen habe; weil ich dieselben, so wie überhaupt die Lehre von den Potenzen, zur niedern Arithmetik nicht rechne; sie gehören zur allgemeinen Rechenkunst, die sich zu jener wie die Gattung zur Art verhält. Da ich aber dennoch zur genauern Auflösung einiger Aufgaben in diesem Buche die Quadratwurzel gebraucht habe, so ist dieses in Rücksicht auf Leser geschehen, welche Kenntnisse derselben besitzen, nicht in Ansehung des Unterrichts. Das Genauere darüber findet man im Buche.

Ueber die Art der Behandlung des Rechnens werde ich etwas mehr als über den Umfang desselben bemerken. Im reinen Rechnen habe ich überall dem schriftlichen das Kopfrechnen vorangestellt; im angewandten habe ich keinen strengen Unterschied zwischen dem Kopf- und schriftlichen Rechnen gemacht; hierin habe ich mehr auf klare Vorstellungen der benannten Zahlen und ihr Verhältniß zu einander und auf Deutlichkeit der Auflösungen gesehen.

MM. X-6-40

Digitized by Google

Würde ich jeden Abschnitt des angewandten Rechnens in das Kopf- und schriftliche Rechnen eingetheilt haben, so würde das Volumen des Buches dadurch bedeutend vergrößert worden sein; überdies ist hierin eine solche Eintheilung überflüssig, und zwar aus folgenden Gründen.

Nur zwei verschiedenartige Uebungen im Kopfrechnen giebt es; die eine bezieht sich auf die klaren Vorstellungen der Zahlen selbst und ihre Verbindungen mit einander, die andere auf die deutliche Auffassung der Verhältnisse derselben, welche die Bedingungen einer Aufgabe enthalten. Die erste Art der Uebungen ist im reinen Rechnen und zwar im ersten und zweiten Abschnitte bis zum dritten Kapitel vorgekommen; mit dem dritten Kapitel fangen die Uebungen im Auffassen der Verhältnisse der Zahlen an, und gehören daher zur zweiten Art gedachter Uebungen. Ferner gehören zur letzten Art der Uebungen alle Aufgaben des angewandten Rechnens, welche unter der Ueberschrift: „Geometrische Verhältnisse und Proportionen" begriffen sind. Die erste Art hat die Uebung der vier Species (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), die andere die klare Auffassung der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse zur Absicht. Da nun die Aufgaben schwierig werden, wenn sie Bedingungen arithmetischer und geometrischer Verhältnisse enthalten: so ist es rathsam, in ihren Berechnungen mehr auf den Gedankengang der Auflösung derselben als auf die Art der Ausführung der vorkommenden Species zu sehen, und also den Schülern zu überlassen, dieselben nach Belieben im Kopfe oder schriftlich zu machen, wenn sie nur recht klar den Gang der Auflösung einsehen und sich ihn merken. Hierin begehen alle diejenigen Lehrer einen Fehler, welche von ihren Schülern verlangen, daß sie nicht allein die verwickelten Verhältnisse einer schwierigen Aufgabe klar in Gedanken auffassen, sondern auch die einzelnen sich darstellenden Rechnungen im Kopfe ausführen sollen. Denn der jugendliche Verstand vermag nicht gleichzeitig eine Menge Begriffe zu übersehen, und ihr Verhältniß zu einander klar aufzufassen; ist er nun durch die einzelnen Rechnungen im Kopfe ermüdet, so fehlt es ihm an Schärfe, die Verkettungen der Schlüsse in der Auflösung zu verfolgen, die Auflösung bleibt ihm also dunkel; und da die deutliche Erkenntniß der Schlüsse einer solchen Auflösung die

Digitized by Google

Hauptsache ist, so hat der Lehrer diese vorzüglich zu berücksichtigen, und die Nebenrechnungen als wirkliche Nebensache zu betrachten. Aber noch einen andern Fehler machen nicht wenige Lehrer im Rechenunterrichte, und dieser besteht darin, daß sie ihre Schüler mit allgemeinen Sätzen der Arithmetik nicht bekannt machen, sondern unmittelbar nach Beendigung der vier Species zur Lösung algebraischer Aufgaben übergehen, in welchen also arithmetische und geometrische Verhältnisse vorkommen. In der Arithmetik hat man fortwährend mit Schlüssen zu thun; kann nun der Rechner die erforderlichen Prämissen nicht herausfinden, so kann er auch die Konklusion nicht bilden. Von den Prämissen ist aber der Obersatz (terminus major) stets ein allgemeiner, und der Untersatz (terminus minor) ein besonderer Satz, und aus beiden wird nun durch den Verstand der Schlußsatz (conclusio) abgeleitet. Die allgemeinen Sätze werden in der Theorie der Arithmetik behandelt, die besondern stellen sich in den Aufgaben dar; daher muß den Aufgaben stets die Theorie vorangehen. Diese wird aber von vielen Lehrern vernachlässigt; daher können nur wenige ihrer Schüler die Auflösungen begreifen.

Das angewandte Rechnen habe ich nicht nach Regeln, sondern vermittelst Schlüsse behandelt, welches die zweite oben angezeigte Art der Uebungen im Kopfrechnen und die fruchtreichere ausmacht; folglich war ich nicht genöthigt, hierin noch auf ein anderes Kopfrechnen Rücksicht zu nehmen; und wenn ich an manchen Stellen Regeln angegeben habe, so sind sie unmittelbare Folgerungen aus den vorhergehenden Schlüssen. Häufiger als in andern Büchern dieser Art sind hier die Decimalbrüche in Anwendung gebracht, und zwar in der Absicht, ihnen einen leichtern Eingang in die bürgerlichen und kaufmännischen Rechnungen zu verschaffen, als es bisher der Fall gewesen ist. Es giebt in der That kein vortheilhafteres Mittel, rasch und sicher mit großen Brüchen zu rechnen, als eben die Decimalbrüche. Diesen großen Vorzug der Decimalbrüche vor den gemeinen Brüchen haben auch längst die großen Handelsstädte Hamburg, Lübeck, Bremen, Frankfurt, Paris, Amsterdam, London ꝛc. erkannt, und führen Buch und Rechnung in Decimalbrüchen; und wenn in unserm nördlichen Preußen weder Gewerbtreibende noch Kaufleute sich der Decimalbrüche in ihren Rechnungen bedienen, so liegt die Schuld an

Digitized by Google

unsern meisten Schulen, und besonders den Elementarschulen, und weil die meisten Lehrer ihre Bildung in Seminarien empfangen haben: so hat man die erste Ursache der Mangelhaftigkeit im Rechnen in den letztgenannten Anstalten zu suchen.

Die Raumgrößen haben in diesem Buche eine solche ausführliche Behandlung erfahren, wie man sie in keinem ähnlichen finden wird. Zwar sind die geometrischen Sätze hier nicht erwiesen (wie es natürlicher Weise nicht geschehen konnte), doch ist ihre Anwendung durch Rechnung deutlich gezeigt; und ihre leicht begreifliche Nützlichkeit kann dazu dienen, den Eifer zum Studium dieser Wissenschaft anzuregen.

Außerdem wird man in vielen Aufgaben einen reichhaltigen Stoff zu ähnlichen Aufgaben finden, welcher manchem Lehrer willkommen sein wird, dem genaue Angaben über Münzen, Maße und Gewichte der verschiedenen Länder fehlen.

Zum Schlusse bemerke ich, daß vorliegende Schrift eine systematische Bearbeitung des niedern Rechnens ist, was man aus der ganzen Anordnung der verschiedenen Abschnitte erkennen kann; und weil sie, außer den aus der Geometrie und der Naturlehre entlehnten Sätzen, die zur Rechnung ihre Erläuterung erfahren haben, keine andern Kenntnisse und Bücher zu ihrem Verständnisse voraussetzt, so kann sie als ein vollständiges Ganze angesehen werden, das jedem Leser genügende Belehrung über das geben wird, was ihr Titel anzeigt.

Danzig, den 18. September 1843.

S. E. Baltrusch.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Einleitende Ueberſicht des geſammten Rechnens 1

Erſte Abtheilung.

Reines Rechnen.

Erſter Abſchnitt.

Zuſammenſetzung, Trennung und Vergleichung der Zahlen.

Erſtes Kapitel. Bildung der Summen durch Addition 11
Erſte Stufe. Das Zählen 11
Zweite Stufe. Eintheilung und Bezeichnung der Zahlen 13
A. Bildung der Einheiten verſchiedener Ordnungen 13
B. Bildung der Zahlen in natürlicher Ordnung durch Zuſammenſetzung aus den Einheiten verſchiedener Ordnungen 15
C. Die Bezeichnung oder das Schreiben der Zahlen 17
Dritte Stufe. Das Zuſammenzählen oder die Addition 19
I. Zuſammenzählen ohne Bezeichnung der Zahlen oder Kopfrechnen . . . 20
A. Addition der Einer 20
B. Addition der Einer zu Zahlen, welche Zehner und Einer enthalten . 21
1) Die Summe der Einer iſt kleiner als ein Zehner.
2) Die Summe der Einer iſt gleich einem Zehner.
3) Die Summe der Einer iſt größer als ein Zehner.
4) Addition der Einer zu beliebigen Zahlen.
C. Addition ſolcher Zahlen, welche aus Zehnern und Einern beſtehen . 22
1) Addition der Zehner.
2) Addition der Zehner zu Zehnern und Einern.
3) Addition der Zehner und Einer zu Zehnern und Einern.
4) Addition ſolcher Zahlen, welche einen Hunderter überſteigen.
II. Schriftliche Addition 25

Digitized by Google

Seite

Zweites Kapitel. Das Bilden der Differenzen durch Subtraktion 26
I. Das Subtrahiren der Zahlen ohne Bezeichnung oder im Kopfe 26
A. Subtraktion der Einer von andern Zahlen 26
1) Einer von Einern ohne Zuziehung eines Zehners subtrahirt.
2) Einer von Zehnern subtrahirt.
3) Einer von Einern mit Hilfe eines Zehners subtrahirt.
B. Subtraktion der Einer und Zehner von andern Zahlen 28
1) Die Zahl der Zehner des Subtrahendus ist kleiner als die Zahl der Zehner des Minuendus.
2) Die Zahl der Zehner des Subtrahendus ist größer als die Zahl der Zehner des Minuendus.
II. Schriftliche Subtraktion 29
Drittes Kapitel. Vergleichung der Zahlen zur Bildung arithmetischer Verhältnisse und Proportionen 31
I. Von gleichen und ungleichen Zahlen und deren Unterschied 32
A. Ueber gleiche Zahlen 32
B. Ueber ungleiche Zahlen und deren Unterschied 32
II. Ueber arithmetische Verhältnisse 35
III. Ueber arithmetische Proportionen 37
A. Die 3 ersten Glieder einer Proportion sind gegeben, das vierte wird gesucht 38
B. Das dritte Glied wird gesucht 39
C. Das zweite Glied wird gesucht 39
D. Das erste Glied wird gesucht 39
E. Eigenschaften einer arithmetischen Proportion 40

Zweiter Abschnitt.

Vervielfältigung, Theilung und Vergleichung der Zahlen.

Erstes Kapitel. Bildung der Vielfachen und Produkte durch Multiplikation . . 41
I. Kopfrechnen 41
A. Multiplikation der Einer durch Einer 41
B. Multiplikation und Addition 44
C. Multiplikation und Subtraktion 46
D. Multiplikation in Verbindung mit Multiplikation 46
E. Das Produkt und ein Faktor sind gegeben, der andere Faktor wird gesucht 47
F. Multiplikation solcher Zahlen, welche größer als 10 sind 49
1) Multiplikation der Zehner durch Einer.
2) Multiplikation der Zehner durch Zehner.
3) Multiplikation der Zehner und Einer durch Einer.
4) Multiplikation der Zehner und Einer durch Zehner und Einer.
G. Das Aufsuchen der gemeinen Faktoren und besonders des größten gemeinen Faktors. Absolute und relative Primzahlen 51
II. Schriftliche Multiplikation 53
Zweites Kapitel. Theilung der Zahlen oder Division 58
I. Theilung solcher Zahlen in gleiche Zahlen, welche ein Vielfaches der letztern sind 58
A. Bildung und Benennung der Theile einer Zahl 58
B. Vervielfachung eines Theils einer gegebenen Zahl 60
C. Bildung und Vervielfachung eines Theils von einem Theile einer gegebenen Zahl 61

Digitized by Google

Seite

D. Ein Theil oder mehrere Theile einer Zahl sind gegeben, die ganze Zahl zu berechnen 65
E. Von den Maßen und dem größten gemeinen Maße der Zahlen . . . 67
F. Brüche durch die kleinsten Zahlen auszudrücken 68
G. Ueber das Aufsuchen der Brüche, welche kleinere von größern Zahlen sind 70
H. Ueber das Aufsuchen der Vielfachen und Brüche, welche größere Zahlen von kleinern sind 71
I. Bildung und Vervielfachung der Theile solcher Zahlen, welche weder im kleinen noch größern Einmaleins vorkommen 72

II. Theilung solcher Zahlen in gleiche Theile, welche kein Vielfaches des Nenners sind 74
A. Theilung eines Ganzen in gleiche Theile 75
B. Verwandlung der Ganzen und Brüche in Brüche 77
C. Verwandlung der unechten Brüche in Ganze und echte Brüche . . . 77
D. Berechnung eines und mehrerer Theile von mehreren Ganzen 78
E. Vervielfachung der Brüche 79
F. Theilung und Vervielfachung der Brüche 80
G. Multiplikation ganzer und gebrochener Zahlen mit ganzen und gebrochenen Zahlen 82
H. Verwandlung gegebener Brüche in andere, ideren Nenner gegeben sind . 84
I. Ueber das Aufsuchen des allgemeinen oder Generalnenners 85
K. Addition gegebener Brüche 89
L. Subtraktion der Brüche 91
M. Ueber das Aufsuchen der Vielfachen und Brüche, welche ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen von ganzen, gebrochenen oder gemischten Zahlen sind 92
1) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche ganze Zahlen von Brüchen sind.
2) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche ganze Zahlen von gemischten Zahlen sind.
3) Aufsuchung der Brüche, welche von ganzen Zahlen sind.
4) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche Brüche von Brüchen sind.
5) Aufsuchung der Brüche, welche Brüche von gemischten Zahlen sind.
6) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte Zahlen von ganzen Zahlen sind.
7) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte Zahlen von Brüchen sind.
8) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte von gemischten Zahlen sind.

III. Schriftliche Division 97
A. Division ganzer Zahlen 101
1) Theilweise Division.
2) Ueber das größte gemeine Maß der Zahlen.
3) Ueber die Neuner-Probe der 4 Species in ganzen Zahlen.
4) Vollständige Division.
5) Einige Vortheile der Division.
B. Addition gebrochener Zahlen 113
C. Subtraktion gebrochener Zahlen 114
D. Multiplikation gebrochener Zahlen 114

Digitized by Google

Seite

1) Gebrochene Zahlen durch ganze zu multipliciren.
2) Ganze Zahlen durch gebrochene zu multipliciren.
3) Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.

E. Division gebrochener Zahlen 116
1) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.
2) Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.
3) Division eines Bruches durch einen Bruch.

IV. Ueber Decimalbrüche und die 4 Species mit denselben 118
A. Bildung und Bezeichnung der Decimalbrüche 119
B. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche 121
C. Addition der Decimalbrüche 124
D. Subtraction der Decimalbrüche 124
E. Multiplikation der Decimalbrüche durch ganze Zahlen 125
F. Division der Decimalbrüche durch ganze Zahlen 126
G. Multiplikation der Decimalbrüche durch Decimalbrüche 128
H. Division der Decimalbrüche durch Decimalbrüche 129
I. Verkürzte Multiplikation und Division der Decimalbrüche 131
K. Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch . . . 135

Drittes Kapitel. Vergleichung der Zahlen zur Bildung geometrischer Verhältnisse und Proportionen 137

I. Kopfrechnen 138
A. Aufsuchung des geometrischen Verhältnisses zweier Zahlen 139
B. Das Verhältniß zweier Zahlen und eine derselben sind gegeben, die andere zu finden 142
C. Das Verhältniß zweier Zahlen und ihre Summe oder Differenz sind gegeben, die Zahlen selbst zu finden 144
D. Theilung einer Zahl in Theile, deren Verhältniß gegeben ist . . . 146
1) Das Verhältniß der Theile ist arithmetisch.
2) Theilung einer Zahl nach geometrischem Verhältnisse.
3) Theilung einer Zahl nach geometrischen und arithmetischen Verhältnissen.
E. Ueber gleiche Verhältnisse und Proportionen 157
1) Begriffsentwickelung gleicher Verhältnisse.
2) Veränderung der Glieder gleicher Verhältnisse. Sätze und Aufgaben mit Anweisungen zur Bildung derselben.
F. Ueber Proportionen und deren Eigenschaften 165
1) Aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende Glied zu berechnen.
2) Eigenschaften der Proportionen.

II. Schriftliche Behandlung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen 169
A. Von den geometrischen Verhältnissen 169
1) Entwickelung des Begriffs vom Verhältniß-Quotienten (Verhältnißname, Verhältnißanzeiger).
2) Berechnung einer der drei Zahlen: Vorderglied, Hinterglied, Verhältniß-Quotient, wenn zwei derselben gegeben sind.
B. Von den geometrischen Proportionen 171
1) Einfache Proportionen. (Erklärung gleicher Verhältnisse und der Proportionen.)
a. Aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende zu berechnen.

Digitized by Google

Seite

b. Eigenschaften der Proportionen. Umkehrung und Verwechselung, Verbindung und Trennung der Glieder, Produkte der innern und äußern Glieder.

2) Zusammensetzung der Proportionen.

a. Erklärung der Zusammensetzung der Verhältnisse und Proportionen.

b. Berechnung fehlender Glieder in zusammengesetzten Proportionen.

Zweite Abtheilung.

Angewandtes oder praktisches Rechnen. . 186

Erster Abschnitt.

Berechnung solcher Größen, welche durch gleichartige Größen bedingt werden 191

Erstes Kapitel. Raumgrößen 194

I. Längengrößen 194

A. Eintheilung der Maße 194

1. Duodecimaltheilung.

2. Decimaltheilung.

B. Rechnungen mit den Maßen 195

a. Gegenseitige Verwandlung der Maße.

1) Resolution.

2) Reduktion.

b. Anwendung der 4 Species.

1) Addition.

2) Subtraktion.

3) Multiplikation.

4) Division.

c. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

α. Einfache Verhältnisse.

β. Zusammengesetzte Verhältnisse.

2) Geometrische Proportionen.

II. Flächenräume 209

A. Eintheilung der Flächenmaße 209

B. Rechnungen mit Flächenmaßen 210

a. Gegenseitige Verwandlung der Flächenmaße.

1) Resolution.

2) Reduktion.

b. Anwendung der 4 Species.

1) Addition.

2) Subtraktion.

3) Multiplikation.

4) Division.

c. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

2) Geometrische Proportionen.

Digitized by Google

Seite

d. Berechnung des Flächeninhalts, wenn die beiden Dimensionen einer Fläche gegeben, oder einer Dimension, wenn der Flächeninhalt und die andere Dimension gegeben sind.
1) Berechnung des Flächeninhalts, wenn die beiden Dimensionen einer Fläche gegeben sind.
2) Berechnung einer Dimension, wenn der Inhalt einer Fläche und ihre andere Dimension gegeben sind.
e. Arithmetische und geometrische Verhältnisse sind in Verbindung gegeben.

III. Körperräume 241
A. Eintheilung der Körpermaße 241
a. Von den Körpern im Allgemeinen.
b. Von den Körpern im Besondern.
B. Rechnungen mit Körpermaßen 247
a. Gegenseitige Verwandlung der Körpermaße.
1) Resolution
2) Reduktion.
b. Anwendung der 4 Species.
1) Addition.
2) Subtraktion.
3) Multiplikation.
4) Division.
c. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.
1) Geometrische Verhältnisse.
2) Geometrische Proportionen.
d. Arithmetische und geometrische Verhältnisse.
e. Berechnungen, welche sich auf den kubischen Inhalt der Körper und ihre Dimensionen beziehen.
1) Körper von Ebenen begrenzt.
2) Körper von krummen Flächen begrenzt.

Zweites Kapitel. Die Maße der Schwere oder die Gewichte 276
A. Eintheilung der Gewichte 277
B. Rechnung mit den Gewichten 278
a. Gegenseitige Verwandlungen.
1) Resolution.
2) Reduktion.
b. Anwendung der 4 Species.
1) Addition.
2) Subtraktion.
3) Multiplikation.
4) Division.
c. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.
1) Geometrische Verhältnisse.
2) Proportionen.
d. Geometrische und arithmetische Verhältnisse.
e. Berechnung der Tara, des Netto, Brutto und Gutgewichts. Erläuterung der Rechnung nach Procenten.

Drittes Kapitel. Der allgemeine Geldwerth der Dinge oder die Münzen . . 298
A. Allgemeine Uebersicht der gangbarsten Gold- und Silbermünzen . . . 298
B. Rechnungen mit Münzen 306

Digitized by Google

Seite

a. Gegenseitige Verwandlung.
1) Resolution.
2) Reduktion.
b. Anwendung der 4 Species.
1) Addition.
2) Subtraktion.
3) Multiplikation.
4) Division.
c. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.
1) Geometrische Verhältnisse.
2) Geometrische Proportionen.
d. Rechnungen mit Procenten. Agio. Damnum.

Viertes Kapitel. Die Zeitabschnitte 331
A. Eintheilung der Zeitabschnitte 331
B. Von den Cykeln und Aeren 331

Zweiter Abschnitt.

Berechnung solcher Größen, welche durch ungleichartige Größen bedingt werden.

Erstes Kapitel. Berechnung solcher Größen, welche durch zwei ungleichartige Größen bedingt werden 346
I. Beziehungen zwischen Raumgrößen und Gewichten (Kräften) 346
A. Längengrößen und Gewichte. Hebel, statisches Moment 347
B. Flächengrößen und Gewichte. Schwerpunkt der Vielecke 352
C. Körperräume und Gewichte. Specifisches Gewicht. Schwerpunkt der Körper 354
II. Beziehungen zwischen Raumgrößen und dem Gelde 393
A. Längengrößen und Geld 393
B. Flächengrößen und Geld 397
C. Körperräume und Geld 403
III. Beziehungen zwischen Raumgrößen und der Zeit 414
A. Längengrößen und Zeit 414
1) Gleichförmige Bewegung.
2) Ungleichförmige Bewegung. Fallgesetze.
B. Flächenräume und Zeit 429
C. Körperräume und Zeit 431
IV. Beziehungen zwischen dem Gewichte und dem Gelde 438
V. Beziehungen zwischen Gewichten und der Zeit 450
VI. Beziehungen zwischen dem Gelde und der Zeit 461
A. Zinsrechnung. Terminrechnung 463
B. Disconto und Rabatt 488

Zweites Kapitel. Berechnung solcher Größen, welche durch drei ungleichartige Größen bedingt werden 490
I. Raum, Gewichte (Kräfte) und Geld 490
A. Längen, Gewichte (Kräfte) und Geld 491
B. Flächen, Gewichte (Kräfte) und Geld 493
C. Körper, Gewichte (Kräfte) und Geld 499

Digitized by Google

Seite

II. Raum, Gewichte (Kräfte) und Zeit 511
A. Längen, Gewichte (Kräfte) und Zeit 511
B. Flächen, Gewichte (Kräfte) und Zeit 515
C. Körper, Gewichte (Kräfte) und Zeit 522
III. Raum, Geld und Zeit 530
A. Längen, Geld und Zeit 530
B. Flächen, Geld und Zeit 532
C. Körper, Geld und Zeit 534
IV. Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit 537
Drittes Kapitel. Berechnung solcher Aufgaben, welche durch vier ungleichartige Größen bedingt werden 540
I. Längen, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit 540
II. Flächen, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit 541
III. Körper, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit 544

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Es ist kein Grund vorhanden, daran zu zweifeln, daß das vorliegende Werk sich Freunde und Gönner erwerben werde. Es zeichnet sich vor so vielen ähnlichen Werken durch systematischen Zusammenhang, Zusammenstellung des Gleichartigen und Uebersichtlichkeit des Ganzen, so wie durch sinnreiche Combinationen und einen Reichthum von eigenthümlichen, lehrreichen und interessanten Aufgaben aus, daß es nur einer Durchsicht, nicht eines empfehlenden Wortes von meiner Seite bedarf, um sich Eingang zu verschaffen. Während einfachere, auf die gewöhnlichen, d. h. beschränkten Verhältnisse der Volksschulen deren Bedürfnisse Genüge leisten, geht das vorliegende Werk über gewöhnliche Zustände hinaus, es befriedigt höhere Anforderungen, führt zu gründlicherer Erkenntniß der Gesetze der Zahlen und ihrer Verhältnisse, und lehrt Aufgaben berechnen, die dem Menschen, der in den einfachsten Verhältnissen lebt, nicht vorkommen. Darum ist das Buch auch weniger gewöhnlichen Volksschullehrern, als solchen zu empfehlen, die zu einem ausgedehntern Unterrichte in der Zahlen- und praktischen Raumlehre Gelegenheit oder Neigung haben, sich selbst gründlichere, weiter führende Kenntnisse in den genannten wichtigen Zweigen des menschlichen Wissens anzueignen. Diesen sei das, mit ungewöhnlicher Sorgfalt und Umsicht ausgearbeitete, reich ausgestattete Werk hiermit bestens empfohlen. Kein Zweifel, daß sich dasselbe schon wegen der Mannigfaltigkeit belehrender Aufgaben eben die Anerkennung erwerben wird, wie des Herrn Verfassers Sammlung algebraischer Aufgaben in dessen „Grundriß der Elementar-Arithmetik".

Berlin, Ende 1844.

Diesterweg.

Digitized by Google

Einleitende Uebersicht.

Die Arithmetik ist der Inbegriff aller möglichen Verbindungen der Zahlen und der Beziehungen derselben auf einander, neue Zahlen hervorzubringen. Die möglichen Verbindungen und Beziehungen der Zahlen mit und auf einander kennen zu lernen, ist eine genaue Kenntniß der Zahlen selbst nothwendig. Nun ist eine Zahl nichts anderes, als ein aus Einheiten zusammengesetztes Ganzes, oder nach Euklid: ist die Zahl die aus Einheiten bestehende Vielheit. Die Einheit ist der Begriff, nach welchem jedes Ding als Eins betrachtet wird. Die Vorstellung von Eins läßt sich nicht weiter erklären, sondern ist unmittelbar durch die Anschauung gegeben. Vereinigt man nun mehrere Einheiten in der Vorstellung zu einem Ganzen, so hat man den Begriff der Zahl.

Die Bildung einer Zahl aus Einheiten führt sofort auf eine Verbindung der Zahlen zu einem Ganzen oder zu einer neuen Zahl. Dieses Verfahren heißt das Zusammenzählen oder Addiren oder die Addition. Die Zahlen, welche zu einer neuen Zahl zusammengesetzt werden, heißen die Summanden und die neue Zahl die Summe. Sind also die Summanden gegeben, so findet man durch Addition die Summe. Nun kann man umgekehrt verfahren, nämlich eine beliebige Zahl als Summe von 2, 3, 4 ꝛc. Zahlen annehmen und die Summanden der Zahl suchen; endlich kann man einen Summandus und die Summe beliebig annehmen, und den andern Summandus suchen. Man nennt nun die Rechnungsart, durch welche man aus dem einen gegebenen Summandus und der gegebenen Summe den andern Summandus findet, das Hinwegnehmen, Subtrahiren oder die Subtraktion einer Zahl von einer andern. Die Zahl, welche von einer andern hinweggenommen wird, heißt der Subtrahendus; die Zahl, welche um eine andere vermindert wird, der Minuendus; die Zahl, welche mit dem Subtrahendus zusammen den Minuendus ausmacht, heißt das Uebrige, der Ueberschuß, der Rest, der Unterschied oder die Differenz.

Ferner können 2 Zahlen gegeben sein, und man kann untersuchen, wie die eine aus der andern mit Hilfe einer dritten entstanden sei, und zwar entweder durch Addition oder Subtraktion. In dieser Untersuchung bezieht man die eine auf die andere Zahl vermöge einer dritten und diese Beziehung zweier Zahlen auf einander heißt ein Verhältniß derselben. Vergleicht man

Digitized by Google

nun 2 Verhältnisse mit einander, so erhält man gleiche Verhältnisse oder Proportionen und ungleiche Verhältnisse.

In der Addition nahm man auf die Gleich- und Ungleichheit der Zahlen, welche addirt wurden, keine Rücksicht; dieses kann jetzt geschehen. Man kann also eine Summe von 2, 3, 4 ꝛc. gleichen Zahlen bilden, und dieses führt auf eine neue Ansicht der Zahlen. Eine Summe von 2, 3, 4 ꝛc. gleichen Zahlen heißt das Zwei-, Drei-, Vierfache ꝛc. einer der gleichen Zahlen. Eine Summe vieler gleicher Zahlen heißt ein Vielfaches einer derselben. Z. B. das 3fache von 5 ist gleich $5 + 5 + 5 = 3$ mal $5 = 15$.

Die in Einheiten dargestellten Vielfachen heißen Produkte. Eine der gleichen Zahlen, welche zu einem Vielfachen oder Produkte verbunden werden, heißt die vervielfachte Zahl oder der Multiplikandus; die Zahl der Multiplikanden heißt die vervielfachende Zahl oder der Multiplikator. In dem obigen Beispiele ist 3 der Multiplikator, 5 der Multiplikandus, das 3fache von 5 gleich 3 mal 5 das Vielfache und 15 das Produkt. Da man aber stets dasselbe Produkt erhält, man mag den Multiplikandus durch den Multiplikator, oder umgekehrt den Multiplikator durch den Multiplikandus vervielfältigen, denn 3 mal 5 ist gleich 5 mal 3 gleich 15, so führen diese beiden Zahlen den gemeinschaftlichen Namen Faktor. Das Verfahren, vermöge dessen man ein Produkt aus 2 Zahlen bildet, heißt das Vervielfältigen, die Vervielfältigung oder die Multiplikation.

Wie man gleiche Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigte, so kann man auch 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Zahlen, also Vielfache einer Zahl, von einer gegebenen Zahl hinwegnehmen: in diesem Falle erfährt man, welches Vielfache eine gegebene Zahl von einer kleinern ist, oder wie oft eine Zahl eine andere enthält; dieses Verfahren wird die theilweise Division genannt, weil in den meisten Fällen dieser Rechnung ein Rest der Division übrig bleibt; daher wird also nicht die ganze Zahl, sondern nur ein Theil derselben, obgleich der bei weitem größere Theil, dividirt. Diese Rechnung verlangt nur, daß man die größere zweier gegebenen Zahlen in 2 andere zerlege, von denen die eine ein Vielfaches der gegebenen kleinern, und die andere kleiner als die gegebene kleinere sei.

Nun kann man das entgegengesetzte Verfahren von der Multiplikation anwenden; nämlich man betrachtet eine beliebige Zahl als ein Produkt zweier andern, und sucht die Faktoren desselben. In dieser Untersuchung kann man zwei verschiedene Wege einschlagen; entweder nimmt man eine beliebige Zahl als den einen Faktor und eine solche Zahl als Produkt an, die ein Vielfaches von jenem Faktor ist, oder die als Produkt angenommene Zahl ist kein Vielfaches von der als Faktor angenommenen, und dieser Fall führt auf die Brüche. Das Verfahren, welches man anwendet, aus dem gegebenen einen Faktor und dem gegebenen Produkte den andern Faktor zu finden, heißt die Theilung oder Division. Das gegebene Produkt heißt der Dividendus, der gegebene Faktor heißt der Divisor und der gesuchte Faktor der Quotient.

Digitized by Google

Ferner können 2 beliebige Zahlen gegeben sein, und man untersucht, wie die eine aus der andern entstanden sei, nämlich durch Vervielfältigung oder Theilung mit einer dritten Zahl oder durch Vervielfältigung und Theilung in Verbindung. Diese Beziehung der einen Zahl auf die andere heißt wieder das Verhältniß derselben, aber zum Unterschiede von den frühern Verhältnissen heißt dieses das geometrische und jenes das arithmetische Verhältniß. Die Vergleichung der geometrischen Verhältnisse in Hinsicht ihrer Gleichheit giebt die geometrischen Proportionen.

Die vollständige Kenntniß der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (diese vier Rechnungsarten heißen gewöhnlich die vier Species) mit ganzen und gebrochenen Zahlen und der geometrischen Proportionen ist hinreichend alle Aufgaben des bürgerlichen Verkehrs zu lösen; daher werden auch nur die vier Species mit ganzen und gebrochenen Zahlen und die geometrischen Proportionen in den gewöhnlichen arithmetischen Elementarbüchern behandelt.

Die Einheiten, welche die Zahlen bilden, sind entweder abstrakt, d. h. sie sind bloße Vorstellungen, die nicht auf eine besondere Gattung von Dingen, sondern durchaus auf alle Dinge passen, und in diesem Falle werden auch die Namen der Dinge nicht genannt, jedes Ding heißt kurz Eins, oder konkret, d. h. sie sind Vorstellungen von einer besondern Art oder Gattung von Dingen, und in diesem Falle werden die Namen der Dinge angeführt, z. B. ein Thaler, ein Baum, ein Pfund ꝛc. Zahlen, welche aus abstrakten Einheiten gebildet sind, heißen unbenannte, und die, welche konkrete Einheiten in sich begreifen, benannte Zahlen. Zwei, Drei, Vier ꝛc. sind also unbenannte Zahlen, aber 2 Städte, 3 Menschen, 4 Ellen ꝛc. sind benannte Zahlen. Das Rechnen mit unbenannten Zahlen heißt das reine, mit benannten Zahlen das angewandte Rechnen. Das reine Rechnen beabsichtiget, dem Anfänger eine deutliche Vorstellung von der unbenannten oder abstrakten Zahl und eine gründliche Kenntniß der Verbindungen und Verhältnisse der Zahlen im Allgemeinen zu geben, und den Schüler zu befähigen, die Verbindungen nd Verhältnisse der Zahlen mit Sicherheit, Leichtigkeit und Schnelligkeit zu behandeln. Das angewandte Rechnen setzt das reine voraus und bezweckt, den Schüler mit den Verhältnissen wirklicher Dinge, theils einer, theils verschiedener Gattungen, welche am häufigsten im bürgerlichen Verkehre vorkommen und deren Menge durch Zahlen bezeichnet werden, bekannt zu machen.

Derjenige Theil der Arithmetik, welcher das reine Rechnen in den vier Species und den geometrischen Verhältnissen mit ganzen und gebrochenen Zahlen und das angewandte enthält, welches sich auf das genannte reine bezieht, heißt die niedere oder Elementar-Arithmetik. In diesem Werkchen wird nur die Elementar-Arithmetik behandelt.

Die Beziehungen der Zahlen auf einander, welche die weitern Fortschritte des Rechnens eingeführt haben und in dieser Uebersicht erwähnt werden, sind

Digitized by Google

durchaus als unvollständig zu betrachten; denn sie sind nur die geringsten Elemente der großen, ausgedehnten und schwierigen Untersuchungen, welche in der Algebra, der Differential- und Integralrechnung angestellt werden; und die fernere kurze Entwicklung der Ideen im Rechnen sollen nur oberflächlich den Zusammenhang zwischen der niedern und der höhern Arithmetik dem jungen Lehrer im Rechnen zeigen, dem es bisher an Zeit oder Gelegenheit fehlte, die höhern Theile der Mathematik zu studiren. Damit aber das Folgende verständlich sei, so wird es vortheilhaft sein, dasselbe an Beispielen kurz zu erläutern.

Es ist im Vorhergehenden bemerkt, wie der rechnende Verstand von der Bildung der Zahl aus Einheiten durch Zusammensetzung zur Zusammensetzung der Zahlen selbst zu neuen Zahlen überging; dann die verschiedenen Zahlen nach ihren Beziehungen auf einander mit besondern Namen belegte, und diese Beziehungen wieder genauer untersuchte; darauf neue Zahlen aus gleichen Zahlen wie früher die Zahlen selbst aus der Einheit ableitete, und diese neue Ansicht der Zahlen wieder genauer betrachtete, das zur Division und den Proportionen führte; so setzt er die Forschungen im Rechnen weiter fort. Nämlich die Hauptpunkte in den verschiedenen Bildungen der Zahlen aus andern sind folgende: 1) Zusammensetzung der Einheiten zu einem Ganzen (der Zahl selbst); 2) Zusammensetzung der Zahlen zu einem Ganzen, zur Summe, zu einem Aggregate von Zahlen im Allgemeinen; 3) Zusammensetzung besonderer, nämlich gleicher Zahlen zu einem Ganzen, zu einem Vielfachen, einem Produkte. Von hier an nimmt der forschende Geist einen ganz neuen Schwung in seinem Ideengange. Denn bei den Vielfachen oder Produkten stehen die beiden Zahlen, Multiplikator und Multiplikandus nicht mehr wie früher in einer nebengeordneten, sondern in einer untergeordneten Stellung; der Multiplikator ist nicht mehr eine Zahl von Einheiten, sondern eine Zahl von Zahlen. Da aber beide Zahlen, Multiplikator und Multiplikandus, gleiche Wirkungen auf einander ausüben, denn beide bringen, in welcher Ordnung man sie auch nehme, dasselbe Produkt hervor; so können sie in dieser Beziehung, nämlich der gegenseitigen Vervielfältigung, der Multiplikation, als nebengeordnet betrachtet werden, und daher heißen sie Faktoren. Sehr leicht kommt man nun darauf, daß in einem Produkte nicht 2, sondern auch 3, 4, 5 ꝛc. Faktoren vereinigt werden können, und so gelangt man zu der Zahl der Faktoren, also nicht zu der Vorstellung einer Zahl, die aus bloßen Einheiten besteht, sondern zu der Vorstellung einer Zahl von solchen Zahlen, die in einer gewissen Beziehung (der gegenseitigen Vervielfältigung) auf einander stehen. Die Faktoren eines solchen Produkts können nun entweder alle unter einander gleich oder ungleich sein. Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren hat den Namen Potenz oder Dignität, und aus ungleichen Faktoren den der Fakultät erhalten. Die Erörterung der Fakultäten würde hier zu weit führen, weil sie eine Menge anderer Kenntnisse

Digitized by Google

voraussetzen, die hier ohne zu große Weitschweifigkeit nicht angeführt werden können; daher genüge eine etwas genauere Betrachtung der Potenzen.

Welchem Leser die gewöhnlichen Zeichen für die arithmetischen Operationen nicht bekannt sein sollten, der möge sie sich zum leichteren Verständnisse des Nachfolgenden hier kurz merken. Um anzuzeigen, daß 2 Zahlen z. B. 3 und 5 addirt werden sollen, braucht man dieses Zeichen +, ausgesprochen **plus**, $3 + 5 = 8$, die zwei wagerecht neben einander laufenden Striche bedeuten gleich. Soll 3 von 5 subtrahirt werden, so bezeichnet man dies so $5 - 3 = 2$, ausgesprochen 5 **minus** 3 gleich 2. Zur Bezeichnung der Multiplikation braucht man entweder ein liegendes Kreuz ×, oder einen Punkt; also ist Folgendes gleichbedeutend: 3 mal $5 = 3 \times 5 = 3 . 5 = 15$. Die Division wird entweder durch ein Kolon oder in Form eines Bruches bezeichnet; daher ist 3 dividirt durch $5 = 3 : 5 = \frac{3}{5}$; oder 6 dividirt durch $3 = 6 : 3 = \frac{6}{3} = 2$. Nun zu den Potenzen.

Einer der gleichen Faktoren heißt die Grundzahl oder Basis, die Zahl der gleichen Faktoren der Exponent der Potenz. Eine Potenz wird kurz so bezeichnet, daß man einen der gleichen Faktoren nur einmal schreibt, und rechts oben durch eine Zahl die Anzahl derselben anzeigt; daher ist die 2te Potenz von $2 = 2 . 2 = 2^2 = 4$; die 3te Potenz von $2 = 2 . 2 . 2 = 2^3 = 8$; die 4te Potenz von $2 = 2 . 2 . 2 . 2 = 2^4 = 16$; 2 zur 5ten Potenz $= 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 2^5 = 32$; 2 zur 6ten Potenz $= 2^6 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 64$ ꝛc.

Auf dieselbe Weise kann man Potenzen von 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ꝛc. bilden. Z. B. $3^2 = 3 . 3 = 9 = 3$ zur 2ten Potenz; $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27 =$ der 3ten Potenz von 3 ꝛc. $4^2 = 4 . 4 = 16 = 4$ zur 2ten Potenz oder kurz 4 zur 2ten. $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125 = 5$ zur 3ten. ꝛc.

Zu den Potenzen gehören also 3 Zahlen, Potenz, Basis und Exponent derselben, und sind 2 von ihnen gegeben, so ist die dritte dadurch bestimmt.

1) Gegeben ist die Basis und der Exponent, gesucht die Potenz; diese wird durch Multiplikation gefunden, wie solches aus obigen Beispielen erhellt. Die 2te Potenz einer Zahl, oder diejenige Potenz einer Zahl, deren Exponent 2 ist, heißt das Quadrat der Zahl. Daher ist das Quadrat von $1 = 1^2 = 1 . 1 = 1$; das Quadrat von 2, 3, 4 .... 10 ist; $2^2 = 2 . 2 = 4$; $3^2 = 3 . 3 = 9$; $4^2 = 4 . 4 = 16$; $5^2 = 5 . 5 = 25$. ꝛc.

Diejenige Potenz einer Zahl, deren Exponent 3 ist, heißt der Kubus der Zahl; also ist der Kubus von 2, 3, 4, 5, ꝛc.: $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$; $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$; $4^3 = 4 . 4 . 4 = 64$; $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$. ꝛc.

2) Gegeben der Exponent und die Potenz, gesucht die Basis.

Ist also der Exponent einer Potenz 2, 3, 4, 5, ꝛc.; so hat man eine Zahl zu suchen, welche zur 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ꝛc. Potenz erhoben gleich

Digitized by Google

der gegebenen Potenz ist. Die gesuchte Zahl pflegt man durch eine der letzten Buchstaben des lateinischen abc's zu bezeichnen, und besonders gern durch x.

Ist also der gegebene Exponent 2, 3, 4, ꝛc., die dazu gehörige Potenz 25, 27, 256, ꝛc.; so kann man die Aufgaben kurz so darstellen: $x^2 = 25$; also $x = 5$; denn $5^2 = 5 . 5 = 25$; $x^3 = 27$; so ist $x = 3$; denn $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$; $x^4 = 256$; so ist $x = 4$; denn $4^4 = 4 . 4 . 4 . 4 = 256$. ꝛc.

Diese Aufgabe kann man auch so ausdrücken: man soll eine gegebene Zahl (die Potenz) in 2, 3, 4, ꝛc. gleiche Faktoren zerlegen.

Wird die Basis einer Potenz gesucht, so heißt die gesuchte Basis die Wurzel der Zahl (der Potenz).

Wie man die Potenzen nach der Größe des Exponenten eintheilt, so theilt man auch die Wurzeln nach der Größe des Exponenten ein, und er heißt nun nicht mehr kurz Exponent, sondern Wurzelexponent. Man kann also eine der 2 gleichen Wurzeln oder die Quadratwurzel oder die 2te Wurzel; eine der 3 gleichen Faktoren (Wurzeln) oder die 3te Wurzel oder Kubikwurzel einer Zahl suchen ꝛc. Das Wort Wurzel heißt in lateinischer Sprache **radix**; der Anfangsbuchstabe dieses Wortes ist r; soll nun eine Wurzel einer Zahl gesucht werden, z. B. die Wurzel aus 9, so könnte man dieses so bezeichnen: „Wurzel aus 9 = **radix** aus 9", oder kurz = r9 (und indem man den Buchstaben etwas verzieht) = $\sqrt{9}$. Diese letzte Bezeichnung ist die gewöhnliche. Den Wurzelexponenten, welcher also anzeigt, in wie viele gleiche Faktoren eine Zahl zu zerlegen sei, schreibt man in die obere Oeffnung dieses Zeichens; also die 2te Wurzel aus 9 = $\sqrt[2]{9}$, die 3te Wurzel aus 64 = $\sqrt[3]{64}$; die 4te Wurzel aus 625 = $\sqrt[4]{625} = 5$; denn $5 . 5 . 5 . 5 = 625$. ꝛc.

3) Endlich ist gegeben die Basis und die Potenz und gesucht wird der Exponent; z. B. $2^x = 32$; so ist $x = 5$; denn $2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$. $3^x = 81$; so ist $x = 4$; denn $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$.

Die Berechnung der Potenzen, der Wurzeln und Exponenten ist sehr oft äußerst mühsam und Zeit raubend; daher hat man auf ein Mittel gedacht, diese mühevolle Arbeit zu erleichtern und Zeit in diesen Rechnungen zu ersparen, und man hat mancherlei Methoden erfunden, welche den erwähnten Zweck bald auf kürzerm bald auf längerm Wege erreichen. Hier ist der Ort nicht, weder alle noch einige dieser Methoden anzuführen und zu erläutern; wohl aber verlangt der Zweck dieser Uebersicht, daß die allgemeinste und einfachste unter allen Methoden hier erwähnt und erörtert werde; und diese ist die Rechnung mit Logarithmen.

Die Idee der Logarithmen ist folgende. Man nimmt eine gewisse Zahl als Basis von Potenzen an; diese als Basis angenommene Zahl erhebt man

Digitized by Google

nun zu allen möglichen Potenzen, um dadurch alle Zahlen der natürlichen Ordnung als Potenzen dieser Basis darzustellen. Die natürliche Ordnung oder Reihenfolge der Zahlen ist die, in welcher die Zahlen mit Eins anfangen, und jede folgende um Eins größer als die unmittelbar vorhergehende wird; also 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ꝛc. sind Zahlen, welche in natürlicher Ordnung auf einander folgen. Es werden also 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc. als Potenzen der als Basis angenommenen Zahl betrachtet.

Um dieses an einem einfachen Beispiele zu erläutern, sei die als Basis angenommene Zahl 2, so ist:

$2^1 = 2$ Die Zahlen 2, 4, 8, 16, ꝛc. sind also Potenzen von 2. In
$2^2 = 4$ dieser Reihe der Zahlen fehlen zwar die Zahlen 3; 5, 6, 7;
$2^3 = 8$ 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15; ꝛc.; doch auch die fehlenden
$2^4 = 16$ Zahlen können durch gewisse Hilfsmittel als Potenzen berech-
$2^5 = 32$ net werden. Nun nennt man die Exponenten dieser Po-
$2^6 = 64$ tenzen, also die Zahlen, zu welchen Potenzen die Basis
$2^7 = 128$ erhoben werden muß, um die Zahlen der natürlichen Ord-
$2^8 = 256$ nung zu erhalten, die Logarithmen dieser Zahlen. In ge-
$2^9 = 512$ genwärtigem Beispiele ist also 1 der Logarithmus von 2,
$2^{10} = 1024$ 2 der Logarithmus von 4.

ꝛc. ꝛc.

Kurz bezeichnet man dieses so:

$1 =$ Log. 2. Nämlich für die Basis $= 2$.
$2 =$ Log. 4. Der Log. von $3 =$ Log. 3 muß also größer als 1,
$3 =$ Log. 8. und kleiner als 2 sein; daher also 1 und ein echter
$4 =$ Log. 16. Bruch. Der Logarithmus der Zahlen 5, 6, 7 muß
$5 =$ Log. 32. größer als 2 und kleiner als 3, also 2 und ein echter
$6 =$ Log. 64. Bruch sein ꝛc.
$7 =$ Log. 128. Wie man den echten Bruch findet, ist Sorge des-
$8 =$ Log. 256. jenigen, der die Logarithmen der Zahlen berechnet, und
$9 =$ Log. 512. gehört also nicht hierher.
$10 =$ Log. 1024. ꝛc. ꝛc.

Nun zeichnet man die Zahlen in natürlicher Ordnung in Tafeln auf, und setzt die Logarithmen der Zahlen neben dieselben, so daß man neben jeder beliebigen Zahl ihren zugehörigen Logarithmus sogleich findet. Diese Tafeln heißen logarithmische Tafeln. Der Gebrauch und Nutzen der Logarithmen kann hier nicht gezeigt werden, weil dies die gründliche Lehre von den Potenzen und den Rechnungen mit denselben voraussetzt, was kein Gegenstand der niedern Arithmetik ist. Nur dieses sei von dem Gebrauche der Logarithmen erwähnt. Will man eine beliebige Zahl, z. B. 12 zur 7ten Potenz erheben, so nimmt man aus den Tafeln Log. 12, multiplicirt diesen mit 7, zu diesem Produkte als Log. betrachtet sucht man die Zahl in den Tafeln; so ist die gefundene Zahl die 7te Potenz von 12.

Digitized by Google

Sucht man einen der 2 gleichen Faktoren von 12, also die Quadratwurzel aus 12; so dividirt man den Log. 12 durch 2, zu diesem Quotienten als Logarithmus betrachtet sucht man die zugehörige Zahl in den Tafeln; so ist die gefundene Zahl die Quadratwurzel aus 12. Hat man ferner den Exponenten zu suchen; etwa $12^x = 100$, so ist $x = \frac{\text{Log. } 100}{\text{Log. } 12}$ d. h. der gesuchte Exponent ist gleich dem Logarithmus von 100 dividirt durch den Logarithmus von 12. Vermittelst der Logarithmen werden also alle Rechnungen, welche sich auf Potenzen beziehen, auf die 4 Species reducirt.

Der erste Erfinder der Logarithmen ist der Schottische Baron Neper, welcher 1664 starb. Die Basis seiner Logarithmen war 0,99999...., die er zu trigonometrischen Rechnungen anwandte. Gleichzeitig mit Neper lebte der Engländer Henry Briggs, Prof. zu Oxford: dieser, von dem großen Nutzen der Logarithmen überzeugt, unternahm die erste Berechnung der Logarithmen für die Basis $= 10$, welche besondere Vortheile für unser Zahlensystem gewährt.

Mehr kann in einer Uebersicht über die Logarithmen nicht gesagt werden. Nun ist noch übrig, die Grundideen der übrigen Theile der Arithmetik anzudeuten.

Es ist klar, daß man nicht eine einzige Potenz, sondern auch mehrere Potenzen durch die 4 Species zu einem Ganzen, zu einem Ausdrucke, verbunden betrachten könne. Hat man nun zwei Ausdrücke für eine und dieselbe Größe, so ist klar, daß diese beiden Ausdrücke einander gleich sein müssen; und man nennt einen doppelten Ausdruck für eine und dieselbe Größe eine Gleichung. Z. B. $7 + 3 = 10$ ist eine Gleichung; eben so sind $7 - 3 = 4$; $7 . 3 = 21$; $7 : 3 = 2\frac{1}{3}$; $7^3 = 343$ ꝛc. Gleichungen. Spricht man aber in der Arithmetik von Gleichungen, so versteht man darunter nicht solche, wie die eben angeführten, sondern solche, in welchen außer bekannten auch unbekannte Zahlen vorkommen. Z. B. $x + 5 = 9$; $7 . x - 12 = 18$, $2 . x + 3 . x^2 = 27$. ꝛc. In einer Gleichung darf nicht immer nur Eine unbekannte Zahl vorkommen, sondern es können sich in derselben auch mehrere befinden, welche man in solchen Fällen mit verschiedenen Buchstaben, y, z, u, v, w, ꝛc. bezeichnet. Der Einfachheit wegen werde hier nur von Gleichungen mit einer Unbekannten gesprochen. Man theilt die Gleichungen nach dem größten Exponenten der Unbekannten in Grade ein; es giebt daher Gleichungen des ersten Grades, also solche, welche die Unbekannte höchstens zur ersten Potenz enthalten, z. B. $x + 2 = 5$, $x + 3 . x = 25$; Gleichungen des 2ten Grades, welche die Unbekannte höchstens zur 2ten Potenz enthalten, z. B. $x^2 = 16$, $4x + x^2 = 56$; Gleichungen des 3ten Grades, welche die Unbekannte höchstens zur 3ten Potenz enthalten, z. B. $x + 3 . x^2 + 5 . x^3 = 75$. ꝛc. $x^6 + 3 . x^4 + 2 . x = 90$ ist eine Gleichung des 6ten Grades. ꝛc.

Digitized by Google

Der Werth der unbekannten Zahl x einer solchen Gleichung heißt gleichfalls die Wurzel der Gleichung, z. B. die Wurzel der Gleichung $x^2 + 3.x = 70$ ist $x = 7$, denn $x^2 = 7^2 = 49$, und $3.x = 3.7 = 21$; $49 + 21 = 70$.

Derjenige Theil der Arithmetik, welcher sich beschäftigt, die Wurzeln der Gleichungen von beliebigen Graden zu berechnen, hißt Algebra.

Es ist aber nicht nothwendig, einen Ausdruck, welcher verschiedene Potenzen der Unbekannten in sich begreift, stets gleich einer bekannten Zahl, sondern man kann einen solchen Ausdruck auch gleich einer neuen unbekannten Zahl setzen, z. B. $x + 5 = y$, $x + 3.x^2 = y$, $2.x + x^2 - 4.x^3 = y$ ꝛc. In diesen Gleichungen ist der Werth der einen unbekannten Zahl von dem Werthe der andern abhängig; d. h. wenn man den Werth der einen willkürlich annimmt, so kann nicht zugleich auch der Werth der andern willkürlich angenommen werden, sondern der Werth dieser ist durch den angenommenen Werth jener bedingt. Es sei z. B. $x^2 + 3.x = y$, und man nehme $x = 1$ an, so kann y keinen andern Werth als 4 haben; setzt man $x = 2$, so ist $y = 10$. ꝛc. Setzt man umgekehrt $y = 18$, so ist der Werth von $x = 3$. ꝛc.

Eine solche Gleichung mit 2 unbekannten Zahlen, in welcher man den Werth der einen Unbekannten von dem Werthe der andern als abhängig betrachtet, heißt eine Funktion, und man sagt, die eine Unbekannte, deren Werth von dem der andern abhängt, ist eine Funktion dieser andern.

In dem Gebiete der Funktionen untersucht man nicht sowohl den Werth der Unbekannten, sondern vielmehr die Veränderungen, welche mit der einen Unbekannten vorgehen, wenn die andere eine gewisse Aenderung erleidet. Ist $y = 3.x + x^2$, und wird x um eine gewisse Zahl z größer oder kleiner, so wird auch y um eine gewisse Quantität wachsen oder abnehmen. Man setze also anstatt x in den gegebenen. oder ursprünglichen Ausdruck $x + z$, und bezeichne dieses neue y mit Y, so ist $Y = 3.(x + z) + (x + z)^2 = 3.x + 3.z + x^2 + 2.x.z + z^2 = 3.x + x^2 + 3.z + 2.x.z + z^2$, und will man nun die Veränderung wissen, welche in y vorgegangen ist, so muß man von diesem letzten Ausdrucke den ursprünglichen hinwegnehmen; dieses giebt $Y - y = 3.z + 2.x.z + z^2 = (3 + 2.x).z + z^2$, und durch z dividirt, giebt $\frac{Y - y}{z} = 3 + 2.x + z$.

Bezeichnet man die Veränderung von x durch dx, und die Veränderung von y durch dy, also $dx = z$, $dy = Y - y$, so hat man $dy = (3 + 2.x).dx + (dx)^2$ oder $\frac{dy}{dx} = 3 + 2x + dx$.

Derjenige Theil der Arithmetik, welcher die Veränderung der einen Unbekannten, welche als Funktion einer andern betrachtet wird, untersucht, in-

Digitized by Google

dem die andere Unbekannte eine Aenderung erleidet, heißt Differentialrechnung; weil auf die Differenz zwischen der ursprünglichen und abgeleiteten Funktion Rücksicht genommen wird.

Umgekehrt, kann die Veränderung einer Funktion gegeben sein, und man sucht die ursprüngliche Funktion, z. B. es ist gegeben $Y - y = 3.z + 2.x.z + z^2$, und man will wissen, aus welcher diese Funktion hervorgegangen sei. Daß aber diese Funktion die Veränderung einer andern sei, sieht man ihr nicht sogleich an, denn man kann sie auch als eine gegebene ursprüngliche Funktion mehrerer Unbekannten betrachten, und damit dieses nicht geschehe, bezeichnet man diese Veränderung wie oben, indem man setzt $dy = (3 + 2.x).dx + (dx)^2$.

Derjenige Theil der Arithmetik, welcher von der gegebenen Veränderung einer ursprünglichen Funktion (vom gegebenen Differential) auf die ursprüngliche Funktion selbst zurückschließt, heißt die Integralrechnung und ist nach dem gegenwärtigen Stande der Arithmetik der letzte und höchste Theil derselben.

Was also Laut oder Buchstabe, Wort, Satz, Abhandlung über einen Gegenstand in der Grammatik, oder Anschauung, Vorstellung, Begriff, Urtheil und Schluß in der Logik ist, das ist Einheit, Zahl, Summe, Produkt und Potenz in der Arithmetik. Die Grenzen dieses Werkchens erlauben nicht, ausführlicher die Uebersicht der Arithmetik darzulegen; welchem Leser das Gesagte nicht genügt, der wird, wie es sich von selbst versteht, die höheren Theile der Arithmetik selbst studiren.

Nach der gegebenen Uebersicht zerfällt also die niedere Arithmetik in das reine und angewandte Rechnen, und das reine in folgende Abschnitte: 1) Bildung der Summen durch Addition; 2) Bildung der Differenzen durch Subtraktion; 3) Bildung der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen durch Vergleichung. Doch alle diese Operationen haben ihren Grund in der Addition, und man kann daher diese drei Abschnitte unter den einen begreifen: Zusammensetzung, Trennung und Vergleichung der Zahlen.

4) Bildung der Vielfachen und Produkte durch Multiplikation; 5) Bildung der Theile und Quotienten durch Division; 6) Bildung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen durch geometrische Vergleichung. Auch diese drei Abschnitte sind unter folgenden einen begriffen: Vervielfältigung, Theilung und Vergleichung der Zahlen.

In dieser Eintheilung ist das Enthaltensein einer Zahl in einer andern oder die theilweise Division nicht angeführt, und diese müßte unmittelbar nach der Vervielfältigung folgen, wie es aus der Uebersicht erhellet; diese Rechnungsart kann aber auch unter der Rubrik der Division behandelt werden, und dies um so mehr, weil die schriftliche Darstellung derselben nach den Gesetzen der eigentlichen Division behandelt wird.

Digitized by Google

Erste Abtheilung.
Reines Rechnen.

Erster Abschnitt.
Zusammensetzung, Trennung und Vergleichung der Zahlen.

Erstes Kapitel.
Bildung der Summen durch Addition.

Die Bildung der Summen besteht darin, daß man 2 oder mehrere Zahlen zu einer neuen Zahl zusammensetzt, und da jede Zahl einen bestimmten Namen hat, so muß auch diese einen gewissen Namen erhalten, welcher durch die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten bestimmt wird. Dieses setzt voraus die Kenntniß der Namen jeder bestimmten Menge von Einheiten, und umgekehrt, die deutliche Vorstellung der Menge von Einheiten, welche mit einem gewissen Worte bezeichnet werden.

Um diesen letzten Zweck zu erreichen, wird man also die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung durch Zusammensetzung von Einheiten zu einem Ganzen und Benennung dieses Ganzen durch das passende Zahlwort bilden, und diese Uebung ist das Zählen, welches also die erste Stufe des Rechnens ist. Da aber die Mengen der Einheiten desto schwerer zu übersehen sind, je mehr sie wachsen, so wird man der Vorstellung dadurch zu Hilfe kommen, daß man die Mengen von Einheiten nach einem gewissen Gesetze gleichsam in kleinere und größere Haufen abtheilt, und durch Zusammensetzung derselben die dazwischen liegenden Zahlen bildet. Dieses ist die Eintheilung der Zahlen und bildet also die zweite Stufe im Rechnen.

Erste Stufe.
Das Zählen.

Der angehende Rechner muß, um eine deutliche Vorstellung einer Zahl zu haben, zuerst eine klare Vorstellung der Einheit sich erwerben, und dieser

Digitized by Google

Zweck wird dadurch erreicht, daß der Lehrer verschiedene Gegenstände, die den Kindern vor Augen liegen, zeigt, und jedes dieser Dinge Eins nennt. Z. B. 1 Tisch, 1 Bank, 1 Stuhl, 1 Blatt, 1 Kind. ꝛc. Dann stellt der Lehrer 1, 2, 3, ꝛc. Dinge zusammen, und benennt ihre Vielheit durch das geeignete Zahlwort. Die passendsten Dinge zu diesem Zwecke sind Striche, welche der Lehrer nach folgendem Schema zuerst an die Tafel schreibt, und dann die Kinder selbst auf ihre Tafel oder ihr Papier schreiben und benennen läßt.

(A)

=
| + | = ||
|| + | = |||
||| + | = ||||
|||| + | = |||||
||||| + | = ||||||
|||||| + | = |||||||
ꝛc. ꝛc.	

Nachdem der Lehrer die erste Zeile an die Tafel geschrieben, ausgesprochen: Eins ist gleich Eins, und hat nachsprechen lassen, erklärt Er, daß die beiden neben einander laufenden Striche = gleich oder eben so viel, oder eben dasselbe bedeuten. Dann spricht Er: Eins und Eins ist gleich Zwei. Wieder erklärt Er das Kreuz +, es bedeutet und, oder das Eins und Eins zusammengenommen werden sollen. Darauf spricht Er weiter und läßt stets die Kinder nachsprechen, indem er auf das zu sprechende hinzeigt: Zwei und Eins ist gleich Drei; Drei und Eins ist gleich Vier; Vier und Eins ist gleich Fünf; Fünf und Eins ist gleich Sechs. ꝛc.

Wie weit der Lehrer auf diese Weise zählen läßt, hängt von der Fähigkeit der Kinder ab; Er wird also mit ganz jungen Kindern anfangs nur bis Zehn, dann bis Zwanzig, Dreizig, Vierzig ꝛc. bis Hundert gehen.

Ist der Lehrer im Zählen bis zu irgend einer Zahl gelangt, so läßt Er von dieser Zahl auch rückwärts bis zur Einheit oder einer andern kleinern Zahl zählen.

Eine sehr zweckmäßige Uebung ist auch das Zählen mit Ueberspringung einer Zahl. Z. B. Eins, Drei, Fünf, ꝛc. oder Zwei, Vier, Sechs, ꝛc.

Ist dieses bis zur Fertigkeit geübt, so wird der Lehrer darüber Fragen vorlegen. Z. B.

Welche Zahl folgt auf 7? Auf 9 folgt welche Zahl?

Da jeder Unterrichtsgegenstand nicht allein den Zweck hat, Kenntnisse zu verbreiten, sondern auch das Denkvermögen zu üben, und Sprachfertigkeit zu fördern, so wird der Lehrer dieses dadurch bewirken, daß Er auf jede seiner Fragen eine vollständige Antwort vom Schüler sich geben läßt. Die Antwort ist vollständig, wenn sie die Hauptpunkte der Frage in sich faßt, und zwar in der Ordnung der Frage. Die Antworten auf obige Fragen sind daher folgende: 8 folgt auf 7. Auf 9 folgt 10.

Zwischen 5 und 7 liegt welche Zahl? Zwischen 5 und 7 liegt 6. Welche Zahlen liegen zwischen 3 und 6? 4 und 5 liegen zwischen 3 und 6. Ferner: 9 und 1 macht welche Zahl? 9 und 1 macht 10.

So wie durch Hinzusetzung der Einheit zu einer beliebigen Zahl die nächste gebildet wurde; so kann man auch durch Hinwegnehmen der Einheit

Digitized by Google

von einer Zahl die vorhergehende erhalten. Das Hinwegnehmen gehört zwar in das folgende Kapitel, doch diese Einfache Uebung kann schon auf dieser Stufe mit den Kindern vorgenommen werden.

Ueberhaupt muß der Lehrer sich nicht strenge an die Ordnung des Buches halten, sondern durch Studium des Buches und eigenes freies Denken sich einen Plan seines Vortrages bilden und den beim Unterrichte befolgen. Also folgende Uebung

(B) ||−|=| Zwei weniger Eins ist gleich Eins. Drei weniger
|||−|=|| Eins ist gleich Zwei. Vier weniger Eins ist gleich
||||−|=||| Drei. Fünf weniger Eins ist gleich Vier. ꝛc.
|||||−|=||||
ꝛc. ꝛc.

Der naturgemäße Gang im Rechnen schreibt also dem Lehrer auf dieser Stufe folgende Uebungen mit den Schülern vor: 1) Bildung der Zahlen durch Zusammensetzung von Einheiten und Benennung der verschiedenen Vielheiten nach dem Schema unter (A); 2) Nennung der bloßen Namen der Zahlen in natürlicher Ordnung oder das Zählen; 3) das Zählen mit Ueberspringung einer Zahl; 4) das Rückwärtszählen in natürlicher Ordnung; 5) das Bilden der Zahlen aus den unmittelbar größern durch Verminderung um eine Einheit nach dem Schema (B).

Diese Uebungen werden bis zu Zahlen geführt, welche die Vorstellungskraft der Schüler nicht überschreiten.

Zweite Stufe.

Eintheilung und Bezeichnung der Zahlen.

Der Lehrer wird eine deutliche Uebersicht des Inhalts dieser Stufe erlangen, wenn zuerst die Materie derselben vorgetragen und dann eine kurze Betrachtung über den Gang des Vortrages angestellt wird. Diese Behandlungsart des Rechnens soll auch später mit gewissen Abänderungen befolgt werden.

A. Bildung der Einheiten verschiedener Ordnungen.

Ein Einer	= I	= einem Einer.
Zwei Einer	= II	= einem Zweier.
Drei Einer	= III	= einem Dreier.
Vier Einer	= IIII	= einem Vierer.
Fünf Einer	= V	= einem Fünfer.
Sechs Einer	= VI	= einem Sechser.
Sieben Einer	= VII	= einem Siebener.
Acht Einer	= VIII	= einem Achter.
Neun Einer	= VIIII	= einem Neuner.
Zehn Einer	= X	= einem Zehner.

Der Lehrer schreibt nur die lateinischen Ziffern an die Tafel, spricht dann das, was hier mit Worten ausgedrückt ist, und läßt die Kinder dasselbe nachsprechen.

Er macht die Kinder aufmerksam, daß das Zeichen für Zehn aus 5 und 5 zusammengesetzt ist, nämlich daß X = V + V = V + Λ ist.

Digitized by Google

Zwei Zehner = XX.
Drei Zehner = XXX.
Vier Zehner = XXXX.
Fünf Zehner = XXXXX = L.
Sechs Zehner = LX.
Sieben Zehner = LXX.
Acht Zehner = LXXX.
Neun Zehner = LXXXX.
Zehn Zehner = C = einem Hunderter.

Zwei Hunderter = CC.
Drei » = CCC.
Vier » = CCCC.
Fünf » = CCCCC = IↃ = D.
Sechs » = DC.
Sieben » = DCC.
Acht » = DCCC.
Neun » = DCCCC.
Zehn » = DD = M.

Zwei Tausender = MM = II.M.
Drei » = III.M.
Vier » = IIII.M.
Fünf » = V.M.
Sechs » = VI.M.
Sieben » = VII.M.
Acht » = VIII.M.
Neun » = VIIII.M.
Zehn » = X.M.

Zwei Zehntausender = XX.M.
Drei » = XXX.M.
Vier » = XXXX.M.
Fünf » = L.M.
Sechs » = LX.M.
Sieben » = LXX.M.
Acht » = LXXXM.
Neun » = LXXXX.M.
Zehn » = C.M = M̄.

Das Zeichen für fünf ist die Figur, welche der Zeigefinger mit dem Daumen macht. Er erklärt ferner:

Die Zahlen Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht und Neun werden Einer-Zahlen oder kurz Einer genannt.

Dann spricht Er weiter, indem Er zugleich an die Tafel schreibt: 2 Zehner oder zwanzig Einer ꝛc. bis zehn Zehner oder hundert Einer oder kurz ein Hunderter. Dann bemerkt Er wieder, eins, zwei, ꝛc. und neun Zehner heißen Zehner-Zahlen oder kurz Zehner.

Ferner: eins, zwei ..... und neun Hunderter heißen Hunderter-Zahlen oder kurz Hunderter.

Dann: zehn Hunderte heißen tausend Einer oder ein Tausender. Es giebt eins, zwei, drei .... und neun Tausender.

Zehn Tausender sind zehntausend Einer, oder ein Zehntausender. Darauf folgen eins, zwei, drei .... und neun Zehntausender.

Zehn Zehntausender sind einhundert Tausender oder einhunderttausend Einer oder ein Hunderttausender. Hierauf folgen eins, zwei .... und neun Hunderttausender.

Der Lehrer bemerkt, daß der Punkt zwischen der kleinern und der darauf folgenden größern Zahl bedeutet, daß so viele, als die kleinere Zahl Einheiten enthält, größere Zahlen zu einer einzigen Zahl zusammengenommen werden sollen. Z. B. L.M sind funfzig Tausender.

Die Bezeichnung der Zahlen mit lateinischen Ziffern ist in der Absicht hier gewählt, um den Kindern ein deutliches Bild von der Zusammensetzung

Digitized by Google

größerer Zahlen aus größern Einheiten (Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, ꝛc.) zu geben.

Nun ist es nothwendig, die Kinder auf das einfache Gesetz, nach welchem größere Einheiten aus kleinern gebildet werden, aufmerksam zu machen; deshalb spricht der Lehrer und läßt die Kinder nachsprechen: zehn Einer sind gleich einem Zehner: zehn Zehner sind gleich einem Hunderter; zehn Hunderter sind gleich einem Tausender; zehn Tausender sind gleich einem Zehntausender; zehn Zehntausender sind gleich einem Hunderttausender; zehn Hunderttausender sind gleich einer Million. Vorläufig gehe der Lehrer nur bis zu einer Million.

Viele Fragen sind nun den Kindern über das Gelernte vorzulegen. Z. B.

Was bilden zehn Zehner? Einen Hunderter bilden zehn Zehner.

Ein Zehner hat wie viele Einer? Ein Zehner hat zehn Einer.

Wie viele Zahlen giebt es, die Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. heißen? Neun Zahlen giebt es, die Einer, neun Zahlen, die Zehner, neun Zahlen, die Hunderter ꝛc. heißen.

Der Kürze wegen sind hier mehrere Fragen in einer verbunden, der Lehrer wird aber stets nur eine Frage an die Kinder richten, weil mehrere auf einmal sie verwirren würden.

Nun läßt der Lehrer die Einheiten verschiedener Ordnungen vor- und rückwärts nennen: Einer, Zehner, Hunderter — Tausender, Zehntausender, Hunderttausender — eine Million. Nach der Folge von drei verschiedenen Einheiten läßt der Lehrer den Schüler im Nennen etwas anhalten, was hier durch einen Strich angedeutet ist, um den Schüler im Voraus eine neue Abtheilung der Zahlen bemerken zu lassen.

Nun folgt die Bildung der Zahlen in natürlicher Ordnung durch Zusammensetzung derselben aus größern und kleinern Einheiten.

B. Bildung der Zahlen in natürlicher Ordnung durch Zusammensetzung aus den Einheiten verschiedener Ordnungen.

Der Kürze wegen bezeichne man Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. nur durch den Anfangsbuchstaben dieser Wörter, auch führe man die neun arabischen Ziffern ein, wie folgt:

Ein E. = 1	1 Z. + 1 E. = elf E.	2 Z. + 1 E. = ein und zwanzig E.
Zwei E. = 2	1 Z. + 2 E. = zwölf E.	2 Z. + 2 E. = zwei und zwanzig E.
Drei E. = 3	1 Z. + 3 E. = dreizehn E.	2 Z. + 3 E. = drei und zwanzig E.
Vier E. = 4	1 Z. + 4 E. = vierzehn E.	2 Z. + 4 E. = vier und zwanzig E.
Fünf E. = 5	1 Z. + 5 E. = funfzehn E.	2 Z. + 5 E. = fünf und zwanzig E.
Sechs E. = 6	1 Z. + 6 E. = sechszehn E.	2 Z. + 6 E. = sechs u. zwanzig E.
Sieben E. = 7	1 Z. + 7 E. = siebenzehn E.	2 Z. + 7 E. = sieben u. zwanzig E.
Acht E. = 8	1 Z. + 8 E. = achtzehn E.	2 Z. + 8 E. = acht und zwanzig E.
Neun E. = 9	1 Z. + 9 E. = neunzehn E.	2 Z. + 9 E. = neun u. zwanzig E.
Zehn E. = 1 Z.	1 Z. + 1 Z. = zwanzig E.	2 Z. + 1 Z. = dreißig E.

Digitized by Google

Aus dieſer Darſtellung wird man leicht erſehen, wie die Zahlen von dreizig bis vierzig, ꝛc. bis hundert zuſammenzuſetzen ſind.

Iſt man bis hundert gekommen, ſo wird man über das Vorgehabte viele Fragen machen. Z. B.

Drei und zwanzig, fünf und dreizig, acht und vierzig, ꝛc. beſteht aus wie vielen Zehnern und Einern? Drei und zwanzig beſteht aus zwei Zehnern und drei Einern.

Sieben Zehner und ſechs Einer machen zuſammen wie viele Einer? ꝛc.

Nun folgt die Zuſammenſetzung der Hunderter und Zehner und Auflöſung derſelben in Zehner und Einer. Der Kürze halber ſollen dieſe Uebungen hier mit Ziffern bezeichnet werden, im Unterrichte aber mit Worten ausgedrückt.

1 H. = 10 Z. = 100 E.
1 H. + 1 Z. = 11 Z. = 110 E.
1 H. + 2 Z. = 12 Z. = 120 E.
1 H. + 3 Z. = 13 Z. = 130 E.
1 H. + 4 Z. = 14 Z. = 140 E.
1 H. + 5 Z. = 15 Z. = 150 E.
1 H. + 6 Z. = 16 Z. = 160 E.
1 H. + 7 Z. = 17 Z. = 170 E.
1 H. + 8 Z. = 18 Z. = 180 E.
1 H. + 9 Z. = 19 Z. = 190 E.
1 H. + 10 Z. = 20 Z. = 200 E.

2 H. = 20 Z. = 200 E.
2 H. + 1 Z. = 21 Z. = 210 E.
2 H. + 2 Z. = 22 Z. = 220 E.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
3 H. = 30 Z. = 300 E.
3 H. + 1 Z. = 31 Z. = 310 E.
3 H. + 2 Z. = 32 Z. = 320 E.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
4 H. = 40 Z. = 400 E.
4 H. + 1 Z. = 41 Z. = 410 E.
4 H. + 2 Z. = 42 Z. = 420 E.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie weit der Lehrer dieſe Zuſammenſetzungen treibe, hängt von der Fähigkeit der Schüler ab.

Viele Fragen; hier von jeder Art nur eine. Z. B. 5 H. + 7 Z. ſind wie viele Zehner? Wie viele Einer? 64 Z. ſind wie viele H. und Z.; wie viele Einer? 850 E. ſind wie viele Z.; wie viele H. und Z.?

Auf eine ähnliche Weiſe kann man Tauſender und Hunderter zuſammenſetzen. ꝛc.

In den vorigen Uebungen wurden nur zwei verſchiedene Einheiten mit einander verbunden, nun können auch 3, 4, 5, ꝛc. mit einander vereinigt werden. Eine vollſtändige Darſtellung aller dieſer Uebungen wird nicht nothwendig ſein, weil die Kinder das Geſetz dieſer Zuſammenſetzung und Auflöſung derſelben leicht faſſen werden.

1 H. + 1 Z. + 1 E. = 111 E.
1 H. + 1 Z. + 2 E. = 112 E.
1 H. + 1 Z. + 3 E. = 113 E.
ꝛc. ꝛc.

1 H. + 2 Z. + 1 E. = 121 E.
1 H. + 2 Z. + 2 E. = 122 E.
1 H. + 2 Z. + 3 E. = 123 E.
ꝛc. ꝛc.

Wieder viele Fragen. 3 H. + 7 Z. + 8 E. ſind zuſammen wie viele E.? 452 E. ſind wie viele H., Z. und E.?

Digitized by Google

Nun kann die gewöhnliche Bezeichnung oder das Schreiben der Zahlen folgen.

C. Die Bezeichnung oder das Schreiben der Zahlen.

Zuerst müssen die verschiedenen Ordnungen der Einheiten zur Deutlichkeit gebracht werden. Daher folgende Uebung:

Ein Einer ist die Einheit der ersten Ordnung.
" Zehner " " " zweiten "
" Hunderter " " " dritten "
" Tausender " " " vierten "
" Zehntausender " " fünften "
" Hunderttausender " " sechsten "
Eine Million ist die " " siebenten "

Fragen. Z. B. ein Hunderter ist die Einheit der wie vielsten Ordnung? Wie heißt die Einheit der sechsten Ordnung?

Nun folgt eine Erklärung. Die Einheiten der verschiedenen Ordnungen erhalten im Schreiben der Zahlen verschiedene Stellen, welche von Rechts nach Links gezählt werden. Der Lehrer schreibt die Anfangsbuchstaben der Einheiten wie folgt an die Tafel: M., H.T., Z.T., T., H., Z., E. und läßt nun sprechen: «An der ersten Stelle stehen die Einer; an der zweiten Stelle stehen die Zehner; an der dritten Stelle stehen die Hunderter; ꝛc.» Dann ferner: «Die Einer stehen an der ersten Stelle; die Zehner stehen an der zweiten Stelle; die Hunderter stehen an der dritten Stelle.» ꝛc.

Nun schreibt der Lehrer Ziffern an die verschiedenen Stellen unter die Buchstaben, und läßt die Kinder die Zahlen der verschiedenen Einheiten nennen

M.	H.T.	Z.T.	T.	H.	Z.	E.
9	1	2	5	8	7	3
1	3	5	7	8	2	4
2	6	8	1	3	6	7

Die verschiedenen Einheiten der ersten wagerechten Reihe sind: drei E., sieben Z., acht H., fünf T., zwei Z.T., ein H.T., und neun Millionen.

Nun läßt der Lehrer die Buchstaben an den verschiedenen Stellen fort, schreibt beliebige Zahlen an die Tafel, läßt zuerst die Stellen benennen, z. B. 25 «Einer, Zehner»; 437 «Einer, Zehner, Hunderter», ꝛc. dann die Einheiten und ihre Zahlen nennen, z. B. 26 sind 6 E. und 2 Z., 568 sind 8 E., 6 Z. und 5 H., ꝛc. Darauf läßt er die Zahlen nur in Einern angeben, z. B. 23 heißt drei und zwanzig Einer; denn 2 Z. sind zwanzig Einer und drei Einer sind drei und zwanzig E. 375 ist drei hundert fünf und siebenzig; denn 3 H. = drei hundert E.; 7 Z. sind = siebenzig und fünf E. sind zusammen ꝛc.

Recht viele Uebungen sind dieser Art vorzunehmen.

Nun kann die Einführung der Null folgen. Der Lehrer braucht wieder das obige Schema mit Buchstaben; z. B.

Digitized by Google

M., H.T., Z.T., T., H., Z., E. Frage: was steht an der Tafel?
4 6 Antwort: 4 Hundert 6 E.

Der Lehrer fährt fort: »wenn die Buchstaben nicht ständen, und ich 4 H. und 6 E. schreiben wollte, wie könnte ich das wohl machen?« Schreibe ich: 46, so heißt das: sechs und vierzig, schreibe ich die Ziffern weiter von einander entfernt, so kann sich ein Anderer, der die Zahl sieht, und nicht weiß, was ich mir für eine Zahl denke, entweder mehrere Stellen dazwischen denken, oder er kann jede Ziffer als eine besondere Zahl nehmen; also als 4 E. und 6 E.

Die Einer stehen an der ersten, die Hunderter an der dritten Stelle, und an der zweiten Stelle stehen keine Zehner; diesen Mangel der Einheiten an einer Stelle deutet man durch dieses Zeichen: 0 an, und nennt es eine Null; daher ist unsere Zahl diese: 406.

Was sind foegende Zahlen 507, 830, 2805, 3980, 4082?

Die erste besteht aus 5 H., keine Z., und 7 E.; die zweite hat 8 H., 3 Z. und keine E. ꝛc.

Wenn also Einheiten an Stellen fehlen, so setzt man an jede dieser Stellen eine Null. Woraus bestehen folgende Zahlen 500, 3080, 7009, 1000, 20 800, 10 000, 100 000, 1 000 000?

Der Lehrer lasse jede vielstellige Zahl zu je 3 und 3 Stellen schreiben, so daß zwischen den 3 ersten und den folgenden Stellen ein Zwischenraum etwa für eine Ziffer übrig bleibe; also 4 395; 28 705; 336 089; 4 508 652; durch diese Absonderung je dreier Stellen von einander wird die Uebersicht der Zahlen erleichtert, und das übliche Komma zu diesem Zwecke entbehrlich gemacht.

Haben die Schüler dieses gehörig begriffen, so kann der Lehrer entweder jetzt oder später gelegentlich im Schreiben der Zahlen, wie folgt, weiter gehen.

Die Zahlen werden in Klassen eingetheilt; zu jeder Klasse gehören 6 Stellen einer Zahl; die ersten 6 Stellen einer Zahl bilden die erste Klasse oder die Klasse der Einer; die zweiten 6 Stellen bilden die zweite Klasse oder die Klasse der Millionen; die dritten 6 Stellen einer Zahl bilden die dritte Klasse oder die Klasse der Billionen; die vierten 6 Stellen einer Zahl bilden die vierte Klasse oder die Klasse der Trillionen; die fünften 6 Stellen bilden die fünfte Klasse oder die Klasse der Quadrillionen; die sechsten 6 Stellen bilden die sechste Klasse oder die Klasse der Quintillionen; die 6 folgenden Stellen bilden die siebente Klasse oder die Klasse der Sextillionen. ꝛc.ꝛc.

Die Namen der auf einander folgenden Klassen sind also diese: Einer, Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quintillionen, Sextillionen, Septillionen, Octillionen, Nonillionen, Decillionen ꝛc.

Digitized by Google

Hieraus ersieht man, daß jede Klasse nach ihrer kleinsten Einheit benannt wird; die höhern Einheiten jeder Klasse werden nach einem und demselben Gesetze gebildet, welches dieses ist:

1te Klasse: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender.

2te Klasse: Millionen, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 Millionen.

3te Klasse: Billionen, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 Billionen.

4te Klasse: Trillionen, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 Trillionen.

2c. 2c. 2c. 2c. 2c. 2c. 2c. 2c.

Um also eine geschriebene Zahl aussprechen zu können, theilt man sie von der rechten zur linken Hand zu je 6 Stellen ein; so erfährt man dadurch, wie viele Klassen sie enthält, und zu welcher Klasse ihre höchsten Stellen gehören, z. B. 25 789 803 768 350 805 078 709 351. Diese Zahl hat 4 vollständige Klassen, welche Einer, Millionen, Billionen, Trillionen sind, und von der folgenden 5ten Klasse, also der Quadrillionen, hat sie noch die beiden ersten Stellen, also noch die Einer und Zehner Quadrillionen; daher heißt die Zahl in Worten: fünf und zwanzig Quadrillion, sieben hundert neun und achtzig tausend acht hundert und drei Trillionen, sieben hundert acht und sechszig tausend drei hundert funfzig Billionen, acht hundert fünf tausend und acht und siebenzig Millionen, sieben hundert neun tausend drei hundert und ein und funfzig.

Dritte Stufe.

Das Zusammenzählen oder die Addition.

Schon auf den beiden vorhergehenden Stufen wurden Zahlen addirt oder zu einer neuen Zahl zusammengesetzt, doch dies geschah bisher unter gewissen Beschränkungen; nun folgt die Addition ohne alle Einschränkung, jedoch, wie es sich von selbst versteht, nur das Zusammenzählen ganzer Zahlen.

Zwei Zahlen zusammenzählen oder addiren heißt eine Zahl finden, die so viele Einheiten hat, als die beiden Zahlen, welche addirt werden sollen, zusammen haben. Die Zahlen, welche zu einer neuen Zahl verbunden werden, heißen Summanden; die Zahl, welche den Summanden zusammengenommen gleich ist, die Summe.

Anmerk. Hält es der Lehrer für rathsam, so mag Er den Kindern, welche noch kein Latein gelernt haben, die fremden Ausdrücke in folgender Art erklären. Addiren kommt von dem lateinischen Worte addere her; addo heißt wörtlich ich thue Etwas zu einem Andern hinzu; daher addere oder mit deutscher Endung addiren hinzuthun. Summe stammt ab von Summa, d. h. die Hauptsache oder das Ganze; summiren oder latein. summare einzelne Dinge, die zusammen gehören, zu einem Ganzen verbinden; Summandus ist eins der Dinge, welche zu einem Ganzen vereinigt werden sollen. Die obigen Erklärungen sind den Kindern auf dieser Stufe zu geben; es bleibt aber gleichgiltig an welcher Stelle, ob zu Anfange, am Ende oder in der Mitte dieser Uebungen.

Digitized by Google

Der Hauptzweck des Addirens ist der, daß die Kinder eine Fertigkeit erlangen, kleinere Einheiten zu größern zu verbinden; also Einer zu Zehnern, Zehner zu Hundertern, Hunderter zu Tausendern, ꝛc. Da aber die Einheiten höherer Ordnungen nach einem und demselben Gesetze aus Einheiten niederer Ordnungen zusammengesetzt werden; so wird man diesen Zweck dadurch am leichtesten erreichen, daß man ganz vorzüglich die Kinder übt, Einer zu Zehner zu verbinden. Nach diesen kurzen Bemerkungen wird man den Zusammenhang nachfolgender Uebungen leicht übersehen.

I. Zusammenzählen ohne Bezeichnung der Zahlen oder Kopfrechnen.

A. Addition der Einer.

1+1=2	1+6=7	Gesprochen: 1 und 1 ist gleich 2; 1 und
1+2=3	1+7=8	2 ist gleich 3; ꝛc.
1+3=4	1+8=9	Viele Fragen!
1+4=5	1+9=10	
1+5=6		

2+1= 3	oder 1+2= 3	2+2= 4	1+3= 4	3+1= 4
2+2= 4	2+2= 4	4+2= 6	2+3= 5	3+3= 6
2+3= 5	3+2= 5	6+2= 8	3+3= 6	3+5= 8
2+4= 6	ꝛc. ꝛc.	8+2=10	4+3= 7	3+7=10
2+5= 7	1+2= 3		5+3= 8	3+9=12
2+6= 8	3+2= 5	3+2= 5	6+3= 9	3+2= 5
2+7= 9	5+2= 7	7+2= 9	7+3=10	3+4= 7
2+8=10	7+2= 9	4+2= 6	8+3=11	3+6= 9
2+9=11	9+2=11	8+2=10	9+3=12	3+8=11

Wie man in diesen Uebungen zuerst 1, dann 2, dann 3 zu den Einern in natürlicher Ordnung, dann mit Ueberspringung einer Zahl, hinzugesetzt hat, so wird man 4, 5, 6, 7, 8 und 9 zu den Einern hinzuzählen. Nach jeder einzelnen Uebung sind den Kindern viele Fragen vorzulegen.

Nun wird der Lehrer den Schülern die Summe zweier Zahlen geben, und die Summanden suchen lassen.

Welche zwei Zahlen betragen zusammen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10?

1+1	betragen zusammen 2	1+9	betragen zusammen 10
1+2	» » 3	2+8	» » 10
2+1	» » 3	3+7	» » 10
1+3	» » 4	4+6	» » 10
2+2	» » 4	5+5	» » 10
3+1	» » 4	6+4	» » 10
ꝛc.	ꝛc.	7+3	» » 10
		8+2	» » 10
		9+1	» » 10

Digitized by Google

Besonders wichtig für das Nachfolgende ist die Kenntniß der Zahlen, welche zusammen 10 ausmachen; daher viele Fragen über diese Uebung, z. B. welche Zahl und 3 macht 10? 4 und welche Zahl ist gleich 10? ꝛc.

B. Addition der Einer zu Zahlen, welche Zehner und Einer enthalten.

In dieser Uebung wird man Einer zu solchen Zahlen hinzusetzen, deren Summe der Einer kleiner als ein Zehner, dann gleich einem Zehner, und endlich größer als ein Zehner ist.

1) Die Summe der Einer ist kleiner als ein Zehner.

Zu 15, 21, 36, 47, 52, 64, 78, 83, 94 hinzugesetzt 1 giebt wie viel?

Setzt man 2 zu 17, 25, 33, 41, 52, 64, 76, 84, 96 hinzu, so erhält man welche Zahl?

3 und 14, 26, 31, 42, 55, 62, 75, 84, 96 beträgt wie viel?

So wird der Lehrer 4, 5, 6, 7 und 8 zu Zahlen addiren lassen.

Der Lehrer läßt die Schüler die Aufgaben so schreiben, wie sie hier gegeben sind, ihre Beantwortung kann aber nach folgendem Schema gefertigt werden, z. B. für folgende Frage: welche Zahlen erhält man, wenn man 4 zu 13, 25, 34, 41, 54, 63, 52, 60, 73, 85, 93 hinzusetzt?

$13 + 4 = 17$
$25 + 4 = 29$
$34 + 4 = 38$
$41 + 4 = 45$
$54 + 4 = 58$
ꝛc. ꝛc.

Der Lehrer gewinnt an Zeit, wenn er die Aufgaben in der oben gegebenen Form schreibt und schreiben läßt, und die Schüler gewinnen an Uebersicht ihrer Rechnung, wenn sie in Beantwortung der Frage beistehende Form beobachten. Sehr belebend ist der Unterricht, wenn man jeden Schüler nur eine Antwort auf diese vielen Fragen geben läßt.

2) Die Summe der Einer ist gleich einem Zehner.

Aus dem Vorstehenden wird der Lehrer die Art der Fragen ersehen.

1 und 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99 betragen wie viel?

2 zu 18, 48, 68, 78, 28, 58, 88, 98, 38 hinzugesetzt, giebt wie viel?

Zu 17, 77, 97, 47, 57, 37, 67, 87, 27 die Zahl 3 hinzugesetzt, giebt welche Zahl?

Eben so lasse der Lehrer 4, 5, 6, 7, 8 und 9 zu Zahlen bis 100 addiren und die Rechnung in obiger Form darstellen.

3) Die Summe der Einer ist größer als ein Zehner.

2 und 19, 59, 89, 49, 69, 39, 99, 29, 79 ist wie viel?

Die Summe von 3 und 18, 29, 59, 38, 48, 69, 78, 88 ist wie groß?

4 und 17, 29, 38, 48, 57, 68, 79, 89 giebt welche Zahl als Summe?

Die Summe der Einer beider Zahlen soll größer als 10 sein; diese Bedingung läßt für die Addition der 2 und die Einerzahl 9, für 3 die beiden 8 und 9, für 4 die 3 Zahlen 7, 8, 9, für 5 die Zahlen 6, 7, 8 und 9. ꝛc.

Digitized by Google

Hieraus ersieht der Lehrer die Wahl der Einer seiner Aufgaben.

Setzt man 9 zu 18, 27, 36, 45, 54, 62, 78, so erhält man welche Zahl?

Auflösung des letzten Beispiels. Setzt man 9 zu 78, so erhält man 87. Denn 78 = 7 Z. + 8 E.; 9 E. + 8 E. = 17 E. = 1 Z. + 7 E.; also 9 + 78 = 7 Z. + 1 Z. + 7 E. Aber 7 Z. + 1 Z. = 8 Z. = 80 E. und dazu noch 7 E. giebt zusammen 87 E. oder 87.

Solche Auflösungen müssen geschrieben und auch im Kopfe gemacht werden.

Nun können Einer zu Zahlen gesetzt werden, ohne Rücksicht darauf, daß die Summe der Einer kleiner, eben so groß oder größer als ein Zehner sei.

4) Addition der Einer zu beliebigen Zahlen.

Setzt man jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 zu jeder folgender Zahlen 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 und 91, so erhält man welche und wie viele Zahlen? Diese vielfache Aufgabe stellt sich am besten in folgendem Täfelchen dar.

	19	28	37	46	55	64	73	82	91
1	20	29	38	47	56	65	74	83	92
2	21	30	39	48	57	66	75	84	93
3	22	31	40	49	58	67	76	85	94
4	23	32	41	50	59	68	77	86	95
5	24	33	42	51	60	69	78	87	96
6	25	34	43	52	61	70	79	88	97
7	26	35	44	53	62	71	80	89	98
8	27	36	45	54	63	72	81	90	99
9	28	37	46	55	64	73	82	91	100

Es giebt 81 Zahlen, deren jede die Summe von zwei gegebenen Zahlen ist. Die Summen, welche man erhält, indem man zu jeder Zahl 1 hinzusetzt, stehen in der zweiten wagrechten Reihe. ꝛc. Es wird vortheilhaft sein, die Einer nicht in natürlicher Ordnung hinzusetzen zu lassen, weil dann die Summen auch nicht in natürlicher Ordnung auf einander folgen, welches im gegenwärtigen Täfelchen stattfindet.

C. Addition solcher Zahlen, welche aus Zehnern und Einern bestehen.

Zuerst wird man nur Zehner zu Zehnern, dann Zehner zu Zehnern und Einern, und endlich Zehner und Einer zu Zehnern und Einern hinzusetzen.

Digitized by Google

1) Addition der Zehner.

2 Zehner zu 3, 5, 7, 9, 4, 6, 8 Zehnern hinzugesetzt, giebt welche Zahlen?

3 Zehner und 4, 8, 9, 3, 5, 7 Zehner betragen wie viel?

3 Zehner und 9 Zehner betragen 12 Z. oder 120 E. Denn 3 Z. + 9 Z. = 12 Z. Nun bestehen 12 Z. aus 10 Z. und 2 Z.; 10 Z. sind = 1 Hunderter oder = 100 E., und 2 Z. sind = 20 E.; daher sind 12 Z. = 120 E.; also betragen 3 Z. + 9 Z. 120 E.

Setzt man 40 zu 50, 60, 90, 70, 80 hinzu, so erhält man wie viel? 40 + 90 = 130. Denn 40 sind 4 Z., 90 sind 9 Z.; 4 + 9 = 13, also ist auch 4 Z. + 9 Z. = 13 Z. = 10 Z. + 3 Z. = 100 E. + 30 E. = 130 E.

Für das Kopfrechnen ist es hinlänglich bis zu folgenden Aufgaben zu gehen: 90 und 10, 50, 70, 20, 40, 60, 30, 80, 90 betragen wie viele Einer? Z. B. 90 + 80 = 170 E. Denn 90 = 9 Z., 80 = 8 Z.; 9 Z. + 8 Z. = 17 Z. Weil 9 Z. + 1 Z. = 10 Z., und 8 Z. = 1 Z. + 7 Z. Aber 17 Z. = 10 Z. + 7 Z. 10 Z. = 1 H. = 100 E. und 7 Z. = 70 E.; also sind 90 + 80 = 170 E.

Solche Auflösungen, wie die letzte, sind viele theils im Kopfe, theils schriftlich, wie hier geschehen, zu üben.

2) Addition der Zehner zu Zehnern und Einern.

10 und 17, 38, 49, 65, 23, 56, 78, 84, 93 ist wie viel?

Auflösung der letzten Aufgabe. 10 = 10 E. = 1 Z.; 93 = 90 + 3.; 90 = 90 E. = 9 Z.; 1 Z. + 9 Z. = 10 Z. = 1 H. = 100 E.; dazu kommen von 93 noch 3 E., das macht zusammen 103 E. = 103.

Die Addition der 10 zu andern Zahlen ist sehr zu üben.

20 und 15, 39, 66, 84, 27, 43, 59, 71, 98 sind wie viel?

Aehnliche Aufgaben über Addition der 30, 40, 50, 60, 70, 80 und 90 zu andern Zahlen bis 100 wird jeder Lehrer leicht geben können.

3) Addition der Zehner und Einer zu Zehnern und Einern.

Zu Anfange wird man darauf sehen, daß die Summe der Einer nicht mehr als einen Zehner betrage, dann ohne diese Rücksicht.

13 zu jeder folgender Zahlen 12, 43, 64, 81, 92, 24, 35, 76 hinzugesetzt, giebt welche Summe?

Auflösung des letzten Beispiels. 13 + 76 = 89. Denn 13 = 1 Z. + 3 E.; 76 = 7 Z. + 6 E.; nun ist 1 Z. + 7 Z. = 8 Z. = 80 E. und 3 E. + 6 E. = 9 E.; also ist 13 + 76 = 89.

25 und 42, 51, 63, 74, 82 giebt welche Summen?

Setzt man 34 zu 52, 84, 61, 75, 92, so erhält man welche Zahlen?

Wenn man jede folgender Zahlen 17, 25, 39, 48, 52, 63, 79, 84, 96 zu jeder nachfolgenden 15, 28, 36, 47, 56, 64, 75, 87, 98 hinzusetzt, so erhält man welche Summen?

Digitized by Google

Diese vielfache Aufgabe ist eine solche, welche entweder zur Beschäftigung einer Abtheilung der Schüler (wenn mehrere Abtheilungen in einer Klasse von einem Lehrer unterrichtet werden sollen) oder zu einer häuslichen Arbeit der Schüler dienen kann. Bei Ertheilung von Aufgaben hat der Lehrer besonders darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Kinder so wenig als nur möglich schreiben; denn dadurch gewinnt Er 1) an Zeit, weil die Kinder in diesem Alter sehr langsam schreiben; 2) weil die Kinder bei wenigem Schreiben gut und richtig schreiben können, giebt Er ihnen keine Veranlassung, unleserlich und falsch zu schreiben, und Er kann von ihnen mit Strenge verlangen, daß sie die Aufgaben seinem Wunsche gemäß aufzeichnen; 3) übt Er dadurch die Kinder im Kombiniren, welches eine Thätigkeit des Geistes ist, die nicht allein den Scharfsinn und Witz fördert, sondern auch zu den sinnreichsten und nützlichsten Erfindungen geführt hat.

Die letzte Aufgabe kann entweder in Form eines Täfelchens wie früher oder in folgender Art behandelt werden:

17 + 15 = 32
17 + 28 = 45
17 + 36 = 53
17 + 47 = 64
17 + 56 = 73
17 + 64 = 81
17 + 75 = 92
17 + 87 = 104
17 + 98 = 115

Eben so können die übrigen Fälle behandelt werden. In diesem Werkchen kann nicht jede Aufgabe vollständig beantwortet werden, weil es sonst zu dickleibig werden, und dadurch den Zweck verfehlen würde, den dieses und ähnliche Rechenbücher erreichen sollen. Denn es soll dem Lehrer eine deutliche Uebersicht des Ganges im Rechnen und eine gründliche Behandlung desselben und dem vorgerückten Schüler im Rechnen eine gute Anleitung dazu geben und zwar bei geringem Preise des Buches.

Auflösung folgender Aufgabe: 96 und 98 ist wie viel?
96 = 9 Z. + 6 E., 98 = 9 Z. + 8 E.; nun sind 9 Z. + 9 Z. = 18 Z.; 6 E. + 8 E. = 14 E. = 1 Z. + 4 E.; jene 18 Z. + 1 Z. = 19 Z. = 10 Z. + 9 Z. = 1 H. + 9 Z. = 100 E. + 90 E. = 190 E.; dazu kommen noch die übrigen 4 E., das macht zusammen 194 E. oder kurz = 194; also ist 96 + 98 = 194.

Aehnliche Auflösungen viele im Kopfe und in dieser Art schriftlich von einzelnen Schülern unter Anleitung des Lehrers und ohne Hilfe von fähigen Schülern an der Tafel behandelt.

4) Addition solcher Zahlen, welche einen Hunderter übersteigen.

Nur wenige Uebungen mit nicht zu großen Zahlen und mit fähigen Schülern können hier vorgenommen werden.

Wenn man 78 zu 195, 286, 352, 469 hinzusetzt, so erhält man welche Summen?

Zu jeder von folgenden Zahlen 168, 237, 364, 459, 593 soll jede folgende: 195, 288, 324, 499 hinzugesetzt werden, so erhält man welche Summen?

Digitized by Google

Auflösung des letzten Beispiels.

$593 = 5\,H. + 9\,Z. + 3\,E.$
$499 = 4\,H. + 9\,Z. + 9\,E.$
} also ist $593 + 499 = 9\,H. + 18\,Z. + 12\,E.$

Nun sind $12\,E. = 1\,Z. + 2\,E.$, also $18\,Z. + 12\,E. = 19\,Z. + 2\,E.$ $= 1\,H. + 9\,Z. + 2\,E.$ und dazu $9\,H.$ giebt $10\,H. + 9\,Z. + 2\,E. =$ $1\,T. + 9\,Z. + 2\,E. = 1092.$

Auflösung folgender Aufgabe: $867 + 969$ betragen wie viel?

$867 = 8\,H. + 6\,Z. + 7\,E.$
$969 = 9\,H. + 6\,Z. + 9\,E.$
$867 + 969 = 17\,H. + 12\,Z. + 16\,E.$
$= 18\,H. + 3\,Z. + 6\,E.$
$= 1\,T. + 8\,H. + 3\,Z. + 6\,E.$
$= 1836.$

Der Lehrer stelle fragend solche kurze Auflösungen an der Tafel dar, und lasse solche auch die Schüler machen; denn auf diese Weise bahnt er sich den Weg zur schriftlichen Addition.

Ueberhaupt hat der Lehrer bei allen Auflösungen auf Kürze zu sehen, daß die Kinder also nur das Wesentliche in ihrer Auflösung vorbringen; denn dadurch werden sie im logischen Denken geübt.

II. Schriftliche Addition.

Jeder Lehrer wird von selbst darauf kommen, die Schüler anfänglich nur 2, dann 3, 4, 5 ꝛc. Zahlen addiren zu lassen; daher soll hier nur ein Beispiel behandelt werden, und dieses um so mehr, weil jeder Lehrer in dieser Weise der Addition eine hinlängliche Kenntniß besitzt.

3 854	Die Summanden werden unter einander so geschrieben, daß
27 369	die gleich hohen Stellen eine senkrechte Reihe bilden; unter
873	die letzte Zahl macht man einen wagrechten Strich zur Ab-
495 628	sonderung der Summe von den Summanden, und schreibt
1 579 486	die Summe so unter diesen Strich, daß auch ihre gleich
2 107 210	vielsten Stellen senkrecht unter den gleich vielsten Stellen der Summanden stehen.

Darauf addirt man nur gleichartige Zahlen, also nur Einer, dann nur Zehner, dann nur Hunderter, nur Tausender ꝛc., und beginnt die Addition mit denjenigen Zahlen, welche Einheiten der niedrigsten Ordnung enthalten, von diesen geht man zu Zahlen höherer Einheiten. Da die Summation jeder senkrechten Kolumne im Kopfe geschieht, so übersieht man sogleich die Zahl der Einheiten der eben addirten Kolumne, und die Zahl der zunächst höhern Einheiten; jene Zahl setzt man unter die zuletzt addirte Reihe, diese zählt man sofort (ohne sie irgendwo schriftlich anzumerken) zu den Zahlen der nächstfolgenden Kolumne. ꝛc. Anwendung der allgemeinen Regel auf gegenwärtiges Beispiel. Die Summe der Einer ist $= 30\,E.$ oder $= 3\,Z. + 0\,E.$ Die 0 Einer schreibt man unter den wagrechten Strich an die Stelle der

Digitized by Google

Einer, und zählt nun sogleich diese 3 Z. und die übrigen Zehner zusammen, dieses giebt 31 Zehner oder 3 H. und 1 Z.; den 1 Z. schreibe ich nun in der Summe an die Stelle der Zehner, und nehme die 3 H. zu den übrigen Hundertern, und erhalte 32 Hunderter, das sind 3 T. und 2 H., die 2 H. setze ich an die Stelle der Hunderter, und addire nun diese 3 T. zu den übrigen Tausendern. ꝛc.

Anmerk. Am Schlusse der Addition kann der Lehrer den Schülern den Satz: daß Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt, Gleiches giebt, oder Gleiches addirt, giebt Gleiches, verdeutlichen und zwar nur durch einige kleine Beispiele

2 = 2
3 = 3
also 5 = 5

Solche allgemein bekannten Grundsätze der Mathematik fassen die Kinder leicht, und der Lehrer bereitet sie dadurch unvermerkt zum Verständnisse von Beweisen der Arithmetik vor, welche doch später folgen müssen, wenn die Schüler nicht alles auf Treu' und Glauben des Lehrers annehmen sollen.

Zweites Kapitel.

Das Bilden der Differenzen durch Subtraktion.

Subtraktion (subtractio) kommt her von subtrahiren, und dieses von dem lateinischen Worte **subtrahere** entziehen, hinwegnehmen.

Eine Zahl von einer andern hinwegnehmen heißt eine Zahl finden, welche mit der ersten zusammengenommen der zweiten gleich ist.

Die Zahl, welche von einer andern hinweggenommen wird, heißt der Subtrahendus (wörtlich: die hinwegzunehmende Zahl); die Zahl, welche um eine andere Zahl vermindert wird, heißt der Minuendus (die Zahl, welche verkleinert werden soll). Die Zahl, welche nebst dem Subtrahendus gleich dem Minuendus ist, heißt der Ueberschuß der größern über die kleinere Zahl, oder der Unterschied beider Zahlen (nämlich des Minuendus und des Subtrahendus), oder die Differenz oder der Rest. (Differentia der Unterschied, restat es ist übrig, es bleibt zurück.)

In diesem Kapitel ist nicht nothwendig eine so genaue Stufenfolge im Rechnen als im vorigen zu beobachten, weil die Addition der Subtraktion bedeutend vorgearbeitet hat; doch wird man zuerst kleine und dann immer größere Zahlen hinwegnehmen lassen; also zuerst nur Einer, dann nur Zehner, dann Einer und Zehner, ꝛc.

I. Das Subtrahiren der Zahlen ohne Bezeichnung oder im Kopfe.

A. Subtraktion der Einer von andern Zahlen.

Es ist hier zuerst darauf Rücksicht zu nehmen, daß Einer von Einern, ohne Zuziehung eines Zehners, hinweggenommen werden können, dann

Digitized by Google

Einer von Zehnern, endlich Einer von Einern mit Hilfe eines Zehners subtrahirt.

1) Einer von Einern ohne Zuziehung eines Zehners subtrahirt.

Welche Zahlen erhält man zum Reste, wenn man 1 von jeder folgenden Zahl 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8; 11, 12, 14, 16, 17, 19, 18, 15, 13; ꝛc. hinwegnimmt?

1 — 1 = 0
3 — 1 = 2
5 — 1 = 4
7 — 1 = 6
9 — 1 = 8
ꝛc. ꝛc.

Der Lehrer erklärt zuerst, daß der wagrechte Strich zwischen zwei Zahlen weniger bedeutet (**minus**), und zwar daß die Zahl, welche hinter dem Striche steht, von der vor dem Striche hinweggenommen werden soll.

Beschäftiget der Lehrer die ganze Klasse auf einmal, so kann Er den Kindern Fragen vorlegen, und sie von einzelnen Schülern beantworten lassen, dies ist aber ein sehr seltener Fall bei kleinen Kindern; am häufigsten hat Er mehrere Abtheilungen, und dann ist es am zweckdienlichsten, der Abtheilung, welche nicht unmittelbar unterrichtet wird, die Aufgabe, oder vielmehr nur die Zahlen an die Tafel zu schreiben, damit die Kinder sie abschreiben, sie die Aufgabe wiederholen und dann sie für sich rechnen zu lassen. Kommt Er dann zu dieser Abtheilung, so läßt Er jeden Schüler eine oder mehrere Fragen (besonders von einem zerstreuten Schüler zur Aufmunterung) beantworten.

Was bleibt übrig, wenn man 2 von 9, 6, 8, 5, 3; 13, 18, 17; 25, 24, 28, 26, 29; ꝛc. hinwegnimmt?

Wenn man 3 von 4, 7, 9; 13, 15, 16, 18; 24, 28, 26; 37, 39, 35; ꝛc. subtrahirt, so erhält man welche Zahlen?

Die Aufgaben über Subtraktion der 4, 5, 6, 7, 8, 9 von andern Zahlen wird der Lehrer nach den obigen leicht bilden können. Hier müssen sie der Kürze wegen übergangen werden.

2) Einer von Zehnern subtrahirt.

Wenn man jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 von jeder folgenden 10, 30, 50, 70, 90, 80, 60, 40, 20 subtrahirt, so erhält man welche Reste?

	10	30	50	70	90	80	60	40	20
1	9	29	49	69	89	79	59	39	19
2	8	28	48	68	88	78	58	38	18
3	7	27	47	67	87	77	57	37	17
4	6	26	46	66	86	76	56	36	16
5	5	25	45	65	85	75	55	35	15
6	4	24	44	64	84	74	54	34	14
7	3	23	43	63	83	73	53	33	13
8	2	22	42	62	82	72	52	32	12
9	1	21	41	61	81	71	51	31	11

oder 10 — 1 = 9
30 — 1 = 29
50 — 1 = 49
ꝛc. ꝛc.

10 — 2 = 8
30 — 2 = 28
50 — 2 = 48
ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

Sollen die Schüler obige Aufgabe in Form des umseitigen Täfelchens beantworten, so dürfen auch die Einer nicht in natürlicher Ordnung, sondern sie müssen zerstreut gegeben werden, weil sonst die Schüler die Rechnung sich bequem machen.

3) Einer von Einern mit Hilfe eines Zehners subtrahirt.

Welche Zahlen bleiben übrig, wenn man 2 von 11, 21, 31, ꝛc.; 3 von 12, 21, 32, ꝛc.; 4 von 41, 52, 63, 72, ꝛc.; 5 von 14, 23, 32, 41, ꝛc.; 6 von 15, 24, 33, 42, 51, ꝛc.; 7 von 13, 25, 32, 44, 56, ꝛc.; 8 von 17, 25, 33, 41, 52, 64, 76, ꝛc.; 9 von 16, 28, 34, 52, 61, 73, 85, 97 subtrahirt?

Darstellung der letzten Frage.

16 — 9 = 7
28 — 9 = 19
34 — 9 = 25
52 — 9 = 43
61 — 9 = 52
73 — 9 = 64
85 — 9 = 76
97 — 9 = 88

Auflösungen. 1) 16 besteht aus 1 Z. und 6 E., 9 aus 6 E. und 3 E.; soll man also 9 von 16 subtrahiren, so wird man von 16 zuerst 6 E. und dann noch 3 E. hinwegnehmen. 16 — 6 = 10, und 10 — 3 = 7; also ist 16 — 9 = 7.

2) 28 besteht aus 2 Z. + 8 E., 9 aus 8 E. + 1 E.; nun ist 28 — 8 = 20, weil 8 E. durch Subtraktion 8 E. aufheben; von 20 oder 2 Z. hat man noch 1 E. hinwegzunehmen; aber 2 Z. = 1 Z. + 1 Z., und nimmt man den 1 E. von 1 Z. hinweg, so bleiben von demselben noch 9 E.; also ist der ganze Rest 1 Z. + 9 E. = 19 E.; daher ist 28 — 9 = 19.

3) 34 = 3 Z. + 4 E., 9 = 4 E. + 5 E.; 34 — 4 = 30 = 3 Z. = 2 Z. + 1 Z., und 1 Z. — 5 E. = 5 E.; also ist 34 — 9 = 2 Z. + 5 E. = 25.

Anfangs werden die Auflösungen ausführlich, dann immer kürzer behandelt.

B. Subtraktion der Einer und Zehner von andern Zahlen.

Zu Anfange kann man darauf sehen, daß die Zahl der Zehner des Subtrahendus kleiner als die des Minuendus sei, dann ohne diese Rücksicht.

1) Die Zahl der Zehner des Subtrahendus ist kleiner als die Zahl der Zehner des Minuendus.

Welche Reste erhält man, wenn man jede der Zahlen 18, 27, 35, 43, 51, 62, 74, 86 von 98 hinwegnimmt?

98 — 18 = 80
98 — 27 = 71
98 — 35 = 63
ꝛc. ꝛc.

Auflös. des letzten Beispiels. 98 — 86 = 12; denn 98 = 9 Z. + 8 E., 86 = 8 Z. + 6 E.; 9 Z. — 8 Z. = 1 Z., und 8 E. — 6 E. = 2 E.; also ist 98 — 86 = 1 Z. + 2 E. = 12.

Man soll jede der Zahlen 19, 27, 35, 43, 52, 64, 76, 88 von 96 hinwegnehmen, so erhält man welche Reste?

Digitized by Google

$96-19=77$ Aufl. $96=9\,\text{Z.}+6\,\text{E.}=7\,\text{Z.}+6\,\text{E.}+2\,\text{Z.}$;
$96-27=69$ aber $2\,\text{Z.}-19\,\text{E.}=1\,\text{E.}$; also ist $96-19=7\,\text{Z.}$
$96-35=61$ $+6\,\text{E.}+1\,\text{E.}=7\,\text{Z.}+7\,\text{E.}=77.$
ꝛc. ꝛc.

2) Die Zahl der Zehner des Subtrahendus ist größer als die Zahl der Zehner des Minuendus.

Man soll 87 von jeder folgender Zahlen 100, 115, 124, 136, 142 ꝛc. subtrahiren, so erhält man welche Reste?

$100-87=13$ Aufl. $142=14\,\text{Z.}+2\,\text{E.}$; $87=8\,\text{Z.}+7\,\text{E.}$
$115-87=28$ Damit man die 7 E. des Subtrahendus von den Einern
$124-87=37$ des Minuendus hinwegnehmen könne, nehme man zu den
$136-87=49$ 2 Einern noch einen Zehner, so ist $142=13\,\text{Z.}+12\,\text{E.}$
$142-87=55$ Nun ist $12\,\text{E.}-7\,\text{E.}=5\,\text{E.}$, und $13\,\text{Z.}-8\,\text{Z.}=$
ꝛc. ꝛc. $5\,\text{Z.}$; also ist $142-87=5\,\text{Z.}+5\,\text{E.}=55.$

Es wird nicht nothwendig sein, mehr Aufgaben dieser Art zu geben, jeder Lehrer wird leicht ähnliche Aufgaben bilden können. Weder Addition noch Subtraktion können bis zu einem hohen Grade der Fertigkeit auf einmal geübt werden, sondern diese kann erst nach und nach erreicht werden, was auch geschieht, weil diese Rechnungsarten im Verlaufe sehr oft wiederkehren; daher wird es hier genügen, wenn die Schüler eine deutliche Vorstellung von dem Verfahren und eine Sicherheit in Anwendung desselben haben. Auch ist es rathsam, nicht große (weit über Hundert gehende) Zahlen, sondern meistens Zahlen unter Hundert von einander zu subtrahiren.

Der Lehrer lasse die Schüler bemerken, daß der Subtrahendus und der Rest zusammen stets gleich dem Minuendus ist.

Ferner: von der Summe zweier Zahlen die eine derselben hinweggenommen, läßt zum Reste die andere; z. B. $8+9-8=9$; $8+9-9=8$.

Gleiches von Gleichem subtrahirt, läßt Gleiches.

Z. B. $\left.\begin{matrix}8=8\\5=5\end{matrix}\right\}$; so ist $8-5=8-5=3$; $\left.\begin{matrix}12=5+7\\7=\ \ 7\end{matrix}\right\}$; so ist $12-7=5$, $5+7-7=5$; also ist $12-7=5+7-7=5$.

Nun kann man zur schriftlichen Subtraktion übergehen.

II. Schriftliche Subtraktion.

Wie zur Addition, so schreibt man auch die Zahlen zur Subtraktion so unter einander, daß die gleichhohen Stellen in senkrechter Richtung stehen; darauf subtrahirt man die Zahlen von Einheiten gleichhoher Ordnungen von einander; gewöhnlich setzt man den Subtrahendus unter den Minuendus, es kann aber auch umgekehrt geschehen.

Man soll 35 852 von 167 984 subtrahiren.

Digitized by Google

167 984
35 852
132 132

Erläuterung des Verfahrens. Man beginnt die Subtraktion mit den Einheiten der niedrigsten Ordnung. 2 E. von 4 E. subtrahirt läßt 2 E., die man unter den wagrechten Strich an die Stelle der Einer setzt. 5 Z. von 8 Z. hinweggenommen, läßt 3 Z., welche im Reste an die Stelle der Zehner geschrieben werden. ꝛc.

Welchen Rest erhält man, wenn man 264 789 von 452 325 hinwegnimmt?

4.5.2. 3.2.5
2 6 4 7 8 9
1 8 7 5 3 6
4 5 2 3 2 5

9 E. lassen sich nicht von 5 E. hinwegnehmen, daher nimmt man 1 Z. zu Hilfe; diesen verwandelt man in Einer und nimmt die 5 E. dazu, das sind 15 E. — 9 E. = 6 E., welche man an die Stelle der Einer im Reste schreibt. Zum Zeichen, daß man eine Zahl des Minuendus um eine Einheit dieser Zahl vermindert hat, setzt man rechtsunten an diese Zahl einen Punkt. An der Stelle der Zehner im Minuendus stehen also jetzt nicht mehr 2, sondern nur 1 Z. Zu diesem Zehner nimmt man 1 H. dazu, das sind zusammen 11 Z. — 8 Z. = 3 Z. An der Stelle der Hunderter sind also nur noch 2 H. im Minuendus, dazu 1 T., giebt 12 H. — 7 H. = 5 H. Zu dem 1 T. im Minuendus 1 Z.T. genommen, giebt 11 T. — 4 T. = 7 T. 6 Z.T. soll man nun von 4 Z.T. hinwegnehmen, da dieses nicht geschehen kann, so nimmt man zu den 4 Z.T. im Minuendus 1 H.T., das sind zusammen 14 Z.T., und 14 Z.T. — 6 Z.T. = 8 Z.T. Endlich 3 H.T. — 2 H.T. = 1 H.T.; daher ist der Rest 187 536.

Zur Prüfung der Richtigkeit der Rechnung addire man Subtrahendus und Rest, so muß diese Summe gleich dem Minuendus sein; ist solches nicht, so hat man einen Rechnungsfehler entweder in der Subtraktion, oder in der Addition oder in beiden Rechnungen begangen.

Von 7. 2.38 7.2.0 soll man 2 365 448 subtrahiren.

2 3 6 5 4 4 8
4 8 7 3 2 7 2

8 E. lassen sich nicht von 0 E. hinwegnehmen, deshalb nimmt man 8 E. von 1 Z. = 10 E., welches 2 E. giebt. ꝛc.

Von 569 8.0.3 subtrahirt 234 569, giebt welchen Rest?

234 5 6 9
335 2 3 4

Um 9 E. von den Einern des Minuendus hinwegnehmen zu können, müßte man 1 Z. zu Hilfe nehmen; da aber keine Zehner vorhanden sind, so muß man 1 H. nehmen; diesen Hunderter verwandelt man in Zehner, 1 H. = 10 Z., davon nimmt man 1 Z., also bleiben noch 9 Z.; diese 9 Z. denkt man sich an der Stelle der Zehner des Minuendus verbleibend, und subtrahirt nun 9 E. von 13 E., das giebt 4 E.; dann 6 Z. von 9 Z., das sind 3 Z. ꝛc.

Von 3. 28.4 7.0.0 soll 1 365 354 subtrahirt werden.

1 3 6 5 3 5 4
1 9 1 9 3 4 6

Dieses Beispiel ist ähnlich dem vorigen, nur anstatt der 3 E. stehen hier 0 E.

Digitized by Google

Von 15. 8.0.6. 0.0.4 subtrahirt 8 987 867, giebt welchen Rest?

8 9 8 7 8 6 7
6 8 1 8 1 3 7

Zu den 4 E. des Minuendus nehme man 1 Z.; da aber die Zehner fehlen, so nehme man 1 H.; auch die Hunderter sind nicht vorhanden, so nehme man 1 T. = 10 H.; von diesen Hundertern 1 H. genommen, bleiben 9 H. an der Stelle der Hunderter. Der genommene Hunderter = 10 Z., davon 1 Z. genommen, so bleiben 9 Z. an der Stelle der Zehner. Nun subtrahirt man 7 E. von 14 E. bleiben 7 E., 6 Z. von 9 Z. bleiben 3 Z., 8 H. von 9 H. bleibt 1 H., 7 T. von 15 T. bleiben 8 T., 8 Z.T. von 9 Z.T. bleibt 1 Z.T., 9 H.T. von 17 H.T. bleiben 8 H.T., 8 M. von 14 M. bleiben 6 M.

Von 1. 0̊.0̊.0̊. 0̊.0.0 soll man 795 863 hinwegnehmen.

7 9 5 8 6 3
2 0 4 1 3 7

Da die erste Zahl im Minuendus 1 Million ist, so verwandelt man sie in 10 H.T., läßt 9 H.T. an der Stelle der Hunderttausender, und macht den 1 H.T. zu Z.T., 1 H.T. = 10 Z.T., läßt wieder 9 Z.T. an der Stelle der Zehntausender, verwandelt den 1 Z.T. in Tausender, denkt sich wieder 9 T. an der Stelle der Tausender, 9 H. an der Stelle der Hunderter, 9 Z. an der Stelle der Zehner, und nimmt nun 3 E. von 1 Z. = 10 E., das giebt 7 E. Ferner 9 Z. — 6 Z. = 3 Z., 9 H. — 8 H. = 1 H., 9 T. — 5 T. = 4 T., 9 Z.T. — 9 Z.T. = 0 Z.T., 9 H.T. — 7 H.T. = 2 H.T.

Wenn also im Minuendus an einer Stelle eine Null mit einem Punkte rechts unten steht, so hat man sich immer an derselben Stelle 9 Einheiten zu denken.

Diese behandelten Beispiele enthalten das Wesentliche der schriftlichen Subtraktion; viele Aufgaben müssen zu einer gewissen Fertigkeit führen.

Drittes Kapitel.

Vergleichung der Zahlen zur Bildung arithmetischer Verhältnisse und Proportionen.

Ἀριθμός (wörtlich das Zusammengepaßte) die Zahl; *ἀριθμητική* die Rechenkunst.

Ein Verhältniß zweier Zahlen ist eine gewisse Beziehung der einen auf die andere in Rücksicht einer Zahl.

Um die Beziehungen zweier Zahlen auf einander kennen zu lernen, ist es nothwendig, dieselben mit einander zu vergleichen. Die Vergleichung der Zahlen mit einander führt auf die Vorstellung von gleichen und ungleichen Zahlen, und eine der ungleichen Zahlen ist entweder größer oder kleiner als die andere. **Die Zahl, um welche eine Zahl größer oder kleiner als eine andere ist, heißt der Unterschied oder die Differenz beider Zahlen.**

Digitized by Google

Man wird daher in diesem Kapitel folgende Stufen zu beobachten haben: 1) Entwickelung der Begriffe von gleichen und ungleichen Zahlen, von der größern und kleinern Zahl, von dem Unterschiede derselben; 2) Entwickelung des Begriffs von einem Verhältnisse; 3) Entwicklung des Begriffs gleicher Verhältnisse oder einer Proportion.

I. Von gleichen und ungleichen Zahlen und deren Unterschied.

A. Ueber gleiche Zahlen.

Eins = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, d. h. 5 hat eben so viele Einheiten als 5, oder allgemein: jede Zahl ist gleich sich selbst.

1 + 2 = 3, d. h. 1 + 2 hat eben so viele Einheiten als 3 Einheiten hat.
2 + 3 = 5, d. h. 2 + 3 " " " " " " 5 " "
4 + 5 = 9, d. h. 4 + 4 " " " " " " 9 " "
2c. 2c. 2c. 2c.

Allgemein: die Summe zweier Zahlen ist beiden Summanden zusammengenommen gleich.

2 — 1 = 1, d. h. 2 weniger 1 hat eben so viele Einheiten als 1 Einheiten hat.
5 — 2 = 3, d. h. 5 " 2 " " " " " " 3 " "
8 — 4 = 4, d. h. 8 " 4 " " " " " " 4 " "
12 — 7 = 5, d. h. 12 " 7 " " " " " " 5 " "
2c. 2c. 2c. 2c.

Allgemein: die Zahl der Einheiten des Minuendus um die Zahl der Einheiten des Subtrahendus vermindert, läßt eben so viele Einheiten, als der Rest Einheiten hat; oder der Minuendus weniger dem Subtrahendus ist gleich dem Reste.

B. Ueber ungleiche Zahlen und deren Unterschied.

Die Zahl 5 = 3 + 2, d. h. 5 hat nicht allein 3, sondern auch noch 2 Einheiten; daher sagt man: 5 hat mehr Einheiten als 3 Einheiten hat, oder 5 ist größer als 3, und 3 ist kleiner als 5.

7 hat mehr Einh. als 6 Einh. hat, oder 7 ist größer als 6, u. 6 ist kleiner als 7.
8 " " " " 4 " " " 8 " " " 4, " 4 " " " 8.
9 " " " " 8 " " " 9 " " " 8, " 8 " " " 9.
10 " " " " 7 " " " 10 " " " 7, " 7 " " " 10.
11 " " " " 6 " " " 11 " " " 6, " 6 " " " 11.
12 " " " " 5 " " " 12 " " " 5, " 5 " " " 12.
2c. 2c. 2c. 2c. 2c. 2c.

Allgemein: die Zahl, welche mehr Einheiten als eine andere hat, ist größer als die andere Zahl; und die Zahl, welche weniger Einheiten als eine andere hat, ist kleiner als die andere.

Welche Zahlen sind größer als 3, 5, 7, 9, 14, 18, 25, 2c.?

Welche Zahlen sind kleiner als 2, 4, 6, 8, 12, 17, 24, 36, 2c.?

Digitized by Google

Um anzuzeigen, daß eine Zahl größer als eine andere ist, braucht man dieses Zeichen $>$, die Oeffnung dieses Winkels wird stets nach der größern und die Spitze nach der kleinern Zahl gerichtet; $5 > 2$ heißt also: 5 ist größer als 2; $3 < 5$ heißt: 3 ist kleiner als 5.

$4 > 3$ heißt 4 ist größer als 3; $1 < 2$ heißt 1 ist kleiner als 2.
$6 > 5$ » 6 » » » 5; $2 < 4$ » 2 » » » 4.
$13 > 7$ » 13 » » » 7; $3 < 6$ » 3 » » » 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie viele Zahlen giebt es, die größer als 7, 8, 9, 10, ꝛc. sind?

Antwort: jede auf 7 folgende Zahl, also 8, 9, 10, 20, 30, ꝛc. ist größer als 7; es giebt also unzählige Zahlen, deren jede größer als 7 ist.

Wie viele Zahlen giebt es, die kleiner als 2, 4, 6, 8, 10, ꝛc. sind?

Nur eine Zahl giebt es, die kleiner als 2 ist, und die ist 1; 3 Zahlen giebt es, deren jede kleiner als 4 ist, und diese sind 1, 2, 3. ꝛc.

Allgemein: so viele Zahlen giebt es, deren jede kleiner als eine gegebene ist, wie viele Einheiten diese letzte um 1 vermindert hat.

10 hat wie viele Einheiten mehr als 7? 10 hat 3 Einheiten mehr als 7.
11 » » » » » » 6? 11 » 5 » » » 6.
12 » » » » » » 8? 12 » 4 » » » 8.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

5 ist um wie viel mehr als 3? 5 ist um 2 mehr als 3.
6 » » » » » » 2? 6 » » 4 » » 2.
7 » » » » » » 4? 7 » » 3 » » 4.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

12 ist um wie viel mehr als 2, 4, 6, 8, 10? 15 ist um wie viel mehr als 3, 5, 7, 9, 13? ꝛc.

8 ist um wie viel weniger als 10? 8 ist um 2 weniger als 10.
9 » » » » » » 12? 9 » » 3 » » 12.
10 » » » » » » 17? 10 » » 7 » » 17.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

13 ist um wie viel weniger als 12, 14, 18, 24? 18 ist um wie viel weniger als 20, 26, 36, 45? ꝛc.

Anstatt mehr kann man auch sagen größer, und anstatt weniger sagt man auch kleiner?

9 ist um wie viel größer als 7? 9 ist um 2 größer als 7.
10 » » » » » » 6? 10 » » 4 » » 6.
11 » » » » » » 8? 11 » » 3 » » 8.
12 » » » » » » 5? 12 » » 7 » » 5.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

20 ist um wie viel größer als 1, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18?

Digitized by Google

Die Beantwortung durch Zeichen.

$20 \overset{19}{>} 1$, d. h. 20 ist um 19 größer als 1;

$20 \overset{15}{>} 5$, d. h. 20 » » 15 » » 5;

$20 \overset{13}{>} 7$, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$20 \overset{11}{>} 9$,

$20 \overset{10}{>} 9$,

$20 \overset{7}{>} 13$,

ꝛc. ꝛc.

Es versteht sich von selbst, daß der Lehrer eine große Menge ähnlicher Beispiele geben, und die Schüler in nebenstehender Form die Beantwortung darstellen lassen wird.

2 ist um wie viel kleiner als 3, 5, 8, 10, 14, 16, ꝛc.

$2 \overset{1}{<} 3$, d. h. 2 ist um 1 kleiner als 3.

$2 \overset{3}{<} 5$, d. h. 2 » » 3 » » 5.

$2 \overset{6}{<} 8$, d. h. 2 » » 6 » » 8.

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Erklärung. Die Zahl, um welche eine Zahl größer oder kleiner als eine andere ist, heißt der Unterschied oder die Differenz der Zahlen.

Wie groß ist der Unterschied zwischen 1 und 2, 3 und 7, 4 und 10, 5 und 12, 6 und 18, 7 und 14, 8 und 3, 9 und 4, 10 und 6, 11 und 9, 12 und 4, ꝛc.

1 ist der Unterschied zwischen 1 und 2; 12 ist der Unterschied zwischen 6 und 18.

4 » » » » 3 » 7; 7 » » » » 7 » 14.

6 » » » » 4 » 10; 5 » » » » 8 » 3.

7 » » » » 5 » 12; 5 » » » » 9 » 4.

ꝛc. ꝛc.

Wenn der Unterschied zweier Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. ist, welches sind die Zahlen?

Da für jeden Unterschied unzählige Paare Zahlen vorhanden sind, so läßt der Lehrer jeden Schüler nur eine Antwort geben.

Wenn der Unterschied zweier Zahlen 1 ist, so können die Zahlen 8 und 9, 10 und 11, ꝛc. sein. Wenn der Unterschied zweier Zahlen 2 ist, so können die Zahlen 1 und 3, 2 und 4, 3 und 5, ꝛc. sein.

Man hat hier 3 Zahlbegriffe: größere Zahl, kleinere Zahl, und Unterschied derselben; sind 2 von ihnen gegeben, so kann die dritte gefunden werden. Dieses ist nun den Kindern durch Beispiele zu verdeutlichen, und zwar ungefähr folgender Art.

Man hat die Zahlen 5 und 7; welche ist die größere, welche die kleinere, welches der Unterschied? 7 ist die größere, 5 die kleinere Zahl, und 2 der Unterschied beider Zahlen.

Wie findet man den Unterschied der Zahlen? Indem man 5 von 7 hinwegnimmt; denn $7 - 5 = 2$.

Digitized by Google

Der Unterschied zweier Zahlen ist also gleich der größern weniger der kleinern. Erster Satz.

Wie kann man 7 aus den beiden Zahlen 5 und 2 finden? Wenn man 5 und 2 addirt, so erhält man 7; denn $5+2=7$.

Die größere Zahl, 7, ist also gleich der kleinern Zahl, 5, nebst dem Unterschiede, 2; oder allgemein: die größere zweier Zahlen ist gleich der kleinern nebst dem Unterschiede beider. Zweiter Satz.

Kann man wohl die Zahl 5 aus den beiden Zahlen 7 und 2 berechnen?

5 ist gleich 7 weniger 2; allgemein: die kleinere zweier Zahlen ist gleich der größern weniger ihrem Unterschiede. Dritter Satz.

Die kleinere zweier ungleichen Zahlen ist 8, 12, 13, 17, 23, 35, 46 ꝛc., ihr Unterschied 3, welches ist die größere Zahl?

15 ist um 3, 4, 6, 9, 12 kleiner als welche Zahl?

Ist die kleinere Zahl 8, der Unterschied 3, so ist die größere Zahl $8+3=11$.
» » » » 12, » » 3, » » » » $12+3=15$.
» » » » 13, » » 3, » » » » $13+3=16$.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die kleinere zweier Zahlen ist 18, ihr Unterschied 4, 6, 9, 10, 15 ꝛc., welches ist die größere Zahl?

Wenn die größere zweier ungleichen Zahlen 12, 28, 34, 45, 56, ꝛc., und ihr Unterschied 7 ist, welches ist die kleinere Zahl?

Ist die größere Zahl 12, ihr Unterschied 7, so ist die kleinere Zahl $12-7=5$.
» » » » 28, » » 7, » » » » $28-7=21$.
» » » » 34, » » 7, » » » » $34-7=27$.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die größere Zahl ist 64, ihr Unterschied 8, 13, 27, 32, 48, ꝛc., welches ist die kleinere Zahl? 16, 24, 35, 42, 54 ist um 6 größer als welche Zahl?

Welches ist der Unterschied zwischen 2 und 2, 3 und 3, 4 und 4, 5 und 5, ꝛc.?

Der Unterschied zweier gleichen Zahlen ist also Null, d. h. die Zahlen haben keinen Unterschied, oder sie unterscheiden sich durch Nichts von einander und deswegen sind sie einander gleich; und umgekehrt: wenn der Unterschied zweier Zahlen Null ist, so müssen sie einander gleich sein.

II. Ueber arithmetische Verhältnisse.

Zuerst hat der Lehrer die Schüler mit dem Ausdrucke: »verhalten« bekannt zu machen, welches in folgender Weise geschehen kann. Der Lehrer spricht:

5 verhält sich so zu 7, daß 5 um 2 kleiner als 7 ist.
9 » » » » 12, » 9 » 3 » » 12 »
14 » » » » 19, » 14 » 5 » » 19 »

Digitized by Google

16 verhält sich so zu 13, daß 16 um 3 größer als 13 ist.
18 » » » » 15, » 18 » 3 » » 15 »
20 » » » » 12, » 20 » 8 » » 12 »
&c. &c. &c. &c. &c.

Viele Fragen. Wie verhält sich 3 zu 9, 8 zu 2, 10 zu 19, 13 zu 7, &c.? Die Antworten werden in obiger Art gegeben.

Der Lehrer erklärt: die Vergleichung zweier Zahlen mit einander in Rücksicht ihres Unterschiedes heißt ein Verhältniß. Die Zahlen, welche in einem Verhältnisse betrachtet werden, heißen Glieder des Verhältnisses. Das Glied, welches zuerst genannt wird, heißt das Vorderglied, dasjenige, welches auf das Vorderglied folgt, heißt das Hinterglied.

Ein Verhältniß hat wie viele Glieder? In dem Verhältnisse 5 zu 7 ist welches das Vorderglied? welches das Hinterglied?

Der Lehrer spricht vorläufig nur von Verhältnissen, weil die Schüler auf dieser Stufe den Unterschied zwischen arithmetischen und geometrischen Verhältnissen noch nicht fassen können.

Der Unterschied zwischen den Gliedern eines Verhältnisses heißt der Verhältnißunterschied, kurz so bezeichnet V.U.

Welches ist der V.U. in den Verhältnissen 3 zu 7, 5 zu 12, 8 zu 6, 9 zu 8, 15 zu 12, &c.?

Der V.U. in dem Verhältnisse 3 zu 7 ist 4, und zwar ist das V.Gl. 3 um 4 kleiner als das H.Gl. 7.

Aehnlich werden die übrigen Fragen beantwortet.

Ist in einem Verhältnisse das Vorderglied kleiner als sein Hinterglied, so heißt das Verhältniß ein steigendes; ist das Vorderglied größer als sein Hinterglied, so heißt es ein fallendes Verhältniß.

In steigenden Verhältnissen ist das Vorderglied 5, 8, 12, 16, 19 &c., der V.U. 6, welches ist das Hinterglied?

In einem steigenden Verhältnisse ist also das Hinterglied stets gleich dem Vorderglied und dem V.U. zusammengenommen?

In einem fallenden Verhältnisse ist das Vorderglied 10, 14, 18, 25, 36, &c., der V.U. 8, welches ist das Hinterglied?

In einem fallenden Verhältnisse ist also das Hinterglied stets gleich dem Vorderglied vermindert um den V.U.

Ein Verhältniß bezeichnet man so, daß man zwischen seine Glieder einen wagrechten Strich setzt. Manche setzen noch oberhalb und unterhalb dieses Striches einen Punkt, dieses ist aber überflüssig.

$3 - 5$ oder $3 \div$ heißt: 3 verhält sich zu 5.

Wie verhält sich 5 zu 7, 9 zu 4, 8 zu 12, 10 zu 3, 12 zu 14, &c.?

Digitized by Google

5 — 7 so, daß $5 \overset{2}{<} 7$ ist, d. h. 5 verhält sich so zu 7, daß 5 um 2 kleiner als 7 ist.

9 — 4 so, daß $9 \overset{5}{>} 4$ ist, d. h. 9 verhält sich zu 4 so, daß 9 um 5 größer als 4 ist.

III. Ueber arithmetische Proportion.

Wenn man mehrere Verhältnisse hat, z. B. 3 — 5, 4 — 7, 6 — 9, so nennt man die Vorderglieder derselben gleichnamige (homologe) und auch die Hinterglieder gleichnamige Glieder; die Vorderglieder obiger Verhältnisse 3, 4, 6 sind also gleichnamige oder homologe Glieder, und eben so sind die Hinterglieder dieser Verhältnisse, 5, 7, 9, gleichnamige Glieder.

Wie verhalten sich die Glieder folgender Verhältnisse: 2 — 5, 4 — 7, 8 — 11, 9 — 12, 13 — 16, 15 — 18, 17 — 20, 19 — 22, ꝛc.?

2 — 5 so, daß $2 \overset{3}{<} 5$;
4 — 7 so, daß $4 \overset{3}{<} 7$;
8 — 11 so, daß $8 \overset{3}{<} 11$;
ꝛc. ꝛc.

Alle diese Verhältnisse nennt man gleiche Verhältnisse.

Welche Verhältnisse werden also gleiche Verhältnisse genannt?

Solche Verhältnisse werden gleiche Verhältnisse genannt, deren Vorderglieder um gleiche Zahlen kleiner als ihre Hinterglieder sind.

Wie verhalten sich die Glieder folgender Verhältnisse: 6 — 2, 9 — 5, 12 — 8, 14 — 10, 17 — 13, 22 — 18, 27 — 23, 28 — 24, ꝛc.?

6 — 2 so, daß $6 \overset{4}{>} 2$;
9 — 5 so, daß $9 \overset{4}{>} 5$;
12 — 8 so, daß $12 \overset{4}{>} 8$;
ꝛc. ꝛc.

Auch diese Verhältnisse werden gleiche Verhältnisse genannt.

In gleichen Verhältnissen müssen also die Vorderglieder um gleiche Zahlen entweder kleiner oder größer als ihre Hinterglieder sein. Welche Verhältnisse sind daher einander gleich, oder welche Verhältnisse werden gleiche Verhältnisse genannt?

Solche Verhältnisse, deren Vorderglieder um gleiche Zahlen entweder größer oder kleiner als ihre Hinterglieder sind, heißen gleiche Verhältnisse.

Wenn zwei Verhältnisse einander gleich sind, und das Vorderglied des ersten Verhältnisses um 8 kleiner als sein Hinterglied ist; wie müssen die Glieder des andern Verhältnisses beschaffen sein?

Ist aber in zwei gleichen Verhältnissen das V.Gl. des ersten Verhältnisses um 7 größer als sein Hinterglied, was folgt daraus in Bezug auf die Glieder des andern Verhältnisses?

Wie sind die V.V. gleicher Verhältnisse?

Digitized by Google

Durch Beantwortung dieser Fragen werden die Schüler zeigen, ob sie die richtige Bedeutung gleicher Verhältnisse gefaßt haben. Darauf läßt der Lehrer jeden Schüler gleiche Verhältnisse nennen, und die übrigen dieselben mit Angabe des Grundes beurtheilen. Dann nennt der Lehrer ein Verhältniß, und läßt jeden Schüler ein Verhältniß angeben, das dem gegebenen gleich ist. Z. B. Welche Verhältnisse sind gleich dem Verhältnisse 7 — 12? Dem Verhältnisse 15 — 9 sind welche Verhältnisse gleich?

Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt eine Proportion.

Anmerk. Proportion kommt her von proportio, und dieses ist zusammengesetzt aus pro und portio; portio ist wieder abgeleitet von pars ein Theil, ein Stück; pro für, auch nach, oder in Ansehung, nach Beschaffenheit, gemäß; proportio das Ebenmaß, d. h. wie in dem einen zweier zusammengehörigen Dinge die einzelnen Theile zusammengefügt sind, so müssen auch in dem andern Dinge die einzelnen Theile zu einander gefügt sein.

Zur Bezeichnung der Gleichheit zweier Verhältnisse braucht man das bekannte Gleichheitszeichen; also 5 — 7 = 9 — 11 ist eine Proportion und wird so gelesen: 5 verhält sich so zu 7, wie sich 9 zu 11 verhält; oder 5 verhält sich zu 7, wie sich 9 zu 11 verhält; oder wie sich 5 zu 7 verhält, so verhält sich 9 zu 11.

Eine Proportion besteht aus wie vielen Verhältnissen, enthält wie viele Glieder?

Sind 3 Glieder einer Proportion gegeben, so kann man das fehlende berechnen.

A. Die drei ersten Glieder einer Proportion sind gegeben, das vierte Glied wird gesucht.

3 — 7 = 9 — welcher Zahl? Aufl. Im ersten Verhältnisse ist das V.G. um 4 kleiner als sein H.G., daher muß auch im andern Verhältnisse das V.G. um 4 kleiner als sein H.G. sein. Es ist nun die kleinere Zahl 9, der Unterschied 4; daher ist die größere Zahl 9 + 4 = 13; also ist 3 — 7 = 9 — 13.

15 — 8 = 23 — welcher Zahl? Aufl. Im ersten Verhältnisse ist das V.G. um 7 größer als sein H.G.; also muß auch im andern Verhältnisse das V.G. um 7 größer als sein H.G. sein. Die größere Zahl ist also 23, der Unterschied 7; daher ist die kleinere Zahl 23 — 7 = 16; also ist 15 — 8 = 23 — 16.

In der ersten Aufl. wurde die größere, in der andern die kleinere Zahl gesucht, diese findet man nach dem zweiten und dritten Satze des dritten Kap. B. Viele ähnliche Aufgaben mit Auflösungen. Die gesuchte Zahl pflegt man durch x zu bezeichnen, daher folgende Proportionen:

1) 5 — 13 = 8 — x. 4) 17 — 31 = 28 — x. 7) 64 — 75 = 84 — x.
2) 9 — 2 = 37 — x. 5) 32 — 48 = 24 — x. 8) 73 — 58 = 69 — x.
3) 27 — 45 = 16 — x. 6) 47 — 35 = 52 — x. 9) 85 — 98 = 58 — x.

Das 4te Glied vorstehender Proportionen ist 16, 30, 34, 42, 40, 40, 95, 54, 71.

Digitized by Google

B. Das dritte Glied wird gesucht.

11 — 19 = welche Zahl — 45? Aufl. Im ersten Verhältnisse ist das V.G. um 8 kleiner als sein H.G.; daher muß auch im andern Verhältnisse das V.G. um 8 kleiner als sein H.G. sein. Diese Aufgabe ist also auf folgende gebracht: welche Zahl ist um 8 kleiner als 45; folglich ist die gesuchte Zahl = 45 — 8 = 37; daher die Proportion 11 — 19 = 37 — 45.

24 — 15 = x — 72. Aufl. Das V.G. des ersten Verhältnisses ist um 9 größer als sein H.G., also muß auch das V.G. des andern Verhältnisses um 9 größer als sein H.G. 72 sein; folglich ist das gesuchte Glied = 72 + 9 = 81; daher die Proportion 24 — 15 = 81 — 72.

1) 17 — 31 = x — 43.
2) 25 — 13 = x — 28.
3) 53 — 71 = x — 59.
4) 32 — 19 = x — 26.
5) 47 — 63 = x — 58.
6) 84 — 48 = x — 73.
7) 96 — 108 = x — 112.
8) 98 — 69 = x — 87.

Das 3te Glied dieser Proportionen ist 29, 40, 41, 39, 42, 109, 100, 116.

C. Das zweite Glied wird gesucht.

23 — x = 65 — 83. Aufl. Das VG. des zweiten Verhältnisses ist um 18 kleiner als sein H.G., so muß auch im ersten Verhältnisse das V.G. um 18 kleiner als sein H.G. sein; also ist das gesuchte Glied = 23 + 18 = 41; daher ist die Proportion 23 — 41 = 65 — 83.

52 — x = 84 — 67. Aufl. Das V.G. des zweiten Verhältnisses ist um 17 größer als sein H.G., so muß auch das V.G. des ersten Verhältnisses um 17 größer als sein H.Gl. sein; also ist das gesuchte Glied = 52 — 17 = 35, und die Proportion 52 — 35 = 84 — 67.

1) 14 — x = 35 — 49.
2) 48 — x = 63 — 42.
3) 55 — x = 13 — 48.
4) 31 — x = 39 — 24.
5) 77 — x = 66 — 95.
6) 39 — x = 92 — 59.
7) 13 — x = 34 — 67.
8) 46 — x = 28 — 19.
9) 74 — x = 57 — 75.

Das 2te Glied dieser Prop. ist 28, 27, 90, 16, 106, 6, 46, 37, 92.

D. Das erste Glied wird gesucht.

x — 33 = 47 — 58. Aufl. Das V.G. des zweiten Verhältnisses ist um 11 kleiner als sein H.G., so muß auch das V.G. des ersten Verhältnisses um 11 kleiner als sein H.Gl. sein; also ist das gesuchte Glied = 33 — 11 = 22, und die Prop. 22 — 33 = 47 — 58.

x — 37 = 84 — 27. Aufl. Das V.G. des zweiten Verhältnisses ist um 57 größer als sein H.G., so muß auch das V.G. des ersten Verhältnisses um 57 größer als sein H.G. sein; also ist das gesuchte Glied = 37 + 57 = 94, und die Prop. 94 — 37 = 84 — 27.

1) x — 18 = 27 — 32.
2) x — 35 = 42 — 33.
3) x — 50 = 25 — 50.
4) x — 14 = 41 — 13.
5) x — 22 = 23 — 27.
6) x — 38 = 39 — 19.
7) x — 45 = 54 — 63.
8) x — 36 = 36 — 18.
9) x — 32 = 43 — 56.

Das erste Glied obiger Prop. ist 13, 44, 25, 42, 18, 58, 36, 54, 19

Digitized by Google

E. Eigenschaften arithmetischer Proportionen.

In jeder Proportion ist die Summe des ersten und vierten Gliedes (der äußern Glieder) gleich der Summe des zweiten und dritten Gliedes (der innern Glieder).

Denn die Proportion ist entweder eine steigende oder eine fallende.

1) Beweis für eine steigende Proportion. In einer steigenden Prop. ist jedes Hinterglied gleich seinem Vorderglied nebst dem V.U.; daher ist das 2te Glied = dem 1ten Gliede + V.U.; das 4te Glied ist = dem 3ten Gliede + V.U. Folglich ist

das 1te + 4ten Gliede = dem 1ten + 3ten Gliede + V.U.,

das 2te + 3ten Gliede = dem 1ten Gliede + V.U. + 3ten Gliede.

Nun besteht sowohl die erste als die zweite Summe aus 3 Zahlen, nämlich dem 1ten und 3ten Gliede und dem V.U., also aus denselben Zahlen; daher sind beide Summen einander gleich, d. h. das 1te + dem 4ten Gliede = dem 2ten + 3ten Gliede.

2) Beweis für eine fallende Proportion. In einer fallenden Prop. ist jedes Vorderglied gleich seinem Hinterglied nebst dem V.U.; also ist das 1te Glied = dem 2ten Gliede + V.U., dazu das 4te Glied, so ist das 1te + 4ten Gliede = dem 2ten + dem 4ten Gliede + V.U. Erste Summe. Das 3te Glied ist = dem 4ten Gliede + V.U., dazu das 2te Glied, so ist das 2te + 3ten Gliede = dem 2ten + dem 4ten Gliede + V.U. Zweite Summe. Die erste und zweite Summe bestehen aus denselben Zahlen; daher sind beide Summen einander gleich.

Wer von den Schülern diesen Beweis nicht fassen kann, der muß von der Richtigkeit des Satzes durch Beispiele überzeugt werden.

Man kehrt ein Verhältniß um, wenn man sein H.G. zum V.G., und dieses zum H.G. macht. Z. B. 5 — 8 umgekehrt ist 8 — 5.

Kehrt man jedes Verhältniß einer Proportion um, so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. 2 — 5 = 3 — 6 umgekehrt 5 — 2 = 6 — 3.

Man verwechselt die Glieder einer Proportion, wenn man die Vorderglieder zu einander und die Hinterglieder zu einander in Verhältniß setzt.

Wenn man die Glieder einer Proportion verwechselt, so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. 4 — 7 = 5 — 8, verwechselt 4 — 5 = 7 — 8.

Wenn man zu den Gliedern des einen Verhältnisses einer Proportion gleiche Zahlen addirt, oder zu den gleichnamigen Gliedern gleiche Zahlen addirt, so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. 3 — 7 = 5 — 9, 3 + 6 — (7 + 6) = 5 — 9, 3 + 6 — 7 = 5 + 6 — 9, oder 3 — (7 + 8) = 5 — (9 + 8).

Wenn man von den Gliedern des einen Verhältnisses einer Prop., oder von den gleichnamigen Gliedern gleiche Zahlen

Digitized by Google

subtrahirt, so erhält man wieder eine Prop. Wenn man die gleichvielsten Glieder zweier oder mehrerer Proportionen addirt, so erhält man wieder eine Proportion.

Z. B. $1-2=3-4$
$5-7=8-10$
$\overline{6-9=11-14}$

Aus dem Satze, daß die Summe der äußern Glieder einer Proportion gleich der Summe der innern ist, ergiebt sich ein anderes Verfahren, zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende zu berechnen.

Zweiter Abschnitt.

Vervielfältigung, Theilung und Vergleichung der Zahlen.

Erstes Kapitel.

Bildung der Vielfachen und Produkte durch Multiplikation.

I. Kopfrechnen.

A. Multiplikation der Einer durch Einer.

Es kann nicht als bekannt der Ausdruck: «mal» vorausgesetzt werden, daher muß derselbe auf irgend eine Weise den Kindern verdeutlicht werden.

Um 2 zu erhalten, muß man 2 einmal nehmen, und 2 einmal genommen ist $= 2$. Will man $2+2$ haben, so muß man 2 einmal und noch einmal oder ein- und einmal oder 2mal nehmen; nun ist $2+2=4$; also ist 2 2mal genommen $= 4$. Soll man $2+2+2$ haben, so hat man 2 einmal und einmal und einmal oder ein- und ein- und einmal oder 3mal zu nehmen; aber $2+2+2=6$; daher ist 2 3mal genommen $=6$.

Anstatt zu sagen: «2 3mal genommen», sagt man auch kurz: 3 mal 2. Für das Wort «mal» braucht man ein einfaches Zeichen, nämlich ein liegendes Kreuz $\times$, oder noch einfacher einen Punkt. Daher ist:

1 mal 2 $= 1\times2 = 1.2 = 2.$
2 mal 2 $= 2\times2 = 2.2 = 2+2 = 4.$
3 mal 2 $= 3\times2 = 3.2 = 2+2+2 = 6.$
4 mal 2 $= 4\times2 = 4.2 = 2+2+2+2 = 8.$
5 mal 2 $= 5\times2 = 5.2 = 2+2+2+2+2 = 10.$
6 mal 2 $= 6\times2 = 6.2 = 2+2+2+2+2+2 = 12.$
7 mal 2 $= 7\times2 = 7.2 = 2+2+2+2+2+2+2 = 14.$

Digitized by Google

8 mal 2 = 8×2 = 8.2 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 16.
9 mal 2 = 9×2 = 9.2 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 18.
10 mal 2 = 10×2 = 10.2 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 20.

Der Lehrer verweile so lange bei den Vielfachen von 2, bis wenigstens die Mehrzahl der Schüler die Produkte auswendig weiß; die schwächern müssen sie außerhalb des Unterrichts auswendig lernen. Die obige Darstellung schreibt der Lehrer an die Tafel, und läßt die Schüler in ihr Rechenheft eintragen. Nun können eine Menge Fragen den Kindern darüber vorgelegt werden. Z. B. 3 Menschen haben wie viele Augen? 4 Ochsen haben wie viele Hörner? 5 Pferde haben wie viele Ohren? 6 Gänse haben wie viele Füße? 7 Männer brauchen wie viele Stiefel? ꝛc.

Wie die Vielfachen von 2, so können auch die Vielfachen von 3, 4, 5 bis 10 gebildet werden; doch der Kürze wegen wird man die obigen ersten beiden Kolumnen weglassen, weil sie als bereits bekannt vorausgesetzt werden können.

Um dem Gedächtnisse die Vielfachen von 2 noch tiefer einzuprägen, kann man noch folgende Uebungen vornehmen.

1.2+1=2+1=3. 1.2+2=2+2=4. 1.2+3=2+3=5.
2.2+1=4+1=5. 2.2+2=4+2=6. 2.2+3=4+3=7.
3.2+1=6+1=7. 3.2+2=6+2=8. 3.2+3=6+3=9.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ebenso kann mit der Multiplikation die Subtraktion verbunden werden.

1.2−1=2−1=1. 1.2−2=2−2=0. 2.2−3=4−3=1.
2.2−1=4−1=3. 2.2−2=4−2=2. 3.2−3=6−3=3.
3.2−1=6−1=5. 3.2−2=6−2=4. 4.2−3=8−3=5.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

1.3 = 3.
2.3 = 3+3 = 6.
3.3 = 3+3+3 = 9.
4.3 = 3+3+3+3 = 12.
5.3 = 3+3+3+3+3 = 15.
6.3 = 3+3+3+3+3+3 = 18.
7.3 = 3+3+3+3+3+3+3 = 21.
8.3 = 3+3+3+3+3+3+3+3 = 24.
9.3 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 27.
10.3 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 30.

Wie die Vielfachen von 2 theils durch Fragen, theils durch Addition und Subtraktion behandelt wurden, so kann man auch die Vielfachen von 3 behandeln. Z. B. Für eine Elle Band giebt man 3 Sgr., wie viel wird man für 2, 5, 7, 9 Ellen zu geben haben? 1 Centner Salz kostet 3 Thaler, wie viele Thaler werden 3, 4, 6, 8 Centner kosten? ꝛc.

Nur eine Andeutung des Ganges im Rechnen kann hier gegeben werden, eine vollständige Ausführung würde dieses Werkchen zu dickleibig machen, und dadurch den Preis desselben bedeutend erhöhen, wie auch jeden denkenden Lehrer vor dem Gebrauche desselben zurückschrecken.

Digitized by Google

Hier folge noch ein Täfelchen von den Vielfachen der Zahlen bis 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

In jeder horizontalen Reihe findet man von oben nach unten die Vielfachen von 1, 2, 3 bis 10; aber auch in jeder vertikalen Kolumne von links nach rechts stehen die Vielfachen von 1, 2, 3 bis 10.

Der Gebrauch dieses Täfelchens, welches den Namen des Pythagoräischen führt, ist daher leicht ersichtlich.

Das Verfahren, welches in diesem Kapitel angewendet wurde, um eine neue Zahl aus zwei andern zu erzeugen, nennt man die Vervielfachung oder Vervielfältigung oder Multiplikation.

Eine Zahl durch eine andere vervielfachen (multipliciren) heißt die erste Zahl so oftmal, als die andere Einheiten hat, nehmen und sie zu einer neuen Zahl (dem Produkte oder Vielfachen) zusammensetzen.

Die Zahl, welche genommen und zu einer neuen Zahl zusammengesetzt wird, heißt die vervielfältigte Zahl oder der Multiplikandus; die Zahl, welche angiebt, wie vielmal eine Zahl genommen werden soll, heißt der Vervielfacher oder Multiplikator. Die neue Zahl, welche so vielmal die vervielfachte Zahl, als die vervielfachende Einheiten hat, enthält, heißt das Vielfache oder das Produkt.

Anmerk. Im Latein heißt multus viel, multiplicare vervielfältigen; producere hervorbringen, daher productus hervorgebracht; numerus die Zahl; also numerus productus oder kurz productus die hervorgebrachte Zahl.

Das Vielfache benennt man nach der Zahl der Einheiten des Multiplikators; ist der Multiplikator 2, 3, 4, 5, ꝛc., so heißt das Vielfache das

Zweifache (Doppelte), Dreifache, Vierfache, Fünffache, ꝛc. oder kürzer das 2fache, 3fache, 4fache, 5fache, ꝛc.

Welches ist das 2fache der Zahlen von 1 bis 10?

Das 2fache von $1 = 2.1 = 1+1 = 2.$
" 2fache " $2 = 2.2 = 2+2 = 4.$
" 2fache " $3 = 2.3 = 3+3 = 6.$
" 2fache " $4 = 2.4 = 4+4 = 8.$
" 2fache " $5 = 2.5 = 5+5 = 10.$
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Diese Uebungen werden die Schüler noch mehr in dem sogenannten Einmaleins befestigen, und machen sie zugleich mit dem Ausdrucke »Vielfaches« bekannt, welcher mit Unrecht in neuerer Zeit so sehr vernachläßigt worden ist.

Welches ist das 3-, 4-, 5fache ꝛc. der Zahlen von 1 bis 10?

Das 3fache von $1 = 3.1 = 1+1+1 = 3.$
" 3fache " $2 = 3.2 = 2+2+2 = 6.$
" 3fache " $3 = 3.3 = 3+3+3 = 9.$
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Das 4fache von $1 = 4.1 = 1+1+1+1 = 4.$
" 4fache " $2 = 4.2 = 2+2+2+2 = 8.$
" 4fache " $3 = 4.3 = 3+3+3+3 = 12.$
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Nun ist den Kindern begreiflich zu machen, daß man dasselbe Produkt erhält, wenn man den Multiplikator in den Multiplikandus, und diesen in den Multiplikator verwandelt.

$2.3 = 6, 3.2 = 6$; also ist $2.3 = 3.2$: $4.5 = 20, 5.4 = 20$; also ist $4.5 = 5.4$.

Viele solcher Beispiele führen die Kinder zur Annahme des Satzes: Man erhält stets dasselbe Produkt, wenn man eine Zahl durch eine andere, oder diese andere durch die erste Zahl vervielfältigt.

Dieser Satz wird später noch besonders erwiesen werden.

B. Multiplikation und Addition.

Wenn man $3+4$ mit 2 multipliciren soll, wie kann man solches bewerkstelligen?

1) Man addire $3+4 = 7$, und nehme dieses 2mal, welches 14 giebt.

2) Es ist $2.3 = 6$ und $2.4 = 8$; aber $6+8 = 14$; daher ist $3+4$ mit 2 multiplicirt $= 14$.

Wenn mehrere Zahlen als eine einzige betrachtet und mit ihnen eine Rechnung vorgenommen werden soll, so schließt man sie in 2 Klammern (Haken oder Parenthesen) ein. Z. B. $3+4$ sollen mit 2 multiplicirt werden, so bezeichnet man dies so: $2.(3+4) = 2.[3+4]$. Umgekehrt sind mehrere Zahlen in Klammern eingeschlossen, und es soll mit den Zahlen in den Klammern eine Rechnung bewirkt werden, so muß diese Rechnung auf jede Zahl innerhalb der Haken angewendet

Digitized by Google

werden. Daher ist $3.(5+7+8) = 3.5+3.7+3.8 = 3.20 = 60 = 15+21+24$.

Wenn man mehrere Produkte hat, die denselben Multiplikator haben, so ist ihre Summe gleich einem Produkte mit demselben Multiplikator, und sein Multiplikandus ist die Summe der Multiplikanden der einzelnen Produkte. Z. B. $2.3+2.4 = 2.(3+4) = 14$; $2.5+2.6+2.7 = 2.(5+6+7) = 36$. ꝛc.

Haben mehrere Produkte gleiche Multiplikanden aber verschiedene Multiplikatoren, so ist ihre Summe gleich einem Produkte mit demselben Multiplikandus und sein Multiplikator ist die Summe der Multiplikatoren der einzelnen Produkte.

Z. B. $2.5+3.5 = (2+3).5 = 5.5 = 25$; $3.4+5.4 = (3+5).4 = 8.4 = 32$; $1.6+2.6+3.6 = (1+2+3).6 = 6.6 = 36$. ꝛc.

Die Summe folgender Produkte ist gleich einem Produkte welcher zwei Zahlen?

1) $3.4+3.7 = 3.(4+7) = 3.11$;
2) $4.5+4.8 = 4.(5+8) = 4.13$;
3) $5.2+5.7 = 5.(2+7) = 5.9$;
4) $6.1+6.3 = 6.(1+3) = 6.4$;
5) $7.3+7.9 = 7.(3+9) = 7.12$;
6) $8.2+8.5 = 8.(2+5) = 8.7$;
7) $9.3+9.6 = 9.(3+6) = 9.9$;
8) $10.4+10.5 = 10.(4+5) = 10.9$.
9) $1.2+3.2 = (1+3).2 = 4.2$;
10) $3.3+4.3 = (3+4).3 = 7.3$;
11) $2.4+7.4 = (2+7).4 = 9.4$;
12) $3.5+6.5 = (3+6).5 = 9.5$;
13) $6.6+7.6 = (6+7).6 = 13.6$;
14) $7.9+8.9 = (7+8).9 = 15.9$;
15) $8.7+9.7 = (8+9).7 = 17.7$;
16) $13.9+14.9 = (13+14).9 = 27.9$.

Viele Fragen hierüber. Z. B. 3.8 und 4.8 ist wie viel mal 8? 7.5 und 7.9 ist 7 mal welche Zahl?

Das 2=, 3=, 4=, 5= ꝛc. fache von der Summe zweier Zahlen ist gleich dem 2=, 3=, 4=, 5= ꝛc. fachen jeder einzelnen Zahl.

Das 2fache von	$3+5$	= 2fachen von	$3+$	2fachen von 5.
» 3fache »	$6+8$	= 3fachen »	$6+$	3fachen » 8.
» 4fache »	$7+9$	= 4fachen »	$7+$	4fachen » 9.
» 5fache »	$3+10$	= 5fachen »	$3+$	5fachen » 10.
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Digitized by Google

C. Multiplikation und Subtraktion.

Das 2=, 3=, 4=, 5= ꝛc. fache von der Differenz zweier Zahlen ist gleich dem 2=, 3=, 4=, 5= ꝛc. fachen der größern weniger demselben Vielfachen der kleinern Zahl.

Das 2fache von	4 — 2 =	dem 2fachen von	4 —	dem 2fachen von	2.
» 3fache »	7 — 3 =	» 3fachen »	7 —	» 3fachen »	3.
» 4fache »	9 — 5 =	» 4fachen »	9 —	» 4fachen »	5.
» 5fache »	13 — 8 =	» 5fachen »	13 —	» 5fachen »	8.
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Die Differenz zweier Produkte, welche gleiche Multiplikatoren haben, ist gleich einem Produkte mit demselben Multiplikator und sein Multiplikandus ist gleich der Differenz der Multiplikanden der einzelnen Produkte.

1) $2.8 - 2.5 = 2.(8-5) = 2.3.$
2) $3.7 - 3.4 = 3.(7-4) = 3.3.$
3) $4.9 - 4.2 = 4.(9-2) = 4.7.$
4) $5.6 - 5.3 = 5.(6-3) = 5.3.$
5) $6.4 - 6.1 = 6.(4-1) = 6.3.$
6) $7.12 - 7.8 = 7.(12-8) = 7.4.$
7) $8.9 - 8.8 = 8.(9-8) = 8.1.$
8) $9.13 - 9.5 = 9.(13-5) = 9.8.$
9) $10.15 - 10.5 = 10.(15-5) = 10.10.$
10) $11.8 - 11.3 = 11.(8-3) = 11.5.$

Die Differenz zweier Produkte, welche gleiche Multiplikanden haben, ist gleich einem Produkte mit demselben Multiplikandus, und dessen Multiplikator die Differenz der Multiplikatoren der einzelnen Produkte ist.

1) $7.2 - 3.2 = (7-3).2 = 5.2.$
2) $8.3 - 4.3 = (8-4).3 = 4.3.$
3) $9.4 - 1.4 = (9-1).4 = 8.4.$
4) $10.5 - 7.5 = (10-7).5 = 3.5.$
5) $11.6 - 3.6 = (11-3).6 = 8.6.$
6) $12.7 - 7.7 = (12-7).7 = 5.7.$
7) $13.8 - 4.8 = (13-4).8 = 9.8.$
8) $14.9 - 7.9 = (14-7).9 = 7.9.$
9) $15.10 - 6.10 = (15-6).10 = 9.10.$
10) $16.11 - 7.11 = (16-7).11 = 9.11.$

Viele Fragen hierüber. Z. B. 7.9 weniger 7.4 ist 7 mal welche Zahl? 8.6 weniger 3.6 ist wie viel mal 6?

D. Multiplikation in Verbindung mit Multiplikation.

Folgende 3 Zahlen 2, 3, 4 können auf welche Weise oder in welcher Ordnung multiplicirt werden?

Digitized by Google

1) $2.3.4 = 6.4 = 24$; 2) $2.4.3 = 8.3 = 24$; 3) $3.2.4 = 6.4 = 24$.
4) $3.4.2 = 3.8 = 24$; 5) $4.2.3 = 4.6 = 24$; 6) $4.3.2 = 4.6 = 24$.

Eben so ist $2.3.5 = 2.5.3 = 3.2.5 = 3.5.2 = 5.2.3 = 5.3.2 = 5.6 = 30$. $3.4.5 = 3.5.4 = 4.3.5 = 4.5.3 = 5.3.4 = 5.4.3 = 20.3 = 2\mathfrak{Z}..3 = 6\mathfrak{Z}. = 60$.

Hieraus folgt, daß das Produkt mehrerer Zahlen stets dasselbe ist, man mag die Zahlen in einer Ordnung, in welcher man will, mit einander multipliciren.

Beweis des Satzes, daß das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen in beliebiger Ordnung durch einander vervielfältigt stets dasselbe ist.

$2.3 = 3.2$; denn $2.3 = 3 + 3 = 3.1 + 3.1 = 3.(1+1) = 3.2$.

$3.7 = 7.3$; denn $3.7 = 7 + 7 + 7 = 7.1 + 7.1 + 7.1 = 7.(1+1+1) = 7.3$. ꝛc.

Daher ist $2.3.4 = 2.4.3$ (weil $3.4 = 4.3$) $= 3.2.4$ (weil $2.3 = 3.2$) $= 3.4.2$. ꝛc.

Da man also stets dasselbe Produkt erhält, man mag die eine Zahl zum Multiplikator und die andere zum Multiplikandus, oder die erste Zahl zum Multiplikandus und die andere zum Multiplikator machen, so führen beide Zahlen den gemeinschaftlichen Namen Faktor.

Anmerk. Facere heißt Etwas machen, thun, daher Factor einer, der Etwas macht oder thut; die Faktoren machen oder bringen das Produkt hervor.

Fragen. Z. B. 3.9 ist 9 mal welche Zahl? $3.5.7$ ist 3 mal, 5 mal, 7 mal welche Zahl? $3.5.7$ ist 3 mal 35, 5 mal 21, 7 mal 15. ꝛc.

E. Das Produkt und ein Faktor sind gegeben, der andere Faktor wird gesucht.

$8 =$ wie vielmal 4?	kürzer	$6 = ? \times 2$;	$28 = ? \times 4$;	$50 = ? \times 10$;
$14 =$ » » 7?	»	$9 = ? \times 3$;	$24 = ? \times 6$;	$54 = ? \times 6$;
$15 =$ » » 5?	»	$10 = ? \times 5$;	$30 = ? \times 10$;	$56 = ? \times 7$;
$18 =$ » » 6?	»	$12 = ? \times 4$;	$32 = ? \times 4$;	$60 = ? \times 6$;
$30 =$ » » 5?	»	$16 = ? \times 8$;	$35 = ? \times 7$;	$63 = ? \times 9$;
$32 =$ » » 8?	»	$18 = ? \times 3$;	$36 = ? \times 9$;	$64 = ? \times 8$;
		$20 = ? \times 5$;	$40 = ? \times 8$;	$70 = ? \times 7$;
		$21 = ? \times 7$;	$42 = ? \times 7$;	$72 = ? \times 9$;
		$24 = ? \times 8$;	$45 = ? \times 5$;	$80 = ? \times 10$;
		$25 = ? \times 5$;	$48 = ? \times 6$;	$81 = ? \times 9$;
		$27 = ? \times 9$;	$49 = ? \times 7$;	$90 = ? \times 9$;
				$100 = ? \times 10$.

$7.18 = ? \times 6$. Aufl. $18 = 3.6$; also $7.18 = 7.3.6 = 21.6$.

$2.28 = ? \times 7$. » $28 = 4.7$; also $2.28 = 2.4.7 = 8.7$.

$3.32 = ? \times 8$. » $32 = 4.8$; also $3.32 = 3.4.8 = 12.8$.

Digitized by Google

$4.54 = ? \times 9$. Aufl. $54 = 6.9$; also $4.54 = 4.6.9 = 24.9$.
$5.70 = ? \times 10$. » $70 = 7.10$; also $5.70 = 5.7.10 = 35.10$.
$6.45 = ? \times 5$. » $45 = 9.5$; also $6.45 = 6.9.5 = 54.5$.
$7.36 = ? \times 4$. » $36 = 9.4$; also $7.36 = 7.9.4 = 63.4$.

Der Lehrer gebe viele Beispiele dieser Art und lasse alle wie vorstehende auflösen. Diese Aufgaben schärfen das Nachdenken der Kinder und machen sie mit den Zahlen vertrauter.

2.	$100 = ? \times 10$;	$56 = ? \times 8$;	$35 = ? \times 7$;	$18 = ? \times 9$.
3.	$90 = ? \times 9$;	$54 = ? \times 6$;	$32 = ? \times 4$;	$16 = ? \times 8$.
4.	$81 = ? \times 9$;	$50 = ? \times 5$;	$30 = ? \times 6$;	$12 = ? \times 6$.
5.	$80 = ? \times 10$;	$49 = ? \times 7$;	$28 = ? \times 4$;	$14 = ? \times 2$.
6.	$72 = ? \times 8$;	$48 = ? \times 8$;	$27 = ? \times 9$;	$15 = ? \times 3$.
7.	$70 = ? \times 10$;	$45 = ? \times 9$;	$25 = ? \times 5$;	$10 = ? \times 5$.
8.	$64 = ? \times 8$;	$42 = ? \times 7$;	$24 = ? \times 4$;	$9 = ? \times 3$.
9.	$63 = ? \times 7$;	$40 = ? \times 8$;	$21 = ? \times 7$;	$8 = ? \times 4$.
10.	$60 = ? \times 6$;	$36 = ? \times 6$;	$20 = ? \times 5$;	$6 = ? \times 3$.

In welche 2 Faktoren kann man folgende Zahlen 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 36, 40, ꝛc. zerlegen?

$6 = 2.3$, $14 = 2.7$, $20 = 2.10$, $25 = 5.5$, $32 = 2.16$, $40 = 2.20$,
$8 = 2.4$, $15 = 3.5$, $= 4.5$, $27 = 3.9$, $= 4.8$, $= 4.10$,
$9 = 3.3$, $16 = 2.8$, $21 = 3.7$, $28 = 2.14$, $36 = 2.18$, $= 5.8$,
$10 = 2.5$, $= 4.4$, $24 = 2.12$, $= 4.7$, $= 3.12$, ꝛc. ꝛc.
$12 = 2.6$, $18 = 2.9$, $= 3.8$, $30 = 2.15$, $= 4.9$,
$= 3.4$, $= 3.6$, $= 4.6$, $= 3.10$, $= 6.6$,
$= 5.6$,

Es wird vielleicht befremden, wie hier $24 = 2.12$, $28 = 2.14$, $30 = 2.15$ ꝛc. gesetzt werden konnte, weil die Schüler noch nicht gelernt haben, zu dividiren; doch diese Zerlegung werden die Schüler auch ohne Kenntniß der Division nach einer kurzen Belehrung leicht fassen. Denn der Schüler weiß, daß $24 = 3.8$ ist; nun möge er wieder 8 in Faktoren zerlegen. $8 = 2.4$; also $24 = 3.2.4 = 2.3.4$; aber $3.4 = 12$; also $24 = 2.12$. Ebenso ist $28 = 4.7 = 2.2.7$, aber $2.7 = 14$; also $28 = 2.14$.

Zu dieser Art der Zerlegung führen folgende Aufgaben. Doch zuerst folgende Erklärung: Eine Zahl, welche keinen Faktor außer der Einheit oder sich selbst hat, heißt eine einfache oder Primzahl.

Welches sind die einfachen oder Primzahlen von 1 bis 30? Antwort: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Folgende Zahlen 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 81, 90, 100 sollen in ihre einfachen Faktoren zerlegt und dadurch alle möglichen Faktoren zu je 2 gebildet werden.

$42 = 6.7$, aber $6 = 2.3$; daher $42 = 2.3.7$ und hieraus folgt $42 = 2.(3.7) = 2.21 = 3.(2.7) = 3.14 = 6.7$.

Digitized by Google

$45 = 5.9$; nun ist $9 = 3.3$; also ist $45 = 5.3.3 = 3.(5.3) = 3.15$.
$48 = 6.8$; aber $6 = 2.3$, $8 = 2.4 = 2.2.2$; also $48 = 2.3.2.2.2 = 2.(3.2).(2.2) = 2.6.4 = 2.24 = 3.(2.2).(2.2) = 3.4.4 = 3.16 = (2.2).(3.2.2) = 4.12 = 6.8$.

Die übrigen Zahlen werden auf ähnliche Weise in einfache Faktoren zerlegt, und aus diesen die übrigen gebildet. Hier muß die weitere Ausführung wegbleiben, nur folge eine kurze Angabe der Faktoren.

$50 = 2.25$;	$63 = 3.21$;	$80 = 2.40$;	$100 = 2.50$;
$= 5.10$.	$= 7.9$.	$= 4.20$;	$= 4.25$;
$54 = 2.27$;	$64 = 2.32$;	$= 5.16$;	$= 5.20$;
$= 3.18$;	$= 4.16$;	$= 8.10$.	$= 10.10$.
$= 6.9$.	$= 8.8$.	$81 = 3.27$;	
$56 = 2.28$;	$70 = 2.35$;	$= 9.9$.	Welcher Schüler alle
$= 4.14$;	$= 5.14$;	$90 = 2.45$;	diese Uebungen unter
$= 7.8$.	$= 7.10$.	$= 3.30$;	A, B, C, D, E, durch-
$60 = 2.30$;	$72 = 2.36$;	$= 5.18$;	gemacht hat, der wird
$= 3.20$;	$= 3.24$;	$= 6.15$;	hinlänglich vorbereitet
$= 4.15$;	$= 4.18$;	$= 9.10$.	zum Nachfolgenden
$= 5.12$;	$= 6.12$;		sein.
$= 6.10$.	$= 8.9$.		

F. Multiplikation solcher Zahlen, welche größer als 10 sind.

1) Multiplikation der Zehner durch Einer.

$2.20 = 2.2\text{Z} =$	$4\text{Z} =$	40;	$2.30 = 2.3\text{Z} =$	$6\text{Z} =$	60;
$3.20 = 3.2\text{Z} =$	$6\text{Z} =$	60;	$3.30 = 3.3\text{Z} =$	$9\text{Z} =$	90;
$4.20 = 4.2\text{Z} =$	$8\text{Z} =$	80;	$4.30 = 4.3\text{Z} = 12\text{Z} =$	120;
$5.20 = 5.2\text{Z} = 10\text{Z} =$	100;	$5.30 = 5.3\text{Z} = 15\text{Z} =$	150;
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

2) Multiplikation der Zehner durch Zehner.

$10.10 = 100 = 1\text{Z}.1\text{Z}$; also 1 Zehner mal 1 Zehner ist stets $= 1$ Hunderter.
$10.20 = 1\text{Z}.2\text{Z} = 1\text{Z}.2.1\text{Z} = 2.(1\text{Z}.1\text{Z}) = 2.1\text{H} = 200$.
$10.30 = 1\text{Z}.3\text{Z} = 1\text{Z}.3.1\text{Z} = 3.(1\text{Z}.1\text{Z}) = 3.1\text{H} = 3\text{H} = 300$. ꝛc.
$20.20 = 2\text{Z}.2\text{Z} = 2.1\text{Z}.2.1\text{Z} = 2.2.(1\text{Z}.1\text{Z}) = 4.1\text{H} = 4\text{H} = 400$.
$20.30 = 2\text{Z}.3\text{Z} = 2.1\text{Z}.3.1\text{Z} = 2.3.(1\text{Z}.1\text{Z}) = 6.1\text{H} = 6\text{H} = 600$.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die Auflösung dieser Aufgaben ist wörtlich folgende. $70.80 = 5600$. Denn $70 = 7\text{Z} = 7.1\text{Z}$, und $80 = 8\text{Z} = 8.1\text{Z}$; also ist $70.80 = 7.1\text{Z}.8.1\text{Z}$. Nun erhält man aber stets dasselbe Produkt, in welcher Ordnung man auch die Faktoren nehmen mag; daher ist $7.1\text{Z}.8.1\text{Z}$ auch $= 7.8.1\text{Z}.1\text{Z}$; aber $7.8 = 56$, und $1\text{Z}.1\text{Z} = 1\text{H}$; also ist $70.80 = 56.1\text{H} = 56\text{H} = 50\text{H} + 6\text{H}$; aber $10\text{H} = 1\text{T}$, daher $50\text{H} = 5\text{T}$; also ist $70.80 = 5600$.

Digitized by Google

3) Multiplikation der Zehner und Einer durch Einer.

$2.11 = 2.(1\text{Z}+1\text{E})$; soll man aber die Summe zweier Zahlen durch eine Zahl multipliciren, so muß solches mit jeder Zahl geschehen; also ist $2.(1\text{Z}+1\text{E}) = 2.1\text{Z}+2.1\text{E} = 2\text{Z}+2\text{E} = 20+2 = 22$; also ist $2.11 = 22$.

Die vorstehende Auflösung kann als Muster aller übrigen Auflösungen dienen.

$3.27 = 3.(2\text{Z}+7\text{E}) = 3.2\text{Z}+3.7\text{E} = 6\text{Z}+21\text{E} = 6\text{Z}+2\text{Z}+1\text{E} = 8\text{Z}+1\text{E} = 81.$

$4.38 = 4.(3\text{Z}+8\text{E}) = 4.3\text{Z}+4.8\text{E} = 12\text{Z}+32\text{E} = 15\text{Z}+2\text{E} = 1\text{H}+5\text{Z}+2\text{E} = 152.$

$5.49 = 5.(4\text{Z}+9\text{E}) = 5.4\text{Z}+5.9\text{E} = 20\text{Z}+45\text{E} = 24\text{Z}+5\text{E} = 2\text{H}+4\text{Z}+5\text{E} = 245.$

$6.56 = 6.(5\text{Z}+6\text{E}) = 30\text{Z}+36\text{E} = 33\text{Z}+6\text{E} = 3\text{H}+3\text{Z}+6\text{E} = 336.$

$7.64 = 7.(6\text{Z}+4\text{E}) = 42\text{Z}+28\text{E} = 44\text{Z}+8\text{E} = 4\text{H}+4\text{Z}+8\text{E} = 448.$ ꝛc.

Die Schüler stellen solche Auflösungen schriftlich dar und erläutern sie mündlich so: 64 besteht aus 6 Z und 4 E; da ich nun 7 mal 64 nehmen soll, so muß ich 7 mal 6 Z und 7 mal 4 E nehmen; 7 mal 6 Z sind 42 Z, und 7 mal 4 E sind 28 E oder 2 Z und 8 E; jene 42 Z und diese 2 Z sind zusammen 44 Z oder 4 H und 4 Z; also ist 7 mal $64 = 4\text{H}+4\text{Z}+8\text{E} = 448$.

4) Multiplikation der Zehner und Einer durch Zehner und Einer.

Hier werden nur kleine Zahlen und wenige Beispiele gegeben: der Lehrer wird aber darauf sehen, daß jeder Schüler eine deutliche und vollständige Auflösung einer solchen Aufgabe zu geben vermag. Denn das Kopfrechnen besteht eigentlich nicht in der Anwendung der 4 Species (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) auf große, sondern nur auf kleine Zahlen, und ganz vorzüglich in der genauen Kenntniß der Zahlenverhältnisse. Deutlich kann an diesem Orte hierüber nicht geurtheilt werden, später aber mehr über das eigentliche Kopfrechnen. Die vollständige Behandlung einer Aufgabe wird zeigen, wie die übrigen zu behandeln sind.

48.67 giebt welches Produkt? Aufl. $67 = 6\text{Z}+7\text{E}$; also ist $48.67 = 48.(6\text{Z}+7\text{E}) = 48.6\text{Z}+48.7\text{E}$. Aber $48 = 4\text{Z}+8\text{E}$; daher ist $48.6\text{Z} = (4\text{Z}+8\text{E}).6\text{Z} = 4\text{Z}.6\text{Z}+8\text{E}.6\text{Z}$. Nun ist $4\text{Z}.6\text{Z} = 4.1\text{Z}.6.1\text{Z} = 4.6.(1\text{Z}.1\text{Z}) = 24.1\text{H} = 24\text{H}$; und $8\text{E}.6\text{Z} = 48\text{Z} = 4\text{H}+8\text{Z}$; dazu jene 24 H sind zusammen $28\text{H}+8\text{Z}$; also ist $48.6\text{Z} = 28\text{H}+8\text{Z}$.

Ferner ist $48.7\text{E} = (4\text{Z}+8\text{E}).7\text{E} = 4\text{Z}.7\text{E}+8\text{E}.7\text{E} = 28\text{Z}+56\text{E} = 33\text{Z}+6\text{E} = 3\text{H}+3\text{Z}+6\text{E}$; dazu die obigen $28\text{H}+8\text{Z}$

Digitized by Google

giebt zusammen 31 H + 11 Z + 6 E = 32 H + 1 Z + 6 E. Aber 32 H = 3 T + 2 H; also ist 48 . 67 = 3 T + 2 H + 1 Z + 6 E = 3216.

Hier ist nun der Ort, das größere Einmaleins oder die Vielfachen von 11, 12, 13, 14 .... 19 zu bilden, welche die Schüler nach und nach auswendig zu lernen haben; denn dieses ist nothwendig zum schnellen Kopfrechnen.

1 . 11 = 11	1 . 12 = 12	1 . 13 = 13
2 . 11 = 22	2 . 12 = 24	2 . 13 = 26
3 . 11 = 33	3 . 12 = 36	3 . 13 = 39
4 . 11 = 44	4 . 12 = 48	4 . 13 = 52
5 . 11 = 55	5 . 12 = 60	5 . 13 = 65
6 . 11 = 66	6 . 12 = 72	6 . 13 = 78
7 . 11 = 77	7 . 12 = 84	7 . 13 = 91
8 . 11 = 88	8 . 12 = 96	8 . 13 = 104
9 . 11 = 99	9 . 12 = 108	9 . 13 = 117
10 . 11 = 110	10 . 12 = 120	10 . 13 = 130
11 . 11 = 121.	11 . 12 = 132	11 . 13 = 143
	12 . 12 = 144.	12 . 13 = 156
		13 . 13 = 169.

Die Vielfachen von 14 werden bis 14 . 14 = 196, die von 15 bis 15 . 15 = 225 ꝛc., die von 19 bis 19 . 19 = 361 gebildet. Weiter dieses Einmaleins bilden und lernen zu lassen ist nicht rathsam. Nun Aufgaben darüber.

7. 99 = ? × 11, 4. 96 = ? × 12, 3. 52 = ? × 13, 6. 84 = ? × 14,
9. 110 = ? × 11, 7. 144 = ? × 12, 5. 78 = ? × 13, 12. 182 = ? × 14,
8. 121 = ? × 11, 8. 72 = ? × 12, 11. 156 = ? × 13, 13. 196 = ? × 14,
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

G. Das Aufsuchen der gemeinen Faktoren und besonders des größten gemeinen Faktors.

Eine Zahl, welche ein Faktor zweier oder mehrerer Zahlen ist, heißt ein gemeiner oder gemeinschaftlicher Faktor dieser Zahlen.

Welches sind die gemeinen Faktoren der beiden Zahlen 24 und 36?

2 ist ein gemeiner Faktor von 24 u. 36; weil 24 = 2 . 12 u. 36 = 2 . 18 ist.
3 „ „ „ „ 24 „ 36; „ 24 = 3 . 8 „ 36 = 3 . 12 „
4 „ „ „ „ 24 „ 36; „ 24 = 4 . 6 „ 36 = 4 . 9 „
6 „ „ „ „ 24 „ 36; „ 24 = 6 . 4 „ 36 = 6 . 6 „
12 „ „ „ „ 24 „ 36; „ 24 = 12 . 2 „ 36 = 12 . 3 „

Die gemeinen Faktoren der Zahlen 24 und 36 sind also 2, 3, 4, 6, 12 und 12 ist der größte gemeine Faktor dieser Zahlen.

Zahlen, welche einen Faktor außer der Einheit und sich selbst haben, heißen zusammengesetzte Zahlen.

Digitized by Google

Welche Zahlen von 1 bis 20 sind einfache, und welche zusammengesetzte?

2 ist eine einfache Zahl; 4 ist eine zusammengesetzte Zahl, denn $4 = 2.2$.
3 „ „ „ „ 6 „ „ „ „ „ $6 = 2.3$.
5 „ „ „ „ 8 „ „ „ „ „ $8 = 2.4$.
7 „ „ „ „ 9 „ „ „ „ „ $9 = 3.3$.
11 „ „ „ „ 10 „ „ „ „ „ $10 = 2.5$.
13 „ „ „ „ 12 „ „ „ „ „ $12 = 3.4$.
2c. 2c. 2c. 2c.

So kann man die Zahlen von 20 bis 30, von 30 bis 40 2c. durchgehen.

Zwei Zahlen, welche keinen gemeinen Faktor außer der Einheit haben, heißen Primzahlen zu einander. Daher sind 4 und 5, 6 und 7, 8 und 9, 12 und 25, 15 und 28 2c. Primzahlen zu einander.

Der Lehrer läßt nun eine Menge Primzahlen zu einander nennen.

Die Schüler werden bald bemerken, daß eine Primzahl (nämlich eine einfache Zahl oder absolute Primzahl) eine Primzahl zu jeder andern Zahl ist. Primzahlen zu einander werden auch relative Primzahlen genannt.

Zwei Zahlen, welche einen von der Einheit verschiedenen gemeinen Faktor haben, heißen zusammengesetzte Zahlen zu einander oder relative zusammengesetzte Zahlen.

Zusammengesetzte Zahlen zu einander oder relativ zusammengesetzte Zahlen sind folgende: 4 und 8, 6 und 9, 7 und 14, 8 und 12, 9 und 15, 10 und 25, 2c.; denn 4 und 8 haben den von der Einheit verschiedenen gemeinen Faktor 2 oder 4, 6 und 9 den von der Einheit verschiedenen gemeinen Faktor 3, 7 und 14 den von der Einheit verschiedenen gemeinen Faktor 7, 2c.

Wenn man den größten gemeinen Faktor zweier Zahlen nimmt, so müssen die beiden nicht gemeinen Faktoren dieser Zahlen Primzahlen zu einander sein; dieser Satz giebt also ein Kennzeichen an, ob man den größten gemeinen Faktor zweier Zahlen gefunden hat oder nicht. Sind z. B. die beiden Zahlen 48 und 72 gegeben, und ein Schüler giebt als größten gemeinen Faktor dieser Zahlen 12 an, so ist $48 = 12.4$, $72 = 12.6$; die nicht gemeinen Faktoren sind also 4 und 6, diese sind aber nicht relative Primzahlen, denn sie haben noch den gemeinen Faktor 2; daher ist nicht 12, sondern $12.2 = 24$ der größte gemeine Faktor von 48 und 72, und $48 = 24.2$, $72 = 24.3$; aber 2 und 3 sind Primzahlen zu einander.

Anmerk. Referre zurücktragen, daher relativus zurückgetragen, das heißt das eine Ding zum andern getragen und mit einander verglichen; also relative Primzahlen solche, welche auf einander bezogen werden und in dieser Beziehung als einfach erscheinen.

Digitized by Google

Welches ist der größte gemeine Faktor folgender 2 Zahlen 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ꝛc.?

4 ist der größte gemeine Faktor der Zahlen 4 und 8, 4 und 12, 4 und 16, 4 und 20, ꝛc.

4 ist der größte gemeine Faktor der Zahlen 8 und 12,
8 " " " " " " " 8 " 16,
4 " " " " " " " 8 " 20,
8 " " " " " " " 8 " 24,
ꝛc. ꝛc.

4 ist der größte gemeine Faktor der Zahlen 12 und 16,
4 " " " " " " " 12 " 20,
12 " " " " " " " 12 " 24,
4 " " " " " " " 12 " 28,
ꝛc. ꝛc.

Man stellt also zuerst 4 mit jeder nachfolgenden Zahl 8, 12, 16, 20, ꝛc. zusammen, dann 8 mit jeder nachfolgenden 12, 16, 20, ꝛc., dann 12 mit jeder nachfolgenden 16, 20, 24, ꝛc., dann 16 mit jeder nachfolgenden 20, 24, 28, ꝛc.

Welches ist der größte gemeine Faktor folgender 2 Zahlen 5, 10, 15 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ꝛc.?

Der größte gemeine Faktor folgender 2 Zahlen 12, 18, 24, 30, 36, 42 ꝛc. ist?

Die erste Frage enthielt Vielfache von 4, die zweite Vielfache von 5, die dritte Vielfache von 6; so kann man Aufgaben geben über Vielfache von 7, 8, 9, 10, 11, 12 ꝛc.

Diese Uebungen sind sehr bildend und wichtig für das Nachfolgende; daher wird sie der Lehrer nicht leicht verlassen.

II. Schriftliche Multiplikation.

Im Kopfrechnen wurde nur bis zur Multiplikation der Zehner durch Zehner gegangen, die schriftliche Multiplikation erstreckt sich auf größere Zahlen; daher hat man sich vor dieser mit den Produkten der Einheiten verschiedener Ordnungen bekannt zu machen.

Einer mal Einer giebt Einer; z. B. 3 E mal 4 E = 12 E.
Einer mal Zehner giebt Zehner; z. B. 2 E mal 7 Z = 14 Z.
Einer mal Hunderter giebt Hunderter; z. B. 4 E mal 8 H = 32 H.
Einer mal Tausender giebt Tausender; z. B. 5 E mal 3 T = 15 T.
Einer mal Zehntausender giebt Zehntausender; z. B. 3 E mal 8 Z.T = 24 Z.T.
Einer mal Hunderttausender giebt Hunderttausender; z. B. 2 E mal 4 H.T = 8 H.T.
Einer mal Millionen giebt Millionen; z. B. 7 E mal 3 M = 21 M.
ꝛc. ꝛc. ꝛc

Digitized by Google

Der Lehrer hat jedes dieser Produkte durch Beispiele bis zur völligen Deutlichkeit zu erklären.

Allgemeiner Satz: Einheiten irgend einer Ordnung durch Einer vervielfältigt giebt zum Produkte Einheiten derselben Ordnung.

Zehner mal Einer giebt Zehner, weil Einer mal Zehner wieder Zehner giebt.
Zehner mal Zehner giebt Hunderter, weil $10 . 10 = 100$.
Zehner mal Hunderter giebt Tausender, weil $10 . 1\text{H} = 10\text{H} = 1\text{T}$.
Zehner mal Tausender giebt Zehntausender, weil $10 . 1\text{T} = 10\text{T} = 1\text{ZT}$.
Zehner mal Zehntausender giebt Hunderttausender, weil $10 . 1\text{ZT} = 10\text{ZT} = 1\text{HT}$.
Zehner mal Hunderttausender giebt Millionen, weil $10 . 1\text{HT} = 10\text{HT} = 1\text{M}$.
Zehner mal Millionen giebt Zehnmillionen, weil $10 . 1\text{M} = 10\text{M} = 1\text{ZM}$.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Viele Fragen außer der Ordnung; z. B. 4 Z mal 8 ZT = 32 HT; denn $4\text{Z} = 4 . 1\text{Z}$, $8\text{ZT} = 8 . 1\text{ZT}$; also 4 Z mal 8 ZT $= 4 . 8 . 1\text{Z} . 1\text{ZT} = 32 . (10 . 1\text{ZT}) = 32 \times 10\text{ZT} = 32 \times 1\text{HT} = 32\text{HT}$.

Allgemein: Zehner mal Einheiten einer beliebigen Ordnung giebt zum Produkte Einheiten der nächst höheren Ordnung.

Hunderter mal Einer giebt Hunderter, weil 1 H mal $1\text{E} = 1\text{E} \times 1\text{H} = 1\text{H}$.
Hunderter mal Zehner giebt Tausender, weil $1\text{H} \times 1\text{Z} = 1\text{Z} \times 1\text{H} = 1\text{T}$.
Hunderter mal Hunderter giebt Zehntausender, weil $1\text{H} = 10\text{Z}$; also $1\text{H} \times 1\text{H} = 10\text{Z} \times 1\text{H} = 10 . 1\text{Z} \times 1\text{H} = 10 \times 1\text{T} = 10\text{T} = 1\text{ZT}$.
Hunderter mal Tausender giebt Hunderttausender, weil $1\text{H} = 10\text{Z}$; also $1\text{H} \times 1\text{T} = 10\text{Z} \times 1\text{T} = 10 \times 1\text{Z} \times 1\text{T} = 10 \times 1\text{ZT} = 10\text{ZT} = 1\text{HT}$.
Hunderter mal Zehntausender giebt Millionen, weil $1\text{H} = 10\text{Z}$; also $1\text{H} \times 1\text{ZT} = 10\text{Z} \times 1\text{ZT} = 10 \times 1\text{Z} \times 1\text{ZT} = 10 . 1\text{HT} = 10\text{HT} = 1\text{M}$.
Hunderter mal Hunderttausender giebt Zehnmillionen, weil $1\text{H} = 10\text{Z}$; also $1\text{H} \times 1\text{HT} = 10\text{Z} \times 1\text{HT} = 10 \times 1\text{Z} \times 1\text{HT} = 10 \times 1\text{M} = 10\text{M} = 1\text{ZM}$.
Hunderter mal Millionen giebt Hundertmillionen, weil $1\text{H} \times 1\text{M} = 10\text{Z} \times 1\text{M} = 10 \times 1\text{Z} \times 1\text{M} = 10 \times 1\text{ZM} = 1\text{HM}$.

Fragen; z. B. $7\text{H} \times 8\text{T} = 56\text{HT}$: denn $7\text{H} = 7 . 1\text{H}$, $8\text{T} = 8 . 1\text{T}$; also $7\text{H} \times 8\text{T} = 7 \times 8 \times 1\text{H} \times 1\text{T}$; aber $1\text{H} = 10\text{Z}$; daher $1\text{H} \times 1\text{T} = 10\text{Z} \times 1\text{T} = 10 \times 1\text{Z} . 1\text{T} = 10 \times 1\text{ZT} = 10\text{ZT} = 1\text{HT}$; also $7\text{H} \times 8\text{T} = 7 \times 8 \times 1\text{HT} = 56 \times 1\text{HT} = 56\text{HT}$.

Allgemein: Hunderter mal Einheiten einer gewissen Ordnung giebt zum Produkte Einheiten von solcher Ordnung, die um 2 höher als die letztere Ordnung sind. Also Hunderter mal Einheiten der 8ten Ordnung giebt Einheiten der 8ten + 2ten oder der 10ten Ordnung.

Digitized by Google

Tausender mal Einer giebt Tausender,
Tausender mal Zehner giebt Zehntausender,
Tausender mal Hunderter giebt Hunderttausender. } Dieses ist aus dem Vorstehenden deutlich.

Tausender mal Tausender giebt Millionen; denn $1\text{T} = 10\text{H}$; also $1\text{T} \times 1\text{T} = 10\text{H} \times 1\text{T} = 10 \times 1\text{H} \times 1\text{T} = 10 \times 1\text{HT} = 10\text{HT} = 1\text{M}$.

Tausender mal Zehntausender giebt Zehnmillionen,
Tausender mal Hunderttausender giebt Hundertmillionen,
Tausender mal Millionen giebt Tausendmillionen, ꝛc. } Dieses wird wie das Vorstehende erwiesen.

Allgemein: Tausender mal Einheiten einer gewissen Ordnung giebt zum Produkte Einheiten von einer um 3 höheren Ordnung; also Tausender mal Einheiten der 6ten Ordnung giebt Einheiten der $(6+3)$ten oder der 9ten Ordnung.

Zehntausender mal Einer giebt Zehntausender,
Zehntausender mal Zehner giebt Hunderttausender,
Zehntausender mal Hunderter giebt Millionen,
Zehntausender mal Tausender giebt Zehnmillionen. } Klar aus dem Vorhergehenden.

Zehntausender mal Zehntausender giebt Hundertmillionen; denn $1\text{ZT} = 10\text{T}$; also $1\text{ZT} \times 1\text{ZT} = 10\text{T} \times 10\text{T} = 10 \times 1\text{T} \times 10 \times 1\text{T} = 10 \times 10 \times 1\text{T} \times 1\text{T} = 10 \times 10 \times 1\text{M} = 10 \times 10\text{M} = 10 \times 1\text{ZM} = 10\text{ZM} = 1\text{HM}$.

Zehntausender mal Hunderttausender giebt Tausendmillionen,
Zehntausender mal Millionen giebt Zehntausendmillionen. } Erwiesen wird wie vorher.

Allgemein: Zehntausender mal Einheiten einer gewissen Ordnung giebt zum Produkte Einheiten von einer um 4 höheren Ordnung; also Zehntausender mal Einheiten der 3ten, 5ten, 8ten Ordnung, giebt Einheiten der 7ten, 9ten, 12ten Ordnung.

Hunderttausender mal Einer giebt Hunderttausender,
Hunderttausender mal Zehner giebt Millionen,
Hunderttausender mal Hunderter giebt Zehnmillionen,
Hunderttausender mal Tausender giebt Hundertmillionen,
Hunderttausender mal Zehntausender giebt Tausendmillionen. } Dieses ist aus dem Vorstehenden deutlich.

Hunderttausender mal Hunderttausender giebt Zehntausendmillionen; denn $1\text{HT} = 1\text{H} \times 1\text{T}$, also $1\text{HT} \times 1\text{HT} = 1\text{H} \times 1\text{T} \times 1\text{H} \times 1\text{T} = (1\text{H} \times 1\text{H}) \times (1\text{T} \times 1\text{T}) = 1\text{ZT} \times 1\text{M} = 1\text{ZTM}$.

Hunderttausender mal Million giebt Hunderttausendmillion; wird wie das Vorstehende erwiesen.

Allgemein: Hunderttausender mal Einheiten einer gewissen Ordnung giebt zum Produkte Einheiten von einer um 5 höheren Ordnung; also Hunderttausender mal Einheiten der 4ten, 6ten, 9ten Ordnung giebt Einheiten der 9ten, 11ten, 14ten Ordnung.

Digitized by Google

Millionen mal Einer giebt Millionen,
Millionen mal Zehner giebt Zehnmillionen,
Millionen mal Hunderter giebt Hundertmillionen,
Millionen mal Tausender giebt Tausendmillionen,
Millionen mal Zehntausender giebt Zehntausendmillionen,
Millionen mal Hunderttausender giebt Hunderttausendmillionen.

} Aus dem Vorhergehenden klar.

Millionen mal Millionen giebt Billionen; denn $1\,\mathfrak{M} = 10\,\mathfrak{HT}$; also $1\,\mathfrak{M} \times 1\,\mathfrak{M} = 10\,\mathfrak{HT} = 10 \times 1\,\mathfrak{HT} \times 1\,\mathfrak{M} = 10 \times 1\,\mathfrak{HTM} = 10\,\mathfrak{HTM} = 1$ Billion.

Aus dem Bisherigen geht folgender allgemeine Satz hervor: Wenn man Einheiten einer gewissen Ordnung mit Einheiten einer andern Ordnung multiplicirt: so erhält man zum Produkte Einheiten von einer solchen Ordnungszahl, welche gleich der Summe der Ordnungszahlen beider Faktoren aber um Eins vermindert ist.

Daher ist das Produkt aus Einheiten der 6ten und Einheiten der 7ten Ordnung = Einheiten der $(6+7-1)$ten oder der 12ten Ordnung.

Zehnmillionen mal Hundertmillionen giebt Einheiten welcher Ordnung?

Zehnmillionen sind Einheiten der 8ten Ord., Hundertmillionen sind Einheiten der 9ten Ord.; also geben $3\,\mathfrak{M} \times 9\,\mathfrak{M}$ Einheiten der $(8+9-1)$ten oder der 16ten Ordnung. Die ersten 6 Ordnungen bilden die Klasse der Einer, die 2ten 6 Ordnungen die Klasse der Millionen, und die 4 höheren Ordnungen gehören also zu den Billionen und sind daher Tausendbillionen; also Zehnmillionen mal Hundertmillionen = Tausendbillionen.

Dieses Beispiel hätte man auch so lösen können. Zehnmillionen = Zehner × Millionen, Hundertmillionen = Hunderter × Millionen; also Zehnmillionen × Hundertmillionen = Zehner × Hunderter × Millionen × Millionen = Tausender × Billionen = Tausendbillionen.

Das Vorhergehende als bekannt vorausgesetzt, gehe man nun zur schriftlichen Multiplikation. Zuerst wird man durch Einer, dann durch Zehner, Hunderter ꝛc. multipliciren.

378 496
7
2 649 472

Einer mal Einer giebt Einer, also $7 \times 6 = 42 = 4\,\mathfrak{Z} + 2\,\mathfrak{E}$, die $2\,\mathfrak{E}$ schreibt man an die Stelle der Einer, und nimmt die $4\,\mathfrak{Z}$ zu den Zehnern. Einer mal Zehner giebt Zehner, $7 \times 9\,\mathfrak{Z} = 63\,\mathfrak{Z}$ und jene $4\,\mathfrak{Z}$ sind $67\,\mathfrak{Z} = 6\,\mathfrak{H} + 7\,\mathfrak{Z}$; die $7\,\mathfrak{Z}$ setzt man im Produkte unterhalb des Striches an die Stelle der Zehner, und zählt die $6\,\mathfrak{H}$ zu den Hundertern. Einer mal Hunderter giebt Hunderter, $7 \times 4\,\mathfrak{H} = 28\,\mathfrak{H}$ und $6\,\mathfrak{H} = 34\,\mathfrak{H} = 3\,\mathfrak{T} + 4\,\mathfrak{H}$; die $4\,\mathfrak{H}$ an die Stelle der Hunderter gesetzt, und die $3\,\mathfrak{T}$ zu den folgenden Tausendern addirt. ꝛc.

Soll man eine Zahl durch $1\,\mathfrak{Z} = 10$, oder $1\,\mathfrak{H} = 100$, oder $1\,\mathfrak{T} = 1000$, oder $1\,\mathfrak{ZT} = 10\,000$, ꝛc. multipliciren, so wachsen die Ordnungszahlen der

Digitized by Google

verschiedenen Einheiten der Zahl um 1, 2, 3, 4 ꝛc., nämlich um die Zahl der Nullen, d. h. jede Zahl an den verschiedenen Stellen der gegebenen Zahl rückt um eine Stelle, 2, 3, 4 ꝛc. Stellen, nämlich um so viele Stellen höher, als der Multiplikator Nullen hat. Daher ist:

$375 . 10 = 3750$; $4785 . 100 = 478\,500$; $6797 . 1000 = 6\,797\,000$; $7460 . 10\,000 = 74\,600\,000$; $29\,300 . 100\,000 = 2\,930\,000\,000$ ꝛc. Hat man eine Zahl durch 20, 300, 4000, 50 000 ꝛc. zu multipliciren, so wird man sie zuerst durch 2, 3, 4, 5 ꝛc. multipliciren, und das erhaltene Produkt noch durch 10, 100, 1000, 10 000 ꝛc. vervielfältigen, weil $20 = 2 . 10$, $300 = 3 . 100$, $4000 = 4 . 1000$, $50\,000 = 5 . 10\,000$ ꝛc. ist. Daher $4859 . 40 = 19\,436 . 10 = 194\,360$.

2946
900
2651400

Man multiplicirt also die gegebene Zahl durch 9 und hängt an das erhaltene Produkt die Nullen des Multiplikators an, hier 2 Nullen.

47583
46
285498
190332
2188818

In diesem Beispiele ist die gegebene Zahl durch Zehner und Einer zu multipliciren; man wird also die gegebene Zahl zuerst durch 6 Einer, und dann dieselbe durch 4 Z multipliciren; dies giebt 2 Produkte, welche addirt das gesuchte Produkt darstellen. Daß das Produkt aus den Zehnern und der gegebenen Zahl um eine Stelle höher stehen muß, als das Produkt aus den Einern und derselben Zahl, folgt aus dem Vorhergehenden, oder auch daraus, daß $6 E \times 3 E = 18 E$, und $4 Z \times 3 E = 12 Z$, also die Einheiten des zweiten Produkts an der Stelle der Zehner, die des ersten an der Stelle der Einer, jene also eine Stelle höher als diese.

4597
385
22985
36776
13791
1769845

Man multiplicirt den gegebenen Multiplikandus durch jede Zahl des Multiplikators, also durch die 5 E, dann durch die 8 Z, dann durch die 3 H als wären es Einer; die niedrigsten Einheiten des ersten Produkts stehen an der Stelle der Einer, die niedrigsten Einheiten des 2ten an der Stelle der Zehner, die niedrigsten Einheiten des 3ten an der Stelle der Hunderter. So wie man also eine Stelle in dem Multiplikator weiter rückt, so muß das erhaltene Produkt eine Stelle vorrücken, oder die niedrigsten Einheiten eines solchen Theilprodukts sind von derselben Ordnung der Einheiten der Zahl des Multiplikators, mit welcher zuletzt multiplicirt wurde.

Wenn man die vorhergehenden Sätze gehörig gefaßt hat, so wird man sich leicht eine praktische Regel für die Multiplikation mehrstelliger Zahlen bilden.

Digitized by Google

Zweites Kapitel.

Theilung der Zahlen oder Division.

Die Theilung oder Division ist das entgegengesetzte Verfahren von der Vervielfältigung oder Multiplikation; diese setzt mehrere gleiche Zahlen zu einer neuen Zahl zusammen, jene zerlegt eine gegebene Zahl in mehrere gleiche Zahlen. Jede beliebige Zahl gleicher Zahlen kann man zu einer neuen Zahl zusammennehmen, nicht aber jede Zahl in eine beliebige Zahl gleicher Zahlen zertheilen; soll das letztere geschehen, so muß man oft Eins, oder ein Ganzes selbst theilen.

I. Theilung solcher Zahlen in gleiche Zahlen, welche ein Vielfaches der letztern sind.

Wenn man eine Zahl in gleiche Zahlen zertheilt, so heißt jede der durch Theilung erhaltenen Zahlen ein Theil der getheilten Zahl; die Zahl aber, welche getheilt werden soll, heißt die ganze Zahl oder das Ganze.

Die Zahl der Theile des Ganzen heißt der Nenner, weil er gleichsam die Theile benennt, eigentlich weil die Theile nach dem Nenner benannt werden.

A. Bildung und Benennung der Theile einer Zahl.

Wenn man eine Zahl in zwei gleiche Theile theilt, so heißt jeder Theil die Hälfte der ganzen Zahl. Die Hälfte einer Zahl ist also einer von den 2 gleichen Theilen derselben. Der Nenner ist 2.

Welches ist die Hälfte von 2, 8, 16, 32, 6, 12, 24, 10, 20, 40, 4, 14, 18, 22, 26, 28, 34, 36, 38, ꝛc.?

1 ist die Hälfte von 2;	5 ist die Hälfte von 10;	13 ist die Hälfte von 26;
4 » » » » 8;	10 » » » » 20;	14 » » » » 28;
8 » » » » 16;	20 » » » » 40;	17 » » » » 34;
16 » » » » 32;	2 » » » » 4;	18 » » » » 36;
3 » » » » 6;	7 » » » » 14;	19 » » » » 38;
6 » » » » 12;	9 » » » » 18;	ꝛc. ꝛc.
12 » » » » 24;	11 » » » » 22;	

Die ganze Zahl hat also 2 Hälften; daher ist die ganze Zahl das 2fache von einer ihrer Hälften. Will man also die Hälfte einer Zahl wissen, so muß man wissen, von welcher Zahl sie das 2fache ist; dieses hat man aber durch das kleine und große Einmaleins im vorigen Kapitel gelernt; daher kann man leicht die Hälfte einer Zahl angeben. Dieses macht aber die Bedingung, nur von solchen Zahlen die Hälfte zu berechnen, welche im Einmaleins als 2fache der Zahlen aufgeführt sind, und dieses ist für den Anfang völlig genügend; später wird das Ausführliche darüber gelehrt werden. Die

Digitized by Google

Schüler sollen vorläufig nur mit dem Begriffe eines Theils, seiner Benennung und des Ganzen bekannt gemacht werden, so bahnt man sich den Weg zum weitern Vorschreiten. Haben die Schüler nur das kleine Einmaleins gelernt, so wähle man nur aus diesem die Zahlen; also die 2fachen bis 20, die 3fachen bis 30, die 4fachen bis 40, ꝛc. Hier wird auch das große Einmaleins als bekannt vorausgesetzt; daher steigen die 2fachen bis $2 . 20 = 40$, die 3fachen bis $3 . 20 = 60$, die 4fachen bis $4 . 20 = 80$.

Wenn man eine Zahl in 3 gleiche Theile theilt, so heißt jeder Theil ein Drittheil oder kurz ein Drittel der ganzen Zahl. Ein Drittel einer Zahl ist also einer von den 3 gleichen Theilen derselben. Die ganze Zahl hat daher 3 Drittel, oder sie ist das 3fache von einem ihrer Drittel. Der Nenner ist 3. Will man das Drittel einer Zahl wissen, so muß man sich erinnern, von welcher Zahl sie das 3fache ist.

Welches ist der dritte Theil von 3, 12, 18, 36, 9, 15, 21, 33, 42, 54, 6, 24, 27, 45, 48, 57, 60, 51, 39, 30?

1 ist ein Drittel von 3; 7 ist ein Drittel von 21; 9 ist ein Drittel von 27;
4 » » » 12; 11 » » » 33; 15 » » » 45;
6 » » » 18; 14 » » » 42; 16 » » » 48;
12 » » » 36; 18 » » » 54; 19 » » » 57;
3 » » » 9; 2 » » » 6; 20 » » » 60;
5 » » » 15; 8 » » » 24; ꝛc. ꝛc.

Theilt man eine Zahl in 4 gleiche Theile, so heißt jeder Theil ein Viertheil oder kurz ein Viertel der ganzen Zahl. Die ganze Zahl hat also 4 Viertel; die ganze Zahl ist daher das 4fache von einem ihrer Viertel. Der Nenner ist 4.

Wie groß ist der vierte Theil oder ein Viertel von 4, 12, 20, 24, 8, 16, 32, 44, 52, 28, 36, 56, 40, 60, 72, 80, 64, 76, 68 und 48?

1 ist ein Viertel von 4; 11 ist ein Viertel von 44; 18 ist ein Viertel von 72;
3 » » » 12; 13 » » » 52; 20 » » » 80;
5 » » » 20; 7 » » » 28; 16 » » » 64;
6 » » » 24; 9 » » » 36; 19 » » » 76;
2 » » » 8; 14 » » » 56; 17 » » » 68;
4 » » » 16; 10 » » » 40; 12 » » » 48.
8 » » » 32; 15 » » » 60;

Wenn man eine Zahl in 5 gleiche Theile theilt, so heißt jeder Theil ein Fünftheil oder kurz ein Fünftel derselben. Die ganze Zahl hat also 5 Fünftel oder sie ist das 5fache von einem ihrer Fünftel.

Wie groß ist ein Fünftel von 5, 20, 30, 10, 40, 15, 50, 25, 60, 35, 70, 45, 80, 55, 90, 65, 75, 95, 85 und 100? Antw.: 1, 4, 6, 2, 8, 3, 10, 5, 12, 7, 14, 9, 16, 11, 18, 13, 15, 19, 17 und 20.

Die vorige vollständige Darstellung der Antworten über Hälften, Drittel und Viertel zeigt zur Genüge, wie die Schüler die Antworten über 5tel, 6tel,

Digitized by Google

7tel ꝛc. zu geben haben. Auch dürfen hier nicht ferner Sechstel, Siebentel, Achtel ꝛc. erklärt werden; denn der Lehrer ersieht aus dem Vorigen, wie die Erklärungen dieser Theile zu geben sind. Ja die Schüler selbst werden durch das Vorhergehende befähigt worden sein, die Erklärungen selbst zu bilden.

Was muß man mit einer Zahl thun, um Sechstel derselben zu erhalten? Was ist ein Sechstel einer Zahl? Die ganze Zahl hat wie viele Sechstel?

Wie groß ist ein 6tel von 6, 24, 12, 30, 18, 48, 36, 54, 42, 60, 72, 84, 66, 78, 90, 120, 96, 114, 102 und 108? Antw. 1, 4, 2, 5, 3, 8, 6, 9, 7, 10, 12, 14, 11, 13, 15, 20, 16, 19, 17 und 18.

Fragen über 7tel zur Erklärung derselben. Haben die Schüler nur das kleine Einmaleins gelernt, so geht der Lehrer in derselben Weise bis zu Zehntel; haben sie aber auch das große gelernt, so würde es nicht undienlich sein, bis 20stel diese Uebungen fortzusetzen.

B. Vervielfachung eines Theils einer gegebenen Zahl.

Nimmt man die Hälfte von 2, 12, 16, 4, 20, 8, 6, 14, 18 2mal, so erhält man wie viel?

Die Hälfte von 2 ist 1, so ist 2 mal die Hälfte von 2 = 2 . 1 = 2.
" " " 12 " 6, " " 2 " " " " 12 = 2 . 6 = 12.
" " " 16 " 8, " " 2 " " " " 16 = 2 . 8 = 16.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

2 mal eine Hälfte sind 2 Hälften; aber 2 Hälften bilden die ganze Zahl, daher ist 2 mal eine Hälfte einer Zahl gleich der Zahl selbst.

3 mal die Hälfte von 6, 16, 26, 36, 12, 22, 32 ꝛc. beträgt wie viel?

Die Hälfte von 6 ist 3, daher ist 3 mal die Hälfte von 6 = 3 . 3 oder = 9.
" " " 16 " 8, " " 3 " " " " 16 = 3 . 8 " = 24.
" " " 26 " 13, " " 3 " " " " 26 = 3 . 13 " = 39.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

2 mal den dritten Theil von 6, 12, 9, 18, 21, 15, 27, 36, ꝛc. beträgt wie viel?

Der dritte Theil von 6 ist 2, so ist 2 mal den dritten Theil von 6 = 2 . 2 od. = 4.
" " " " 12 " 4, " " 2 " " " " " 12 = 2 . 4 " = 8.
" " " " 9 " 3, " " 2 " " " " " 9 = 2 . 3 " = 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Eben so kann man 3, 4, 5 ꝛc. mal ein Drittel einer Zahl nehmen.

2, 3, 4, 5 ꝛc. mal ein Viertel von 4, 12, 16, 8, 20, 24, ꝛc. ist wie viel?

Ein Viertel von 4 ist 1, daher ist 2 mal ein Viertel von 4 = 2 . 1 oder = 2.
" " " 12 " 3, " " 2 " " " " 12 = 2 . 3 " = 6.
" " " 16 " 4, " " 2 " " " " 16 = 2 . 4 " = 8.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

Ein Viertel von 8 ist 2, daher ist 3 mal ein Viertel von 8 = 3.2 oder = 6.
» » » 20 » 5, » » 3 » » » » 20 = 3.5 » = 15.
» » » 24 » 6, » » 3 » » » » 24 = 3.6 » = 18.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

In gleicher Weise läßt man ein Fünftel, Sechstel, Siebentel ꝛc. vervielfachen, und die Schüler stets eine vollständige Antwort nach obigen Beispielen geben.

C. Bildung und Vervielfachung eines Theils von einem Theile einer gegebenen Zahl.

Die Hälfte von der Hälfte von 4, 12, 20, 8, 16, 24, 32 ꝛc. ist wie viel?

Die Hälfte von 4 ist 2, die Hälfte von 2 ist 1, daher ist die Hälfte von der Hälfte von 4 = 1.
» » » 12 » 6, » » » 6 » 3, » » » » » » » » » 12 = 3.
» » » 20 » 10, » » » 10 » 5, » » » » » » » » » 20 = 5.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die Hälfte von einem Drittel von 12, 30, 36, 18, 24, 42, 48 beträgt wie viel?

Ein Drittel von 12 ist 4, die Hälfte von 4 ist 2; also ist die Hälfte v. einem Drittel v. 12 = 2.
» » » 30 » 10, » » » 10 » 5; » » » » » » » » » 30 = 5.
» » » 36 » 12, » » » 12 » 6; » » » » » » » » » 36 = 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die Hälfte von einem Viertel von 24, 40, 48, 16, 32, 56, 64, 72 ꝛc. ist wie groß?

Ein Viertel von 24 ist 6, die Hälfte von 6 ist 3; also ist die Hälfte v. einem Viertel v. 24 = 3.
» » » 40 » 10, » » » 10 » 5; » » » » » » » » » 40 = 5.
» » » 48 » 12, » » » 12 » 6; » » » » » » » » » 48 = 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Eben so läßt man die Hälfte von einem 5tel, 6tel, 7tel ꝛc. einer Zahl bilden.

Die Hälfte von der Hälfte, von einem Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel ꝛc. einer Zahl ist welcher Theil derselben?

Um Hälften zu erhalten, muß man die Zahl in 2 gleiche Theile theilen; will man nun die Hälfte von der Hälfte haben, so muß man die eine Hälfte wieder in 2 gleiche Theile theilen; daher hat die eine Hälfte 2 Theile, und beide Hälften zusammen haben 2 mal 2 oder 4 Theile; beide Hälften machen aber die ganze Zahl; daher hat die ganze Zahl 4 gleiche Theile. Wenn aber die ganze Zahl 4 gleiche Theile hat, so heißt jeder Theil ein Viertel derselben; folglich ist die Hälfte von der Hälfte einer Zahl ein Viertel derselben.

Um die Hälfte von einem Drittel zu erhalten, muß man ein Drittel in 2 gleiche Theile theilen, so hat ein Drittel 2 gleiche Theile, also haben 3 Drittel 3 . 2 oder 6 gleiche Theile. Da nun 3 Drittel = der ganzen Zahl sind, so hat sie 6 gleiche Theile; hat aber die ganze Zahl 6 gleiche Theile, so heißt jeder Theil ein Sechstel derselben; also ist die Hälfte von einem Drittel einer Zahl ein Sechstel derselben.

Digitized by Google

Nimmt man die Hälfte von einem Viertel, so hat man ein Viertel in 2 gleiche Theile getheilt; also hat ein Viertel 2, und 4 Viertel oder die ganze Zahl haben 4 . 2 oder 8 gleiche Theile; daher ist einer dieser Theile ein Achtel der Zahl; also ist die Hälfte von einem Viertel einer Zahl ein Achtel derselben.

Die Hälfte von einem Fünftel einer Zahl ist ein Zehntel derselben;
» » » » Sechstel » » » » Zwölftel »
» » » » Siebentel » » » » Vierzehntel »
ꝛc. ꝛc.

Man kann diese Theilung auch an einer Linie, einem Quadrate oder Rechtecke veranschaulichen.

Der dritte Theil von der Hälfte von 12, 18, 30, 36, 48, 24 ist wie groß?

Die Hälfte von 12 ist 6, ein Drittel von 6 ist 2; also ist ein Drittel von der Hälfte v. 12=2.
» » » 18 » 9, » » » 9 » 3; » » » » » » » » 18=3.
» » » 30 » 15, » » » 15 » 5; » » » » » » » » 30=5.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ein Drittel von einem Drittel von 18, 36, 45, 27, 63, 72 ꝛc. beträgt wie viel?

Ein Drittel von 18 ist 6, ein Drittel v. 6 ist 2; daher ist ein Drittel v einem Drittel v. 18=2.
» » » 36 » 12, » » » 12 » 4; » » » » » » » » 36=4.
» » » 45 » 15, » » » 15 » 5; » » » » » » » » 45=5.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ein Drittel von einem Viertel von 24, 60, 72, 36, 48, 84, 96 ist wie groß?

Ein Drittel von einem Viertel von 24 ist 2;
» » » » » » 60 » 5;
» » » » » » 72 » 6;
» » » » » » 36 » 3;
ꝛc.

Die vorigen Antworten enthielten zugleich die Auflösung der Aufgaben; sind die Schüler in diesen geübt, so läßt sie der Lehrer kurz in nebenstehender Art antworten, und nur hin und wieder einen Schüler auflösen.

Wie groß ist ein Drittel von einem Fünftel von 45, 60, 15, 75, 30, 90, 105, ꝛc.? Antw. 3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, ꝛc.

Ein Drittel von der Hälfte, einem Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Siebentel ꝛc. einer Zahl ist welcher Theil derselben?

Ein Drittel von der Hälfte einer Zahl ist ein Sechstel derselben.
» » » einem Drittel » » » » Neuntel »
» » » » Viertel » » » » Zwölftel »
» » » » Fünftel » » » » Funfzehntel »
ꝛc. ꝛc.

Auflösung eines Beispiels. Ein Drittel von einem Sechstel einer Zahl ist ein Achtzehntel derselben. Denn die ganze Zahl hat 6 Sechstel; um ein Drittel von einem Sechstel zu erhalten, muß man dasselbe in 3 gleiche Theile theilen; also hat ein Sechstel 3 gleiche Theile; daher hat die ganze Zahl oder

Digitized by Google

6 Sechstel 6 . 3 oder 18 gleiche Theile, so ist einer dieser Theile ein Achtzehntel der ganzen Zahl; folglich ist ein Drittel von einem Sechstel einer Zahl ein Achtzehntel derselben.

So führt man durch ein Viertel, ein Fünftel, ein Sechstel ꝛc. von einem Halben, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Siebentel ꝛc. einer Zahl; einmal in Berechnung von einer gegebenen Zahl, und dann in Angabe des Theils der Zahl.

Man wird aus den obigen und andern ähnlichen Beispielen die Regel abstrahiren, daß der Nenner des neuen Theils der ganzen Zahl das Produkt der gegebenen Nenner ist.

Absichtlich wurde bisher ein Theil der ganzen Zahl, oder mehrere Theile derselben nicht mit dem Namen: »Bruch« benannt, auch nicht die Bezeichnung eines Bruches gelehrt, weil dieses die Einbildungskraft der Schüler zu sehr in Anspruch genommen hätte, als daß sie deutlich jedes Einzelne hätten erfassen können. Denn zuerst sollten die Schüler eine klare Vorstellung von der Theilung einer Zahl in gleiche Theile, von einem und mehrern dieser Theile in Bezug auf die ganze Zahl sich erwerben; dieses wird durch das Vorhergehende erreicht sein. Nun haben sie aus dieser Vorstellung einen Begriff abzuleiten, nämlich den von einem Bruche, endlich haben sie diesen Begriff an ein Zeichen zu knüpfen.

Ein Theil oder mehrere Theile einer ganzen Zahl zusammengenommen heißt ein Bruch. Die Zahl der Theile, welche die ganze Zahl enthält, heißt der Nenner; die Zahl der Theile, welche zusammengenommen den Bruch bilden, heißt der Zähler des Bruches.

Unter einem Bruche muß man sich also zwei Zahlen denken, den Nenner und den Zähler; jener giebt die Benennung der einzelnen Theile der ganzen Zahl, dieser zählt die Theile oder giebt die Zahl der Theile des Bruches an.

Will man daher einen Bruch bezeichnen, so braucht man dazu zwei Zeichen oder zwei Zahlen, z. B. 2 Drittel, also 2 und 3; die eingeführte Bezeichnung eines Bruches ist nun der Art, daß man den Zähler zuerst und den Nenner senkrecht unter jenen schreibt, und beide durch einen wagrechten Strich von einander absondert. Also 2 Drittel $= \frac{2}{3}$; ein Viertel $= \frac{1}{4}$; 2 Viertel $= \frac{2}{4}$; 3 Viertel $= \frac{3}{4}$, ꝛc.

Wie hat man folgende Brüche auszusprechen: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, ꝛc.?

Anmerk. Man pflegt häufig Zähler und Nenner eines Bruches durch einen schrägen Strich von einander zu trennen; dieser Gebrauch ist nicht rathsam, weil er leicht zu Irrthum führen kann, und zwar in den Fällen, wenn man Ganze und Brüche zu schreiben hat, z. B. $1\frac{1}{17} = 1/_{17}$ kann gelesen werden als 11 Siebenzehntel.

Digitized by Google

$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 8, 28, 48, 68, 88, 12, 32, 52, 72, 16, 36, 76, 96 ꝛc. ist wie viel?

$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 8 = 6. Aufl. $\frac{1}{2}$ von 48 ist 24, und $\frac{1}{2}$ von 24 ist 12;
$\frac{1}{2}$ „ $\frac{1}{2}$ „ 28 = 21. daher sind $\frac{1}{2}$ von 24 = 3 . 12 oder = 36.
$\frac{1}{2}$ „ $\frac{1}{2}$ „ 48 = 36. Oder: $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 48 = $\frac{1}{4}$ von 48 oder 12; daher
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. sind $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 48 = $\frac{1}{4}$ von 48 oder = 3 . 12 = 36.

$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 36, 42, 54, 60, 72, 24, 48, 84 ꝛc. beträgt wie viel?

$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 36 = 12. Aufl. $\frac{1}{2}$ von 60 = 30, $\frac{1}{2}$ von 30 = 10; also $\frac{1}{2}$ von
$\frac{1}{2}$ „ $\frac{1}{2}$ „ 42 = 14. 30 = 2 . 10 = 20; daher $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 60 = 20.
$\frac{1}{2}$ „ $\frac{1}{2}$ „ 54 = 18. Oder: $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 60 = $\frac{1}{4}$ von 60 oder = 10; daher
$\frac{1}{2}$ „ $\frac{1}{2}$ „ 60 = 20. $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 60 = $\frac{2}{4}$ von 60 = 2 . 10 oder = 20;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. also $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 60 = 20.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$ von 27, 36, 54, 72, 81, 18, 45, 63, ꝛc. ist wie viel?

$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$ von 27 = 6. Aufl. $\frac{1}{3}$ von 72 = 24, $\frac{1}{3}$ von 24 = 8, und $\frac{2}{3}$ von
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{1}{3}$ „ 36 = 8. 24 = 2 . 8 = 16; also $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$ von 72 = 16.
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{1}{3}$ „ 54 = 12. Oder: $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{3}$ von 72 = $\frac{1}{9}$ von 72 = 8; daher $\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{1}{3}$ „ 72 = 16. von $\frac{1}{3}$ von 72 = $\frac{2}{9}$ von 72 = 2 . 8 oder = 16.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 9, 81, 108, 126, 171, 162, 144, ꝛc. beträgt wie viel?

$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 9 = 4. Aufl. $\frac{1}{3}$ von 171 = 57, also $\frac{2}{3}$ von 171 = 2 . 57
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{2}{3}$ „ 81 = 36. = 114. Nun ist $\frac{1}{3}$ von 114 = 38; also $\frac{2}{3}$ von
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{2}{3}$ „ 108 = 48. 114 = 2 . 38 = 76; daher ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 171
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{2}{3}$ „ 126 = 56. = 76.
$\frac{2}{3}$ „ $\frac{2}{3}$ „ 171 = 76. Oder: $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{3}$ von 171 = $\frac{1}{9}$ von 171 = 19; also
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 171 = $\frac{2}{9}$ von 171 = 2 . 19 = 38,
u. $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 171 = $\frac{4}{9}$ von 171 = 4 . 19 = 76.

Die letzte Auflösung kann man kürzer und vielleicht auch deutlicher so geben: $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{3}$ einer Zahl ist $\frac{1}{9}$ derselben; soll man nun $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ nehmen, so muß man $\frac{1}{3}$ von $(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})$ suchen, welches $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ oder $\frac{2}{9}$ der Zahl ist. Man soll aber $\frac{2}{3}$, d. h. 2 mal $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ berechnen; also giebt dieses 2 mal $\frac{2}{9}$, d. i. $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ der Zahl; daher ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 162 = $\frac{4}{9}$ von 162. Nun ist $\frac{1}{9}$ von 162 = 18; daher sind $\frac{4}{9}$ von 162 = 4 . 18 = 72; also ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 162 = 72. Dieses kurz gefaßt: $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{3}$ einer Zahl = $\frac{1}{9}$ derselben; also $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ der Zahl = $\frac{2}{9}$ von ihr, und daher $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ der Zahl = $\frac{4}{9}$ derselben. Daher sind $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 144 = $\frac{4}{9}$ von 144; $\frac{1}{9}$ von 144 = 16; also $\frac{4}{9}$ von 144 = 4 . 16 = 64. Folglich $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 144 = 64.

In gleicher Weise läßt man $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ꝛc. von $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ꝛc. einer gegebenen Zahl berechnen.

Dann allgemein $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ ꝛc. von $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ ꝛc. einer Zahl giebt welchen Bruch derselben?

Digitized by Google

$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ einer Zahl $= \frac{6}{12}$ derselben.
$\frac{3}{4}$ » $\frac{3}{4}$ » » $= \frac{9}{16}$ »
$\frac{3}{4}$ » $\frac{3}{5}$ » » $= \frac{9}{15}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
$\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$ einer Zahl $= \frac{8}{15}$ derselben.
$\frac{4}{5}$ » $\frac{3}{4}$ » » $= \frac{12}{20}$ »
$\frac{4}{5}$ » $\frac{3}{5}$ » » $= \frac{12}{15}$ »
$\frac{4}{5}$ » $\frac{2}{6}$ » » $= \frac{8}{30}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
$\frac{5}{8}$ von $\frac{2}{3}$ einer Zahl $= \frac{10}{18}$ derselben.
$\frac{5}{7}$ » $\frac{3}{4}$ » » $= \frac{15}{24}$ »
$\frac{3}{5}$ » $\frac{3}{5}$ » » $= \frac{15}{25}$ »
$\frac{5}{6}$ » $\frac{2}{5}$ » » $= \frac{10}{30}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aufl. Soll man $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{7}$ einer Zahl nehmen; so nimmt man zuerst den 7ten Theil von der Zahl und darauf denselben 5 mal; daher kann man auch sagen anstatt $\frac{4}{7}$ von einer Zahl $\frac{4}{7}$ mal die Zahl. Hat man nun $\frac{4}{7}$ der Zahl berechnet, so muß man davon 3 mal den 5ten Theil nehmen; daher sagt man auch $\frac{3}{5}$ mal $\frac{4}{7}$ der Zahl oder $\frac{3}{5}$ mal $\frac{4}{7}$ mal eine Zahl.

Nun ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{7}$ einer Zahl oder $\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{7}$ derselben $= \frac{1}{35}$. Es ist also $\frac{1}{7}$ von jedem 7tel $\frac{1}{35}$ der Zahl, daher ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{4}{7}$ oder $\frac{1}{7}$ mal $\frac{4}{7} = \frac{4}{35}$ der Zahl, und $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{7}$ oder $\frac{3}{5}$ mal $\frac{4}{7}$ einer Zahl 3 mal so viel als $\frac{1}{5}$ mal $\frac{4}{7}$, also 3 mal $\frac{4}{35}$, d. i. $\frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} = \frac{3 \cdot 4}{35} = \frac{12}{35}$ der Zahl. Den letzten Schluß kann man auch so machen: 3 mal 5 $= 15$, also 3 mal 5 Fünfunddreißigstel $= 15$ Fünfunddreißigstel $= \frac{15}{35}$ der Zahl.

Daher $\frac{3}{5}$ mal $\frac{4}{7}$ einer Zahl $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ derselben.

Hieraus geht die bekannte Regel hervor: **das Produkt zweier Brüche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler gleich dem Produkte der Zähler und dessen Nenner gleich dem Produkte der Nenner der gegebenen Brüche ist.**

Der Lehrer schiebe die Bekanntmachung jeder Regel so lange auf, bis die Schüler das Wesentliche der Rechnung völlig gefaßt haben. Denn die Regel bezeichnet nur das kurze praktische Verfahren ohne Angabe der Gründe, und überhebt daher den Rechner des Nachdenkens über seine Rechnung; der Schüler soll aber durch das Rechnen zugleich im Denken geübt werden; daher muß er rechnen ohne Regeln. Hat der Lehrer den Schülern die Regel gegeben, so kann Er versichert sein, daß die Mehrzahl derselben stets nach den Regeln rechnen werde, unbekümmert um die Gründe der Rechnung, Er mag sie so oft als Er nur will erinnern, über die Gründe der Rechnung nachzudenken.

D. Ein Theil oder mehrere Theile einer Zahl sind gegeben, die ganze Zahl zu berechnen.

Die Hälfte welcher Zahl beträgt 3, 7, 9, 13, 18, 25, 38, ꝛc.?

Die Hälfte von 6 ist 3. Aufl. Die ganze Zahl hat 2 Hälften oder ist das
» » » 14 » 7. 2fache von einer Hälfte; da eine Hälfte 18 ist,
» » » 18 » 9. so ist die ganze Zahl das 2fache von 18; das
» » » 26 » 13. 2fache von 18 ist 36; also ist die gesuchte Zahl
ꝛc. ꝛc. $= 36$.

Digitized by Google

2, 4, 6, 8, 3, 5, 7, 9, 11, 14 ꝛc. ist $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ꝛc. welcher Zahl?

2 ist $\frac{1}{5}$ von 6.
4 » $\frac{1}{5}$ » 12.
6 » $\frac{1}{5}$ » 18.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
8 ist $\frac{1}{5}$ von 32.
3 » $\frac{1}{4}$ » 12.
5 » $\frac{1}{4}$ » 20.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aufl. Die ganze Zahl hat $\frac{5}{5}$ oder ist das 5fache von $\frac{1}{5}$; ist nun $\frac{1}{5}$ der Zahl 9, so ist die ganze Zahl das 5fache von 9. Nun ist das 5fache von $9 = 5 . 9 = 45$; also ist die gesuchte Zahl $= 45$.

Zwei Drittel welcher Zahl betragen 8, 12, 14, 18, 22, 26, 32, 36, ꝛc.?

$\frac{2}{3}$ von 12 betragen 8.
$\frac{2}{3}$ » 18 » 12.
$\frac{2}{3}$ » 21 » 14.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aufl. $\frac{2}{3}$ einer Zahl ist das 2fache von $\frac{1}{3}$ derselben; betragen $\frac{2}{3}$ einer Zahl 18, so ist das 2fache von $\frac{1}{3}$ der Zahl $= 18$; nun ist 18 das 2fache von 9; also ist $\frac{1}{3}$ der Zahl $= 9$; daher ist die ganze Zahl $= 3 . 9 = 27$; also sind $\frac{2}{3}$ von $27 = 18$.

9, 12, 21, 33, 54, 66, 72 ꝛc. ist $\frac{3}{4}$ welcher Zahl?

9 ist $\frac{3}{4}$ von 12.
12 » $\frac{3}{4}$ » 16.
21 » $\frac{3}{4}$ » 28.
33 » $\frac{3}{4}$ » 44.
54 » $\frac{3}{4}$ » 72.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aufl. Ist 66 $\frac{3}{4}$ einer Zahl, so muß 66 3 und die ganze Zahl 4 solcher Theile haben. Hat 66 3 Theile, so ist ein Theil der 3te Theil von 66 oder 22; die ganze Zahl hat aber 4 solcher Theile; also ist sie $4 . 22 = 88$; daher ist 66 $\frac{3}{4}$ von 88.

$\frac{4}{5}$ von einer Zahl betragen 12, 28, 32, 48, 52, 56, 72 ꝛc., welches ist die Zahl?

$\frac{4}{5}$ von 15 betragen 12.
$\frac{4}{5}$ » 35 » 28.
$\frac{4}{5}$ » 40 » 32.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aufl. Wenn $\frac{4}{5}$ einer Zahl 48 betragen, so ist $\frac{1}{5}$ derselben der 4te Theil von 48 oder 12; die ganze Zahl hat $\frac{5}{5}$, also ist sie $5 . 12 = 60$; also sind $\frac{4}{5}$ von $60 = 48$.

$\frac{5}{6}$ welcher Zahl betragen 15, 25, 35, 20, 30, 45, 55, 65, 85, 95, 100 ꝛc.? Antw. 18, 30, 42, 24, 36, 54, 66, 78, 102, 114, 120.

Die Hälfte von der Hälfte welcher Zahl beträgt 3, 5, 9, 13, 17, 19 ꝛc.?

Die Hälfte von der Hälfte von 12 beträgt 3.
» » » » » » 20 » 5.
» » » » » » 36 » 9.
» » » » » » 52 » 13.
» » » » » » 68 » 17.
ꝛc. ꝛc.

Aufl. Die Hälfte von der Hälfte einer Zahl ist $\frac{1}{4}$ derselben; ist nun die Hälfte von der Hälfte einer Zahl 19, so ist $\frac{1}{4}$ der Zahl $= 19$; daher die ganze Zahl $= \frac{4}{4}$, also $= 4 . 19 = 76$; also ist die Hälfte von der Hälfte von $76 = 19$.

Oder: Ist 19 die Hälfte einer Zahl, so ist die ganze Zahl $= 2 . 19 = 38$; dieses soll aber wieder die Hälfte einer Zahl sein; daher ist die gesuchte Zahl $= 2 . 38 = 76$.

Digitized by Google

Die Hälfte von einem Drittel welcher Zahl ist 7, 11, 14, 16, 23 ꝛc.?

Die Hälfte von $\frac{1}{3}$ von 42 ist 7. Aufl. Ist 23 $\frac{1}{3}$ einer Zahl, so ist die ganze
" " " $\frac{1}{3}$ " 66 " 11. Zahl $= 3.23 = 69$; diese soll nun die
" " " $\frac{1}{3}$ " 84 " 14. Hälfte einer Zahl sein; also ist die gesuchte
" " " $\frac{1}{3}$ " 96 " 16. Zahl $= 2.69 = 138$.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ welcher Zahl betragen 3, 5, 7, 8, 12, 14, 17, 21, ꝛc.?

$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ von 18 betragen 3. Aufl. 3 ist $\frac{1}{4}$ von $4.3 = 12$; diese Zahl soll
$\frac{2}{3}$ " $\frac{1}{4}$ " 30 " 5. nun $\frac{2}{3}$ einer andern sein; daher ist $\frac{1}{3}$ derselben die Hälfte von 12 oder 6, und die ganze Zahl, welche $\frac{3}{3}$ hat, ist daher $= 3.6 = 18$.
$\frac{2}{3}$ " $\frac{1}{4}$ " 42 " 7.
$\frac{2}{3}$ " $\frac{1}{4}$ " 48 " 8.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{5}$ welcher Zahl betragen 27, 45, 63, 81, 108, 144, ꝛc.?

$\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{5}$ von $60 = 27$. Aufl. Sind $\frac{3}{4}$ einer Zahl 108, so ist $\frac{1}{4}$ derselben
$\frac{3}{4}$ " $\frac{3}{5}$ " $100 = 45$. $=$ dem 3ten Theile von $108 = 36$, also $\frac{5}{5}$ der
$\frac{3}{4}$ " $\frac{3}{5}$ " $140 = 63$. Zahl oder die ganze Zahl $= 5.36$; dieses soll
$\frac{3}{4}$ " $\frac{3}{5}$ " $180 = 81$. nun wieder $\frac{3}{4}$ einer Zahl sein; also ist $\frac{1}{4}$ derselben $=$ dem 3ten Theile von 5.36; der 3te Theil
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. von 36 ist 12, also ist der 3te Theil von $5.36 = 5.12 = 60$; daher sind $\frac{4}{4}$ der Zahl oder die ganze Zahl $= 4.60 = 240$. ꝛc.

Oder: $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{5}$ einer Zahl sind $= \frac{9}{20}$ derselben $= 108$; also $\frac{1}{20}$ der Zahl $=$ dem 9ten Theil von $108 = 12$; daher ist die ganze Zahl $= 20.12 = 240$.

E. Von den Maßen und dem größten gemeinen Maße der Zahlen.

Wenn eine Zahl ein Vielfaches einer andern ist, so wird diese ein Maß jener genannt. Ein Maß einer Zahl ist also diejenige, von der die andere ein Vielfaches ist.

Welches sind die Maße der Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, ꝛc.?

2 ist ein Maß von 4; denn 4 ist das 2fache von 2.
2 " " " " 6; " 6 " " 3fache " 2.
3 " " " " 6; " 6 " " 2fache " 3.
2 " " " " 8; " 8 " " 4fache " 2.
4 " " " " 8; " 8 " " 2fache " 4.
2 " " " " 10; " 10 " " 5fache " 2.
5 " " " " 10; " 10 " " 2fache " 5.
2 " " " " 12; " 12 " " 6fache " 2.
3 " " " " 12; " 12 " " 4fache " 3.
4 " " " " 12; " 12 " " 3fache " 4.
6 " " " " 12; " 12 " " 2fache " 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Unter die Maße einer Zahl rechnet man nicht die Einheit und die Zahl selbst; weil die Einheit ein Maß jeder Zahl ist; und jede Zahl ist ein Maß von sich selbst, weil sie das Einfache von sich selbst ist.

Man wird ferner bemerken, daß ein Maß einer Zahl zugleich ein Faktor derselben ist, und umgekehrt ist ein Faktor einer Zahl zugleich ein Maß derselben.

Digitized by Google

Eine Zahl, welche ein Maß mehrerer andern ist, heißt ein gemeines Maß der andern Zahlen.

Welches ist das größte gemeine Maß folgender 2 Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ꝛc.?

2 ist das größte gemeine Maß der Zahlen 2 und 4.
2 „ „ „ „ „ „ „ 2 „ 6.
2 „ „ „ „ „ „ „ 2 „ 8.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
2 „ „ „ „ „ „ „ 4 „ 6.
4 „ „ „ „ „ „ „ 4 „ 8.
2 „ „ „ „ „ „ „ 4 „ 10.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
2 „ „ „ „ „ „ „ 6 „ 10.
6 „ „ „ „ „ „ „ 6 „ 12.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Hier bemerkt man, daß das größte gemeine Maß zweier Zahlen einerlei ist mit dem größten gemeinen Faktor derselben.

Diese Uebungen müssen aber tüchtig traktirt werden; denn sie sind von Wichtigkeit für das Nachfolgende.

F. Brüche durch die kleinsten Zahlen auszudrücken.

Zwei Brüche können einander gleich und doch durch verschiedene Zahlen ausgedrückt sein, z. B. $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; um diese Gleichheit anzuzeigen, bedient man sich verschiedener Ausdrücke, z. B. »der eigentliche Werth des Bruches, der wahre Werth des Bruches, oder auch kurz der Werth des Bruches, die Größe des Bruches ꝛc.« Alle diese Ausdrücke deuten darauf hin, daß die Verfasser von Rechenbüchern, welche sich solcher Ausdrücke bedienten, wohl fühlten den Mangel eines Ausdrucks für die Gleichheit zweier Brüche; doch scheinen sie nicht darauf gekommen zu sein, die Gleichheit der Brüche zu erklären, wodurch die ganze Schwierigkeit gehoben wird. Jene Ausdrücke leisten das nicht, was die Erklärung der Gleichheit zweier Brüche gewährt; denn sie sind schwankend und undeutlich; oder was versteht man unter dem wahren oder eigentlichen Werthe eines Bruches? Welches ist der unwahre oder uneigentliche Werth eines Bruches? Welches ist überhaupt der Werth, die Größe eines Bruches?

Zur kurzen und verständlichen Erklärung der Gleichheit zweier Brüche sind einige Ausdrücke nothwendig, welche vorher erklärt werden müssen.

Zwei Vielfache heißen Gleichvielfache, wenn ihre Multiplikatoren einander gleich sind; z. B. das 2fache von 3 und das 2fache von 4 sind Gleichvielfache; das 3fache von 5 und das 3fache von 6, das 4fache von 6 und das 4fache von 7 ꝛc. Gleichvielfache; ihre Multiplikanden aber können gleich auch ungleich sein. Hat man also 2 Gleichvielfache und das eine ist das 7fache einer Zahl, so muß auch das andere Vielfache das 7fache einer beliebigen Zahl sein.

Die gleichvielsten Theile zweier Zahlen werden gleichnamige Theile dieser Zahlen genannt: die ganzen Zahlen sind daher

Digitized by Google

Gleichvielfache ihrer gleichnamigen Theile. $\frac{1}{2}$ von 4 und $\frac{1}{2}$ von 6 sind gleichnamige Theile; ebenso $\frac{1}{3}$ von 6 und $\frac{1}{3}$ von 9, $\frac{1}{4}$ von 8 und $\frac{1}{4}$ von 12 ꝛc. sind gleichnamige Theile. Daher sind gleichnamige Brüche solche, welche gleiche Nenner haben. Z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ꝛc.; also Drittel sind gleichnamige, Viertel sind gleichnamige, Fünftel sind gleichnamige Brüche ꝛc.

Zwei Brüche sind einander gleich, wenn ihre Zähler Gleichvielfache von gleichnamigen Theilen ihrer Nenner sind.

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; denn das größte gemeine Maß der Zahlen 8 und 12 ist 4, 8 ist das 2fache von 4, 12 das 3fache von 4; daher ist $4 = \frac{1}{3}$ von 12, und also $8 = \frac{2}{3}$ von 12, daher $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$\frac{7}{14} = \frac{6}{12}$; denn das größte gemeine Maß zwischen 7 und 14 ist 7, 7 ist das Einfache, 14 das 2fache von 7; daher ist $7 = \frac{1}{2}$ von 14. Das größte gemeine Maß zwischen 6 und 12 ist 6, 6 ist das Einfache, 12 das 2fache von 6; also ist $6 = \frac{1}{2}$ von 12. Nun ist der Zähler $7 = \frac{1}{2}$ von seinem Nenner 14, der Zähler $6 = \frac{1}{2}$ von seinem Nenner 12; also die Zähler Gleichvielfache (nämlich das Einfache) von gleichnamigen Theilen (nämlich von Hälften) ihrer Nenner; daher sind die Brüche $\frac{7}{14}$, $\frac{6}{12}$ einander gleich.

$\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$; denn das größte gemeine Maß zwischen 21 und 28 ist 7; 21 = dem 3fachen von 7, 28 = dem 4fachen von 7; also $7 = \frac{1}{4}$ von 28; daher 21 = dem 3fachen von $\frac{1}{4}$ von 28. Das größte gemeine Maß zwischen 24 und 32 ist 8; 24 = dem 3fachen von 8, 32 = dem 4fachen von 8; also $8 = \frac{1}{4}$ von 32; daher 24 = dem 3fachen von $\frac{1}{4}$ von 32. Folglich sind die Zähler (21, 24) Gleichvielfache (das 3fache) von gleichnamigen Theilen (Vierteln) von ihren Nennern (28, 32); daher sind die Brüche einander gleich.

Eine Zahl durch ihr Maß messen heißt einen Faktor suchen, mit welchem das Maß multiplicirt die zu messende Zahl giebt. Dieser Faktor ist die Zahl des Maßes oder kurz die Maßzahl. Die Maßzahl ist also diejenige Zahl, durch welche das Maß einer Zahl vervielfacht diese Zahl giebt. 12 durch 4 gemessen giebt zur Maßzahl 3, und man sagt: 4 mißt 12 nach der Zahl 3.

Welche Maßzahlen erhält man, wenn man je zwei folgender Zahlen: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 ꝛc. durch ihr größtes gemeine Maß mißt?

1 und 2 sind die Maßzahlen von 6 u. 12 durch ihr größtes gemeine Maß 6 gemessen.

1	„	3	„	„	„	„	6	„	18	„	„	„	„	„ 6 „
1	„	4	„	„	„	„	6	„	24	„	„	„	„	„ 6 „
ꝛc.							ꝛc.							ꝛc.
2	„	3	„	„	„	„	12	„	18	„	„	„	„	„ 6 „
1	„	2	„	„	„	„	12	„	24	„	„	„	„	„ 12 „
2	„	5	„	„	„	„	12	„	30	„	„	„	„	„ 6 „
ꝛc.							ꝛc.							ꝛc.

Digitized by Google

Man wird finden, daß die Maßzahlen relative Primzahlen sein müssen, wenn man die Zahlen durch ihr größtes gemeine Maß gemessen hat; sind sie nicht Primzahlen zu einander, so hat man die Zahlen nicht durch ihr größtes gemeine Maß gemessen.

Ferner wird man bemerken, daß die Maßzahlen und ihre zugehörigen gemessenen Zahlen Gleichvielfache, jene von der Einheit, diese von ihrem größten gemeinen Maße sind. Z. B. das größte gemeine Maß zwischen 36 und 54 ist 18; 36 wird durch 18 nach 2, 54 durch 18 nach 3 gemessen, und nun ist 2 das 2fache von 1, 36 das 2fache von 18, 3 das 3fache von 1, 54 das 3fache von 18; also sind 2 und 36 Gleichvielfache, 3 und 54 Gleichvielfache. Dieses ist wichtig für das Nachfolgende.

Einen Bruch durch die kleinsten Zahlen ausdrücken nennt man den Bruch heben.

Folgende Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{11}{22}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{15}{25}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{17}{85}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{19}{57}$, $\frac{20}{32}$, $\frac{21}{35}$, $\frac{23}{33}$, $\frac{24}{56}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{27}{72}$, $\frac{28}{49}$, $\frac{30}{75}$, ꝛc. sollen durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt werden, d. h. man soll einen Bruch finden, der dem gegebenen gleich ist, aber so beschaffen, daß sein Zähler und Nenner Primzahlen zu einander sind. Aus dem Vorhergehenden ergiebt es sich, daß man nur Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch ihr größtes gemeine Maß messe, und im neuen Bruche nur die Maßzahlen behalte, so muß derselbe dem gegebenen Bruche gleich sein. Daher $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$, $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $\frac{11}{22} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{32} = \frac{1}{4}$, $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $\frac{17}{85} = \frac{1}{5}$, $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$, ꝛc. Gewöhnlich stellt man diese Hebung so dar, daß man beide Brüche durch einen senkrechten Strich von einander trennt, und oberhalb dieses Striches das größte gemeine Maß setzt, z. B. $\overset{19}{\frac{19}{57}}\,\frac{1}{3}$, $\overset{4}{\frac{20}{32}}\,\frac{5}{8}$, $\overset{7}{\frac{21}{35}}\,\frac{3}{5}$, $\overset{11}{\frac{22}{33}}\,\frac{2}{3}$, $\overset{8}{\frac{24}{56}}\,\frac{3}{7}$, ꝛc.

G. Ueber das Aufsuchen der Brüche, welche kleinere von größeren Zahlen sind.

Eins ist welcher Theil von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ꝛc.?

1 ist $\frac{1}{2}$ von 2. Aufl. Die ganze Zahl 2 hat 2 mal 1, also 2 Theile, daher
1 » $\frac{1}{3}$ » 3. sind diese Theile Hälften der ganzen Zahl; also ist 1 eine
1 » $\frac{1}{4}$ » 4. Hälfte oder $\frac{1}{2}$ von 2.
1 » $\frac{1}{5}$ » 5. Die ganze Zahl 3 hat 3 mal 1, also 3 Theile, so ist jeder
ꝛc. ꝛc. ꝛc. Theil $\frac{1}{3}$ der ganzen Zahl; also ist 1 $\frac{1}{3}$ von 3. ꝛc.

Welcher Bruch ist 18 von 42?

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 18 und 42 ist 6; 18 ist das 3fache, 42 das 7fache von 6; wird nun 42 als die ganze Zahl betrachtet, so hat 42 als ganze Zahl 7 Theile, deren jeder 6 ist. Wenn aber die ganze

Digitized by Google

Zahl 7 Theile hat, so heißen die Theile 7tel; daher ist 6 $\frac{1}{7}$ von 42; 18 ist aber das 3fache von 6; daher ist 18 = $\frac{3}{7}$ von 42.

32 ist welcher Bruch von 72?

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 32 und 72 ist 8; 32 = dem 4fachen von 8, 72 = dem 9fachen von 8. Nun ist 72 als die ganze Zahl zu betrachten und 8 als einen Theil; daher hat die ganze Zahl 72 9 Theile, folglich ist jeder dieser Theile $\frac{1}{9}$ von der ganzen Zahl 72; aber 32 = dem 4fachen von 8, also hat 32 $\frac{4}{9}$ von 72 oder 32 = $\frac{4}{9}$ von 72.

13 ist welcher Bruch von 24?

Aufl. 13 und 24 sind Primzahlen zu einander; daher haben sie außer der Einheit kein gemeines Maß. Das Ganze ist hier 24 = 24 × 1; also hat das Ganze 24, 24 Theile, deren jeder Eins ist, folglich sind die Theile 24stel. Eins ist nun $\frac{1}{24}$ von 24, 13 = 13 × 1: daher ist 13 = 13 × $\frac{1}{24}$ von 24 = $\frac{13}{24}$ von 24.

Nach diesen Auflösungen sind nachfolgende Aufgaben zu berechnen und aufzulösen.

Jede kleinere von folgenden Zahlen ist welcher Bruch jeder größern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ꝛc.?

2 = $\frac{2}{3}$	von 3,	3 = $\frac{3}{4}$	von 4,	4 = $\frac{4}{5}$	von 5,	5 = $\frac{5}{6}$	von 6,	6 = $\frac{6}{7}$	von 7,
= $\frac{1}{2}$	" 4,	= $\frac{3}{5}$	" 5,	= $\frac{2}{3}$	" 6,	= $\frac{5}{7}$	" 7,	= $\frac{3}{4}$	" 8,
= $\frac{2}{4}$	" 5,	= $\frac{1}{2}$	" 6,	= $\frac{4}{7}$	" 7,	= $\frac{5}{8}$	" 8,	= $\frac{3}{3}$	" 9,
= $\frac{1}{3}$	" 6,	= $\frac{3}{7}$	" 7,	= $\frac{1}{2}$	" 8,	= $\frac{5}{9}$	" 9,	= $\frac{3}{5}$	" 10,
= $\frac{2}{7}$	" 7,	= $\frac{3}{8}$	" 8,	= $\frac{4}{9}$	" 9,	= $\frac{4}{2}$	" 10,	= $\frac{6}{11}$	" 11,
= $\frac{1}{4}$	" 8,	= $\frac{1}{3}$	" 9,	= $\frac{2}{5}$	" 10,	= $\frac{3}{11}$	" 11,	= $\frac{1}{2}$	" 12,
= $\frac{2}{6}$	" 9,	= $\frac{3}{10}$	" 10,	= $\frac{4}{11}$	" 11,	= $\frac{5}{12}$	" 12,	= $\frac{6}{13}$	" 13,
= $\frac{1}{5}$	" 10,	= $\frac{3}{11}$	" 11,	= $\frac{1}{3}$	" 12,	= $\frac{5}{13}$	" 13,	= $\frac{3}{7}$	" 14,
ꝛc.		ꝛc.		ꝛc.		ꝛc.		ꝛc.	

Diese Uebungen müssen bis zur völligen Fertigkeit getrieben werden; denn sie enthalten das Wesentliche von den Verhältnissen der Zahlen.

H. Ueber das Aufsuchen der Vielfachen und Brüche, welche größere Zahlen von kleinern sind.

Man wird Vielfache der kleinern Zahl nach der natürlichen Ordnung der Zahlen nehmen, bis man auf 2 nach einander folgende Vielfache kommt, von denen das eine kleiner, das andere größer als die größere der gegebenen Zahlen ist; dann nimmt man das niedrigere Vielfache von der gegebenen größern Zahl hinweg, und untersucht darauf, welcher Bruch der Rest von der gegebenen kleinern Zahl ist. In den meisten Fällen wird man dieses Verfahren abkürzen können; das Genauere darüber werden die Auflösungen anzeigen.

Welches Vielfache und welcher Bruch ist 96 von 13?

Aufl. Aus den Vielfachen von 13 weiß man, daß das 7fache von 13 = 91 < 96, und das 8fache von 13 = 104 > 96 ist; also ist 96 nicht

Digitized by Google

das 8fache, sondern das 7fache von 13 und noch eine Zahl. Es ist nun $96 - 91 = 5$; daher ist $96 = 91 + 5$, oder $96 =$ dem 7fachen von $13 + 5$.

Nun hat man zu untersuchen, welcher Bruch 5 von 13 ist. Nach dem Vorhergehenden weiß man aber, daß $5 = \frac{5}{13}$ von 13 ist; daher ist $96 =$ dem 7fachen von $13 + \frac{5}{13}$ von $13 =$ dem 7fachen $+ \frac{5}{13}$ von 13.

Dieses zeigt man gewöhnlich so an: $96 = 7\frac{5}{13}$ mal $13 = 7\frac{5}{13} \times 13 = 7\frac{5}{13} . 13$.

Nach dieser Auflösung berechne und löse man nachfolgende Aufgaben auf.

Die Zahlen von 20 bis 50 sind welche Vielfache und Brüche von 8, 9, 10?

$20 = 2\frac{1}{2} \times 8$;	$20 = 2\frac{2}{9} . 9$;	$20 = 2 \quad . 10$;	Es versteht sich von
$21 = 2\frac{5}{8} \times 8$;	$21 = 2\frac{1}{3} . 9$;	$21 = 2\frac{1}{10} . 10$;	selbst, daß jeder Bruch,
$22 = 2\frac{3}{4} \times 8$;	$22 = 2\frac{4}{9} . 9$;	$22 = 2\frac{1}{5} . 10$;	dessen Zähler und Nen-
$23 = 2\frac{7}{8} \times 8$;	$23 = 2\frac{5}{9} . 9$;	$23 = 2\frac{3}{10} . 10$;	ner ein gemeines Maß
$24 = 3 \times 8$;	$24 = 2\frac{2}{3} . 9$;	$24 = 2\frac{2}{5} . 10$;	haben, gehoben werden
$25 = 3\frac{1}{8} \times 8$;	$25 = 2\frac{7}{9} . 9$;	$25 = 2\frac{1}{2} . 10$;	müsse, welches bereits
$26 = 3\frac{1}{4} \times 8$;	$26 = 2\frac{8}{9} . 9$;	$26 = 2\frac{3}{5} . 10$;	gelehrt worden ist, und
$27 = 3\frac{3}{8} \times 8$;	$27 = 3 \quad . 9$;	$27 = 2\frac{7}{10} . 10$;	der Lehrer hat strenge
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.	darauf zu sehen, daß
			dieses auch geschehe.

Die Schüler haben alle diese Aufgaben im Kopfe zu berechnen, und bei ihren Privatrechnungen die Resultate der Rechnung nach vorstehendem Schema darzustellen.

Welche Vielfache und Brüche sind die Zahlen von 50 bis 70 von 11, 12, 13, 14?

$50 = 4\frac{6}{11} . 11$;	$51 = 4\frac{7}{11} . 11$;	$52 = 4\frac{8}{11} . 11$;	$53 = 4\frac{9}{11} . 11$;
$= 4\frac{1}{6} . 12$;	$= 4\frac{1}{4} . 12$;	$= 4\frac{1}{3} . 12$;	$= 4\frac{5}{12} . 12$;
$= 3\frac{11}{13} . 13$;	$= 3\frac{12}{13} . 13$;	$= 4 \quad . 13$;	$= 4\frac{1}{13} . 13$;
$= 3\frac{4}{7} . 14$;	$= 3\frac{9}{14} . 14$;	$= 3\frac{1}{7} . 14$;	$= 3\frac{11}{14} . 14$; ꝛc.

Welche Vielfache und Brüche sind die Zahlen von 70 bis 100 von 15, 16, 17, 18, 19 und 20?

I. Bildung und Vervielfachung der Theile solcher Zahlen, welche weder im kleinen noch großen Einmaleins vorkommen.

Wie groß ist die Hälfte von 42, 44, 46, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, ꝛc.?

Aufl. 1. Soll man die Hälfte von der Summe zweier Zahlen nehmen, so muß man die Hälfte jeder einzelnen Zahl nehmen. Nun ist $42 = 4\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E}$; also ist die Hälfte von $42 =$ der Hälfte von $(4\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E}) =$ der Hälfte von $4\mathfrak{Z} +$ der Hälfte von $2\mathfrak{E}$. Die Hälfte von $4\mathfrak{Z} = 2\mathfrak{Z}$, die Hälfte von $2\mathfrak{E} = 1\mathfrak{E}$; also ist die Hälfte von $42 = 2\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{E} = 21$.

Digitized by Google

Oder kürzer: $\frac{1}{2} \times 42 = \frac{1}{2} \times (4\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \times 2\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{E} = 21.$

$\frac{1}{2} \times 44 = \frac{1}{2} \times (4\mathfrak{Z} + 4\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E} = 22.$

$\frac{1}{2} \times 46 = \frac{1}{2} \times (4\mathfrak{Z} + 6\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 3\mathfrak{E} = 23.$

Aufl. 2. Iſt die Zahl der Zehner nicht ein Vielfaches von 2 oder das 2fache einer Zahl, ſo verwandle man einen Zehner in Einer, ſo iſt die übrige Zahl der Zehner ein Vielfaches von 2. Alſo $\frac{1}{2} \times 50 = \frac{1}{2} \times (4\mathfrak{Z} + 10\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \times 10\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 5\mathfrak{E} = 25.$

$\frac{1}{2} \times 52 = \frac{1}{2} \times (4\mathfrak{Z} + 12\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \times 4\mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \times 12\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 6\mathfrak{E} = 26.$

Nach dieſen beiden Auflöſungen wird man die übrigen Beiſpiele leicht berechnen können.

Welches iſt der 3te Theil von 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99 ꝛc.?

Aufl. 3. Wenn man den 3ten Theil von der Summe zweier Zahlen nehmen ſoll, ſo muß man den 3ten Theil von jeder einzelnen Zahl nehmen; alſo $\frac{1}{3} \times 63 = \frac{1}{3} \times (6\mathfrak{Z} + 3\mathfrak{E}) = \frac{1}{3} . 6\mathfrak{Z} + \frac{1}{3} . 3\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{E} = 21.$ $\frac{1}{3} \times 66 = 22$; $\frac{1}{3} . 69 = 23.$

Aufl. 4. Iſt die Zahl der Zehner nicht ein Vielfaches von 3, ſo zerlege man ſie in 2 Zahlen, von denen die eine ein Vielfaches von 3, und die andere kleiner als 3 iſt; die letzte Zahl der Zehner verwandle man in Einer. Daher iſt $\frac{1}{3} \times 72 = \frac{1}{3} \times (6\mathfrak{Z} + 12\mathfrak{E}) = \frac{1}{3} \times 6\mathfrak{Z} + \frac{1}{3} \times 12\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 4\mathfrak{E} = 24.$

$\frac{1}{3} \times 75 = \frac{1}{3} \times (6\mathfrak{Z} + 15\mathfrak{E}) = \frac{1}{3} \times 6\mathfrak{Z} + \frac{1}{3} \times 15\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 5\mathfrak{E} = 25.$

$\frac{1}{3} \times 78 = 26$; $\frac{1}{3} \times 81 = 27$; $\frac{1}{3} \times 84 = 28$; $\frac{1}{3} \times 87 = 29$; ꝛc.

Welches iſt der 4te Theil von 84, 88, 92, 96, 100, ꝛc.?

Aufl. 5. Der 4te Theil von der Summe zweier Zahlen iſt gleich der Summe des 4ten Theils jeder einzelnen Zahl. Daher iſt $\frac{1}{4} \times 84 = \frac{1}{4} \times (8\mathfrak{Z} + 4\mathfrak{E}) = \frac{1}{4} \times 8\mathfrak{Z} + \frac{1}{4} \times 4\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{E} = 21.$

$\frac{1}{4} \times 88 = \frac{1}{4} \times (8\mathfrak{Z} + 8\mathfrak{E}) = \frac{1}{4} \times 8\mathfrak{Z} + \frac{1}{4} \times 8\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E} = 22.$

Iſt die Zahl der Zehner nicht ein Vielfaches von 4, ſo zerlege man ſie in 2 Zahlen, von denen die eine ein Vielfaches von 4 und die andere kleiner als 4 ſei; dieſe letzten Zehner verwandle man in Einer.

$\frac{1}{4} \times 92 = \frac{1}{4} \times (8\mathfrak{Z} + 12\mathfrak{E}) = \frac{1}{4} \times 8\mathfrak{Z} + \frac{1}{4} \times 12\mathfrak{E} = 2\mathfrak{Z} + 3\mathfrak{E} = 23.$

$\frac{1}{4} \times 156 = \frac{1}{4} + (12\mathfrak{Z} + 36\mathfrak{E}) = \frac{1}{4} \times 12\mathfrak{Z} + \frac{1}{4} \times 36\mathfrak{E} = 3\mathfrak{Z} + 9\mathfrak{E} = 39.$

Aus dieſen Auflöſungen wird man erſehen, auf welche Weiſe ein 5tel, 6tel, 7tel, 8tel ꝛc. einer Zahl zu berechnen iſt. Man kann dieſe Auflöſungen auch auf größere als die hier gegebenen anwenden. Z. B.

$\frac{1}{5} \times 895 = \frac{1}{5} \times (5\mathfrak{H} + 35\mathfrak{Z} + 45\mathfrak{E}) = \frac{1}{5} \times 5\mathfrak{H} + \frac{1}{5} \times 35\mathfrak{Z} + \frac{1}{5} \times 45\mathfrak{E} = 1\mathfrak{H} + 7\mathfrak{Z} + 9\mathfrak{E} = 179.$

$\frac{1}{6} \times 15\,786 = \frac{1}{6} \times (12\mathfrak{T} + 36\mathfrak{H} + 18\mathfrak{Z} + 6\mathfrak{E}) = \frac{1}{6} . 12\mathfrak{T} + \frac{1}{6} . 36\mathfrak{H} + \frac{1}{6} . 18\mathfrak{Z} + \frac{1}{6} . 6\mathfrak{E} = 2\mathfrak{T} + 6\mathfrak{H} + 3\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{E} = 2631.$

Digitized by Google

$\frac{1}{7} \times 25186 = \frac{1}{7} \times (21\mathfrak{T} + 35\mathfrak{H} + 63\mathfrak{Z} + 56\mathfrak{E}) = \frac{1}{7}.21\mathfrak{T} + \frac{1}{7}.35\mathfrak{H}$
$+ \frac{1}{7}.63\mathfrak{Z} + \frac{1}{7}.56\mathfrak{E} = 3\mathfrak{T} + 5\mathfrak{H} + 9\mathfrak{Z} + 8\mathfrak{E} = 3598.$
$\frac{1}{8} \times 37216 = \frac{1}{8} \times (32\mathfrak{T} + 48\mathfrak{H} + 40\mathfrak{Z} + 16\mathfrak{E}) = \frac{1}{8}.32\mathfrak{T} + \frac{1}{8}.48\mathfrak{H}$
$+ \frac{1}{8}.40\mathfrak{Z} + \frac{1}{8}.16\mathfrak{E} = 4\mathfrak{T} + 6\mathfrak{H} + 5\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{E} = 4652.$

Die Bildung der Theile von Zahlen, welche 100 übersteigen, sind sehr geeignet für das Privatrechnen der Schüler und eine treffliche Vorübung zur Division; daher lasse man recht viele Beispiele mit ihren Auflösungen rechnen.

Der Lehrer lasse aber vorläufig nur solche Theile von Zahlen berechnen, deren Nenner Multiplikatoren des gelernten Einmaleins sind.

In manchen Fällen kann man die Rechnung noch anders und zum Theil kürzer führen, als es bisher geschah. Nämlich ist die zu theilende Zahl eine solche, welche in dem Einmaleins aufgeführt, und der eine Faktor derselben ein Vielfaches von dem gegebenen Nenner, so kann man wie folgt verfahren.

Welches ist die Hälfte von 44, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84 ꝛc.?

Aufl. 6. $44 = 4 \times 11$; also $\frac{1}{2} \times 44 = \frac{1}{2} \times 4 \times 11$; aber $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; daher $\frac{1}{2} \times 4 \times 11 = 2 \times 11$; folglich $\frac{1}{2} \times 44 = 2.11 = 22$.

$\frac{1}{2} \times 48 = \frac{1}{2}.6.8 = 3.8 = 24$; $\frac{1}{2} \times 52 = \frac{1}{2}.4.13 = 2.13 = 26$. ꝛc.

Welches ist $\frac{1}{3}$ von 42, 66, 72, 75, 81, 84, 96, 108, 114 ꝛc.?

$\frac{1}{3} \times 42 = \frac{1}{3} \times 6 \times 7 = 3.7 = 21$; $\frac{1}{3} \times 72 = \frac{1}{3}.9.8 = 3.8 = 24$. ꝛc.

Wie groß ist $\frac{1}{4}$ von 104, 120, 136, 156, 168, 196 ꝛc.?

$\frac{1}{4} \times 104 = \frac{1}{4} \times 8 \times 13 = 2 \times 13 = 26$; $\frac{1}{4} \times 196 = \frac{1}{4} \times 14 \times 14$
$= \frac{1}{4} \times 2.7 \times 2.7 = \frac{1}{4} \times 4 \times 49 = 49$. ꝛc.

Da nun die Schüler die Bildung der Theile und auch die Vervielfachung der Zahlen kennen, so werden sie mit Leichtigkeit folgende Aufgaben berechnen können.

Wie viel betragen $\frac{2}{3}$ von 72, 84, 93, 108, 126, ꝛc.?

$\frac{2}{3}$ ist $2 \times \frac{1}{3}$; also $\frac{2}{3}$ von $72 = 2 \times \frac{1}{3}$ von $72 = 2.24 = 48$. ꝛc.

Welches sind $\frac{3}{4}$ von 84, 96, 108 ꝛc.?

II. Theilung solcher Zahlen in gleiche Theile, welche kein Vielfaches des Nenners sind.

Wenn die zu theilende Zahl kein Vielfaches von dem Nenner ist, so ist die Theilung derselben in gleiche Theile nur dadurch möglich, daß man Eins selbst theilt. Z. B. die Hälfte von 3 ist $1\frac{1}{2}$, der 3te Theil von 7 ist $2\frac{1}{3}$. Kann man aber wohl Eins theilen? Oder was ist die Hälfte von Eins, was ist der 3te Theil von Eins? ꝛc. Wenn ich sage: die Hälfte von Eins ist ein Halb ($\frac{1}{2}$), der 3te Theil von Eins ist ein Drittel ($\frac{1}{3}$), ꝛc., so denke ich mir jedes Mal unter Eins ein Ding, wenn ich es auch nicht nenne. Sollte ich mir aber in diesen Fällen durchaus kein Ding unter Eins denken, so hätte ich auch keine deutliche Vorstellung von der Hälfte, dem Drittel ꝛc. von Eins. Wenn man also Eins theilt, so muß man unter Eins stets ein

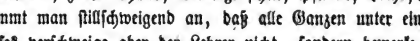
Digitized by Google

Ding sich vorstellen. Um die Theilung eines Dinges anstatt des Eins deutlich anzuzeigen, sagt man nicht Eins, auch nicht ein Ding, sondern ein Ganzes, weil dieses den Theilen entgegengesetzt ist. Ein Ganzes ist aber nichts anderes als ein Ding (ein Körper), welches alle zu seiner Vollständigkeit gehörigen Theile in sich begreift. Ganze werden also in diesem Abschnitte getheilt werden.

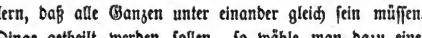
A. Theilung eines Ganzen in gleiche Theile.

Diese Behandlungsart des Rechnens ist eigentlich nicht mehr rein theoretisch, sondern zum Theil praktisch, weil nicht die abstrakte (d. h. der Begriff der Zahl ohne Bezug auf einen wirklichen Gegenstand, einen Körper), sondern die konkrete (d. h. der Begriff der Zahl in Verbindung mit einem wirklichen Gegenstande) Zahl behandelt wird; es ist dieses die Anwendung des Begriffes von einem Bruche auf wirkliche Dinge. Wenn von Ganzen ohne Nennung eines gewissen Namens, z. B. Thaler, Silbergroschen, Pfunde, Lothe, ꝛc. die Rede ist, so nimmt man stillschweigend an, daß alle Ganzen unter einander gleich seien; dieses verschweige aber der Lehrer nicht, sondern bemerke ausdrücklich den Schülern, daß alle Ganzen unter einander gleich sein müssen. Da also wirkliche Dinge getheilt werden sollen, so wähle man dazu einen passenden Gegenstand, d. h. einen so einfachen und gleichförmigen Gegenstand, daß man denselben nicht allein leicht in gleiche Theile theilen, sondern auch klar die Gleichheit der Theile erkennen könne. Die zu diesem Zwecke geeignetsten Gegenstände sind gerade Linien und Quadrate oder auch Rechtecke.

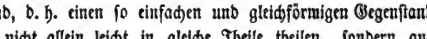
Einer von den 2 gleichen Theilen eines Ganzen heißt die Hälfte oder ein Halbes desselben.



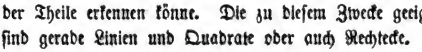
Einer von den 3 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Drittel desselben.



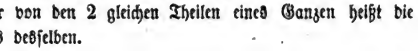
Einer von den 4 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Viertel desselben.



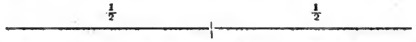
Einer von den 5 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Fünftel desselben.



Einer von den 6 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Sechstel desselben.



Einer von den 7 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Siebentel desselben.

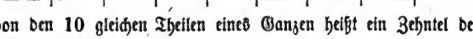


Digitized by Google

Einer von den 8 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Achtel desſelben.

Einer von den 9 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Neuntel desſelben.

Einer von den 10 gleichen Theilen eines Ganzen heißt ein Zehntel desſelben.



Der Lehrer laſſe die Schüler dieſe Theilungen ſo genau darſtellen als ſie es vermögen, auch wird es vortheilhaft ſein, dieſe Theilungen an Quadraten zu üben. Nun viele Fragen darüber. Das Ganze hat wie viele Halben, Drittel, Viertel ꝛc.? Wie viele Halben, Drittel, Viertel, Fünftel ꝛc. machen ein Ganzes?

An $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$ ꝛc. fehlen wie viele Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Siebentel ꝛc. bis man ein Ganzes hat?

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ꝛc. muß man wie vielmal nehmen, um ein Ganzes zu erhalten?

Auf wie viele Arten kann man ein Ganzes theilen um Halbe, Drittel, Viertel ꝛc. bis 12tel zu erhalten?

Um Halbe zu erhalten, muß man das Ganze geradezu in 2 gleiche Theile theilen, ebenſo um Drittel, 5tel, 7tel, 11tel zu erhalten.

Um 4tel zu erhalten, theile man das Ganze zuerſt in 2 gleiche Theile, und dann wieder jeden Theil in 2 gleiche Theile, ſo hat das Ganze $2 \times 2 = 4$ gleiche Theile, alſo Viertel.

Will man 6tel haben, ſo theile man das Ganze zuerſt in 2, und dann jeden dieſer Theile wieder in 3 gleiche Theile, oder zuerſt das Ganze in 3 und dann jeden Theil wieder in 2 gleiche Theile.

Wenn man ein Ganzes in 2, dann jeden Theil wieder in 2, und darauf jeden der letzten Theile wieder in 2 gleiche Theile theilt, ſo hat man das Ganze in 2.2.2 oder in 8 gleiche Theile getheilt. ꝛc.

Dieſe Theilungen müſſen die Schüler wirklich darſtellen; oder der Lehrer zeigt den Schülern eine Tafel vor, auf welcher die Theilung der Ganzen in dieſer Art dargeſtellt iſt. Eine ſolche Tafel findet man am Ende des Buches. Der Lehrer muß aber dieſe Tafel in einem vergrößerten Maßſtabe entwerfen, damit jeder Schüler von ſeinem Platze aus jedes Ganze und ſeine Theile erkenne.

Theilt man ein Ganzes in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. gleiche Theile, und darauf jeden dieſer Theile wieder in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. gleiche Theile: ſo wird das Ganze dadurch in wie viele gleiche Theile getheilt?

Theilt man das Ganze in 2 und jeden Theil wieder in 2 gleiche Theile, ſo wird das Ganze in 2×2 oder 4 gleiche Theile getheilt.

Digitized by Google

Theilt man das Ganze in 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 gleiche Theile, und jeden Theil wieder in 2 gleiche Theile, so wird das Ganze in 3.2 oder 6, in 4.2 oder 8, in 5.2 oder 10, in 6.2 oder 12, in 7.2 oder 14, in 8.2 oder 16, in 9.2 oder 18, in 10.2 oder 20 gleiche Theile getheilt.

Die Schüler haben jede einzelne Theilung eines Ganzen in einem Satze, wie hier den ersten, auszusprechen.

B. Verwandlung der Ganzen und Brüche in Brüche.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ꝛc. Ganze enthalten wie viele Halbe, Drittel, Viertel ꝛc.?

2 Ganze $= 2 \times \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$; 2 Ganze $= 2 . \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$; 2 Ganze $= 2 . \frac{4}{4} = \frac{8}{4}$;
3 " $= 3 \times \frac{2}{2} = \frac{6}{2}$; 3 " $= 3 . \frac{3}{3} = \frac{9}{3}$; 3 " $= 3 . \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$;
4 " $= 4 \times \frac{2}{2} = \frac{8}{2}$; 4 " $= 4 . \frac{3}{3} = \frac{12}{3}$; 4 " $= 4 . \frac{4}{4} = \frac{16}{4}$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

5 Ganze und $\frac{1}{2}$ von einem Ganzen sind wie viele Drittel? Antw. $5\frac{1}{2} = \frac{16}{3}$.
6 " " $\frac{2}{3}$ " " " " " " " " $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.
7 " " $\frac{1}{4}$ " " " " " " " Viertel? " $7\frac{1}{4} = \frac{29}{4}$.
8 " " $\frac{2}{4}$ " " " " " " " " $8\frac{2}{4} = \frac{34}{4}$.
9 " " $\frac{3}{4}$ " " " " " " " " $9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$.

Eben so werden Ganze und 5tel, Ganze und 6tel ꝛc. in 5tel, 6tel ꝛc. verwandelt.

C. Verwandlung der unechten Brüche in Ganze und echte Brüche.

Ein Bruch, der kleiner als ein Ganzes ist, heißt ein echter, der gleich einem Ganzen oder größer als ein Ganzes ist, ein unechter Bruch. Die Zähler der echten Brüche sind daher kleiner als ihre Nenner, die Zähler der unechten Brüche sind entweder eben so groß oder größer als ihre Nenner. Daher sind $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ ꝛc. echte Brüche; $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ ꝛc. unechte Brüche.

Die unechten Brüche sind entweder eigentliche oder uneigentliche Brüche, und zwar sind eigentliche Brüche solche, welche in Ganze verwandelt eine gewisse Zahl Ganze und einen echten Bruch geben; uneigentliche Brüche solche, welche in Ganze verwandelt eine gewisse Zahl Ganze und keinen Bruch geben. Daher sind die Zähler der eigentlichen Brüche keine Vielfachen ihrer Nenner; die Zähler der uneigentlichen Brüche sind Vielfache ihrer Nenner.

Folgende uneigentlichen Brüche $\frac{2}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{20}{4}$, $\frac{30}{5}$, $\frac{42}{7}$, ꝛc. in Ganze zu verwandeln. $\frac{2}{2} = 3$, $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{20}{4} = 5$, $\frac{30}{5} = 6$, $\frac{42}{7} = 6$ ꝛc. Ganzen.

Folgende unechten Brüche in Ganze und Brüche zu verwandeln: $\frac{17}{2}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{39}{5}$, $\frac{44}{6}$, $\frac{43}{7}$, $\frac{63}{8}$ ꝛc. $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$, $\frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$, $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$, $\frac{30}{5} = 7\frac{4}{5}$, $\frac{44}{6} = 7\frac{2}{6} = 7\frac{1}{3}$ ꝛc.

Die Eintheilung der Brüche kann auch so geschehen: zuerst in eigentliche, also in solche, deren Zähler nicht Vielfache ihrer Nenner sind, und in uneigentliche, also in solche, deren Zähler Vielfache ihrer Nenner sind. Dann

Digitized by Google

theilt man wieder die eigentlichen Brüche in echte, also in solche, deren Zähler kleiner als ihre Nenner, und in unechte, also in solche, deren Zähler größer als ihre Nenner sind. Diese Eintheilung der Brüche dürfte vor der obigen einen Vorzug haben.

D. Berechnung eines und mehrerer Theile von mehreren Ganzen.

Welches ist die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel ꝛc. von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ꝛc., 20, 30, 40, 50 ꝛc. Ganzen?

$\frac{1}{2}$ von 3 G. = 1 G. und $\frac{1}{2}$ von 1 G.
$\frac{1}{2}$ » 4 G. = 2 G.
$\frac{1}{2}$ » 5 G. = 2 G. » $\frac{1}{2}$ » 1 G.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.
$\frac{1}{2}$ von 17 G. = 8 G. und $\frac{1}{2}$ von 1 G.
$\frac{1}{2}$ » 25 G. = 12 G. » $\frac{1}{2}$ » 1 G.
$\frac{1}{2}$ » 33 G. = 16 G. » $\frac{1}{2}$ » 1 G.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{1}{3}$ von 2 G. = $\frac{2}{3}$ von 1 G.
$\frac{1}{3}$ » 3 G. = 1 G.
$\frac{1}{3}$ » 4 G. = 1 G. und $\frac{1}{3}$ von 1 G.
$\frac{1}{3}$ » 5 G. = 1 G. » $\frac{2}{3}$ » 1 G.
$\frac{1}{3}$ » 19 G. = 6 G. » $\frac{1}{3}$ » 1 G.
$\frac{1}{3}$ » 26 G. = 8 G. » $\frac{2}{3}$ » 1 G.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie groß ist der 13te Theil von 278 Ganzen?

Aufl. Man zerlege die gegebene Zahl in Zehner und Einer, und die Zehner in ein Vielfaches von dem gegebenen Nenner; dann die Einer in ein Vielfaches vom Nenner und in eine andere Zahl, die kleiner als der Nenner ist.

Also 278 = 273 + 8E = 263 + 18E = 263 + 13E + 5E. Nun ist der 13te Theil von 263 = 23, der 13te Theil von 13E = 1E, und der 13 Theil von 1 Ganzen = $\frac{1}{13}$, der 13te Theil von 5 Ganzen = $\frac{5}{13}$ eines Ganzen; daher ist der 13te Theil von 278 Ganzen = 21 Ganzen + $\frac{5}{13}$ von 1 Ganzen = $21\frac{5}{13}$ Ganzen.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ ꝛc. von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. Ganzen betragen?

$\frac{1}{2}$ von 2 G. = $\frac{2}{2}$ von 1 G.; also $\frac{3}{2}$ von 2 G. = 2 × $\frac{3}{2}$ von 1 G. = $\frac{6}{2}$ von 1 G. = $1\frac{1}{2}$ mal 1 G.
$\frac{1}{3}$ von 3 G. = 1 G.; also $\frac{2}{3}$ von 3 G. = 2 × 1 G. = 2 G.
$\frac{1}{4}$ von 4 G. = $\frac{4}{4}$ von 1 G.; also $\frac{3}{4}$ von 4 G. = 2 × $\frac{4}{4}$ von 1 G. = $\frac{8}{4}$ von 1 G. = $2\frac{2}{3}$ × 1 G.
$\frac{1}{5}$ von 5 G. = $\frac{5}{5}$ von 1 G.; also $\frac{4}{5}$ von 5 G. = 2 × $\frac{4}{5}$ von 1 G. = $\frac{10}{5}$ von 1 G. = $3\frac{1}{3}$ × 1 G. ꝛc. ꝛc.

Diese Berechnungen werden nur in kleinen Zahlen geübt, und nach dem Vorhergehenden wird es leicht sein, jede Aufgabe dieser Art zu berechnen.

$\frac{8}{9}$ von 75 Ganzen ist wie viel?

Aufl. Der 9te Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{9}$ eines Ganzen; daher ist der 9te Theil von 75 Ganzen = $\frac{75}{9}$ eines Ganzen = $\frac{72}{9} + \frac{3}{9} = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$ mal 1 Ganzes. $\frac{3}{9} = 5 \times \frac{1}{9}$; also $\frac{8}{9}$ von 75 G. = 5 × $8\frac{1}{3}$ = $40\frac{5}{3}$ = $41\frac{2}{3}$ mal 1 Ganzes.

Digitized by Google

Anmerk. Man theilt die Zahlen in ganze, gebrochene und gemischte Zahlen ein, und versteht unter einer ganzen Zahl eine solche, die ein Vielfaches von einem Ganzen ist, unter einer gebrochenen Zahl Theile eines Ganzen, also einen Bruch, er sei echt oder unecht, und unter einer gemischten Zahl eine solche, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht. Daher ist 3 Ganze eine ganze, $\frac{5}{7}$ eines Ganzen eine gebrochene Zahl und $4\frac{1}{2}$ eines Ganzen eine gemischte Zahl. Diese Zahlen werden in der Regel ohne den Zusatz eines Ganzen genannt und geschrieben; man muß aber dabei immer ein Ganzes sich denken, der Zusatz bleibt nur der Kürze wegen weg, und diese kurze Benennung wird auch im Nachfolgenden gebraucht werden.

E. Vervielfachung der Brüche.

Einige der vorhergehenden Aufgaben enthielten bereits Vervielfachung eines Bruches, doch fordert die Wichtigkeit dieser Rechnungsart noch eine besondere Auseinandersetzung derselben.

14 mal $\frac{1}{8}$ beträgt wie viel?

Aufl. $14 \times 7 = 98$, also 14 × 7 Achtel = 98 Achtel = $\frac{98}{8}$ = $\frac{96}{8} + \frac{2}{8} = 12\frac{1}{4}$. Bei der Vervielfältigung eines Bruches nimmt man also nur auf den Zähler Rücksicht, und läßt den Nenner vorläufig unbeachtet; dann giebt man dem Produkte als Zähler den gegebenen Nenner zum Nenner. Es ist dieses dasselbe Verfahren, welches man befolgt, wenn man Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. vervielfacht; z. B. $7 \times 5\,\text{E} = 35\,\text{E}$, $8 \times 3\,\text{Z} = 24\,\text{Z}$. ꝛc. Der Nenner eines Bruches ist nur die Benennung der Theile, der Bruch selbst ist ein Vielfaches von einem Theile, welchen man als die Einheit des Bruches betrachten kann.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. mal $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{9}$ ꝛc. ist wie viel?

$2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$; $2 \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$;
$3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$; $3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$; $3 \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$;
$4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; $4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$; $4 \times \frac{4}{7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$2 \times \frac{7}{9} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$; $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$; $2 \times \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$;
$3 \times \frac{7}{9} = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}$; $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; $3 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$;
$4 \times \frac{7}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$; $4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$; $4 \times \frac{5}{6} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Aus I. F. Seite 68 dieses Abschnittes ist es bekannt, daß wenn man Zähler und Nenner eines Bruches durch ihr gemeines Maß mißt, die Maßzahlen einen Bruch darstellen, der gleich dem gegebenen Bruche ist. Dieser Satz kann die Vervielfältigung der Brüche sehr vereinfachen und zwar in allen den Fällen, in welchen der Multiplikator und der Nenner eines Bruches ein gemeines Maß haben. Z. B. $18 \times \frac{7}{12} = \frac{18 \cdot 7}{12}$. Nun haben 18 und 12 zum größten gemeinen Maße 6 und werden nach den Zahlen 3 und 2 gemessen; daher ist $\frac{18 \cdot 7}{12} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$. Solcher Aufgaben müssen

Digitized by Google

recht viele den Schülern vorgelegt werden, die sie nicht anders als durch Wegschaffung des gemeinen Maßes berechnen.

Z. B. $15 \times \frac{7}{10}$, $14 \times \frac{13}{21}$, $16 \times \frac{17}{24}$, $18 \times \frac{19}{27}$, $20 \times \frac{8}{16}$, $21 \times \frac{9}{28}$, $22 \times \frac{7}{33}$, ꝛc.

Hieraus geht folgender Satz hervor: Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl vervielfacht, so erhält man wieder einen Bruch, der zum Zähler das Produkt aus der ganzen Zahl und dem Zähler und zum Nenner den Nenner des gegebenen Bruches hat.

F. Theilung und Vervielfachung der Brüche.

Aehnliche Berechnungen sind bereits Seite 61 C. gewesen; doch in einer andern Beziehung als es hier geschieht.

Der 7te von dem 8ten Theile eines Ganzen ist welcher Theil desselben?

Aufl. 1. Will man den 7ten Theil von $\frac{1}{8}$ haben, so muß man diesen in 7 gleiche Theile theilen; also hat $\frac{1}{8}$ 7 gleiche Theile; daher haben $\frac{8}{8}$ oder das Ganze 8 . 7 oder 56 jener Theile. Wenn aber das Ganze 56 gleiche Theile hat, so ist einer derselben $\frac{1}{56}$ des Ganzen. Folglich ist der 7te vom 8ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{56}$ desselben.

Der 2te, 3te, 4te, 5te, 6te ꝛc. von dem 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten ꝛc. Theile eines Ganzen ist welcher Theil desselben.

Der 2te von dem 2ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{4}$ desselben;
» 2te » » 3ten » » » $= \frac{1}{6}$ »
» 2te » » 4ten » » » $= \frac{1}{8}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 3te von dem 2ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{6}$ desselben;
» 3te » » 3ten » » » $= \frac{1}{9}$ »
» 3te » » 4ten » » » $= \frac{1}{12}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 4te von dem 2ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{8}$ desselben;
» 4te » » 3ten » » » $= \frac{1}{12}$ »
» 4te » » 4ten » » » $= \frac{1}{16}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 5te von dem 2ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{10}$ desselben;
» 5te » » 3ten » » » $= \frac{1}{15}$ »
» 5te » » 4ten » » » $= \frac{1}{20}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 6te von dem 2ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{12}$ desselben;
» 6te » » 3ten » » » $= \frac{1}{18}$ »
» 6te » » 4ten » » » $= \frac{1}{24}$ »
» 6te » » 5ten » » » $= \frac{1}{30}$ »
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

Der 8te Theil von $\frac{5}{6}$ eines Ganzen ist welcher Bruch desselben?

Aufl. 2. Der 8te Theil von $\frac{1}{6}$ eines Ganzen ist $\frac{1}{7\cdot2}$ desselben (nach Aufl. 1.); also ist der 8te Theil von jedem einzelnen 9tel $= \frac{1}{72}$; daher muß der 8te Theil von $\frac{5}{6}$ eines Ganzen $= \frac{5}{72}$ desselben sein.

In manchen Fällen kann diese Rechnung verkürzt werden, und zwar in denjenigen, in welchen der Zähler des zweiten Bruches ein Vielfaches von dem Nenner des ersten ist. Z. B. Der 7te Theil $(\frac{1}{7})$ von $\frac{2}{3}\frac{1}{2}$ eines Ganzen $= \frac{3}{3\cdot2}$ desselben. Denn $\frac{1}{7}$ von $21 = 3$; also $\frac{1}{7}$ von 21 Zweiunddreißigstel $= 3$ Zweiunddreißigstel $= \frac{3}{3\cdot2}$ eines Ganzen. Daher $\frac{1}{7}$ von $\frac{2}{2}\frac{4}{5} = \frac{6}{2\cdot5}$ eines Ganzen.

Wenn man also einen Theil von einem Bruche nehmen soll, dessen Zähler ein Vielfaches von dem ersten Nenner ist, so nimmt man nur den gesuchten Theil von dem Zähler des zweiten Bruches, unbekümmert um den Nenner desselben, und giebt dann dem gefundenen Theile als Zähler den Nenner des zweiten Bruches zum Nenner.

Der 2te, 3te, 4te, 5te, 6te ꝛc. Theil von $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$ ꝛc. eines Ganzen giebt welchen Bruch desselben?

Der 2te Theil von $\frac{2}{3}$ eines Ganzen $= \frac{1}{3}$ desselben.
" 2te " " $\frac{3}{4}$ " " $= \frac{3}{8}$ "
" 2te " " $\frac{4}{5}$ " " $= \frac{2}{5}$ "
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 3te Theil von $\frac{2}{3}$ eines Ganzen $= \frac{2}{9}$ desselben.
" 3te " " $\frac{3}{4}$ " " $= \frac{1}{4}$ "
" 3te " " $\frac{4}{5}$ " " $= \frac{4}{15}$ "
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 4te Theil von $\frac{2}{3}$ eines Ganzen $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ desselben.
" 4te " " $\frac{3}{4}$ " " $= \frac{3}{16}$ desselben.
" 4te " " $\frac{4}{5}$ " " $= \frac{1}{5}$ "
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 5te Theil von $\frac{2}{3}$ eines Ganzen $= \frac{2}{15}$ desselben.
" 5te " " $\frac{3}{4}$ " " $= \frac{3}{20}$ "
" 5te " " $\frac{4}{5}$ " " $= \frac{4}{25}$ "
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{7}{8}$ von $\frac{1}{10}$ eines Ganzen ist welcher Bruch desselben?

Aufl. 3. $\frac{7}{8}$ ist das 7fache von $\frac{1}{8}$; also $\frac{7}{8}$ von $\frac{1}{10}$ ist das 7fache von $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{10}$ eines Ganzen. $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{10} = \frac{1}{80}$ des Ganzen; daher ist $\frac{7}{8}$ von $\frac{1}{10}$ eines Ganzen $=$ dem 7fachen von $\frac{1}{80} = \frac{7}{80}$ desselben.

$\frac{6}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{12}$ ꝛc. von $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ ꝛc. eines Ganzen ist welcher Bruch desselben?

$\frac{6}{7}$ von $\frac{1}{6}$ eines Ganzen $= \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ dess. $\frac{5}{8}$ von $\frac{1}{6}$ eines Ganzen $= \frac{5}{48}$ dess.
$\frac{6}{7}$ " $\frac{1}{7}$ " " $= \frac{6}{49}$ dess. $\frac{5}{8}$ " $\frac{1}{7}$ " " $= \frac{5}{56}$ "
$\frac{6}{7}$ " $\frac{1}{8}$ " " $= \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$ dess. $\frac{5}{8}$ " $\frac{1}{8}$ " " $= \frac{5}{64}$ "
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

$\frac{4}{5}$ von $\frac{1}{6}$ eines Ganzen $= \frac{4}{5 \cdot 4} = \frac{2}{7 \cdot 7}$ desſ. $\frac{7}{10}$ von $\frac{1}{6}$ eines Ganzen $= \frac{7}{60}$ desſ.

$\frac{4}{9}$ » $\frac{1}{7}$ » » $= \frac{4}{63}$ desſ. $\frac{7}{10}$ » $\frac{1}{7}$ » » $= \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ desſ.

$\frac{4}{9}$ » $\frac{1}{8}$ » » $= \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$ desſ. $\frac{7}{10}$ » $\frac{1}{8}$ » » $= \frac{7}{80}$ desſ.

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{4}{7}$ von $\frac{8}{9}$ eines Ganzen iſt welcher Bruch desſelben?

Aufl. 4. $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{9}$ eines Ganzen $= \frac{1}{63}$ desſelben, und $\frac{1}{7}$ von $\frac{8}{9}$ des Ganzen $= \frac{8}{63}$ desſelben; daher $\frac{4}{7}$ von $\frac{8}{9}$ eines Ganzen $= 4$ mal $\frac{8}{63} = \frac{32}{63}$ desſelben.

Hieraus geht der Satz hervor: Wenn man einen Bruch von einem Bruche eines Ganzen nimmt, ſo erhält man den Bruch desſelben, wenn man die Zähler der gegebenen Brüche mit einander und die Nenner derſelben mit einander multiplicirt, oder ein Bruch von einem Bruche eines Ganzen iſt gleich einem Bruche desſelben, der zum Zähler das Produkt der Zähler und zum Nenner das Produkt der Nenner der gegebenen Brüche hat.

Nach dieſer Regel ſagt man auch einen Bruch mal einen Bruch eines Ganzen, anſtatt einen Bruch von einem Bruche eines Ganzen zu nehmen. Daher $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{16}$ ꝛc. mal $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$ ꝛc. eines Ganzen iſt welcher Bruch desſelben?

Bemerkt man zwiſchen Zähler und Nenner des neuen Bruches ein gemeines Maß, ſo muß dieſes jedesmal durch Meſſung mit demſelben weggeſchafft werden, und zwar vor der Multiplikation, welche man vorläufig nur durch Zeichen andeutet. Die folgenden Berechnungen werden das Genauere darüber lehren.

$\frac{7}{12} \times \frac{3}{10}$ eines Ganzen $= \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 10} = \frac{7}{40}$ desſelben.

$\frac{7}{12} \times \frac{4}{10}$ » » $= \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 1}{3 \cdot 10} = \frac{7}{30}$ »

$\frac{7}{12} \times \frac{5}{12}$ » » $= \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 12} = \frac{35}{144}$ desſelben.

$\frac{7}{12} \times \frac{6}{13}$ » » $= \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 13} = \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 13} = \frac{7}{26}$ desſelben.

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$\frac{8}{13} \times \frac{3}{10}$ eines Ganzen $= \frac{8 \cdot 3}{13 \cdot 10} = \frac{4 \cdot 3}{13 \cdot 5} = \frac{12}{65}$ desſelben.

$\frac{8}{13} \times \frac{4}{11}$ » » $= \frac{8 \cdot 4}{13 \cdot 11} = \frac{32}{143}$ desſelben.

$\frac{8}{13} \times \frac{5}{12}$ » » $= \frac{8 \cdot 5}{13 \cdot 12} = \frac{2 \cdot 5}{13 \cdot 3} = \frac{10}{39}$ desſelben.

$\frac{8}{13} \times \frac{6}{13}$ » » $= \frac{8 \cdot 6}{13 \cdot 13} = \frac{48}{169}$ desſelben.

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

G. Multiplikation ganzer und gebrochener Zahlen mit ganzen und gebrochenen Zahlen.

Hier kann nur ein Verfahren gelehrt werden, welches darin beſteht, daß man die Ganze in die nebenſtehenden Brüche verwandelt, und dann nach dem Vorhergehenden die Multiplikation ausführt. Ein anderes Verfahren ſpäter nach der Addition der Brüche.

4 mal $8\frac{5}{9}$ eines Ganzen giebt wie viele Ganze?

Aufl. 1. Man verwandle die 8 Ganze in 9tel und nehme die $\frac{5}{9}$ dazu,

Digitized by Google

also 1 Ganzes $= \frac{9}{9}$, 8 Ganze $= 8 \times \frac{9}{9} = \frac{72}{9}$ und $\frac{5}{9}$ dazu sind $\frac{77}{9}$; daher 4 mal $8\frac{5}{9} = 4$ mal $\frac{77}{9} = \frac{308}{9} = 34\frac{2}{9}$ Ganze.

Oder: 4 mal $8\frac{5}{9}$ Ganze $= 4 \times (8 + \frac{5}{9}) = 4 \times 8 + 4 \times \frac{5}{9} = 32 + \frac{20}{9} = 34\frac{2}{9}$ Ganze.

2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. mal $2\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $5\frac{2}{5}$, $8\frac{5}{6}$ ꝛc. giebt wie viele Ganze?

$2 \times 2\frac{1}{2} = 2 \times (2 + \frac{1}{2}) = 2.2 + 2.\frac{1}{2} = 4 + \frac{2}{2} = 5$;
$2 \times 3\frac{2}{3} = 2 \times (3 + \frac{2}{3}) = 2.3 + 2.\frac{2}{3} = 6 + \frac{4}{3} = 7\frac{1}{3}$;
$2 \times 4\frac{3}{4} = 2 \times (4 + \frac{3}{4}) = 2.4 + 2.\frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{2} = 9\frac{1}{2}$;
$2 \times 5\frac{2}{5} = 2 \times (5 + \frac{2}{5}) = 2.5 + 2.\frac{2}{5} = 10 + \frac{4}{5} = 10\frac{4}{5}$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$3 \times 2\frac{1}{2} = 3 \times (2 + \frac{1}{2}) = 3.2 + 3.\frac{1}{2} = 6 + \frac{3}{2} = 7\frac{1}{2}$;
$3 \times 3\frac{2}{3} = 3 \times (3 + \frac{2}{3}) = 3.3 + 3.\frac{2}{3} = 9 + 2 = 11$;
$3 \times 4\frac{3}{4} = 3 \times (4 + \frac{3}{4}) = 3.4 + 3.\frac{3}{4} = 12 + \frac{9}{4} = 14\frac{1}{4}$;
$3 \times 5\frac{2}{5} = 3 \times (5 + \frac{2}{5}) = 3.5 + 3.\frac{2}{5} = 15 + \frac{6}{5} = 16\frac{1}{5}$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$8\frac{6}{7}$ mal $\frac{8}{9}$ eines Ganzen giebt wie viele Ganze?

Aufl. 2. $8\frac{6}{7} = \frac{56}{7} + \frac{6}{7} = \frac{62}{7}$; also $8\frac{6}{7} \times \frac{8}{9} = \frac{62.8}{7.9} = \frac{496}{63} = 7\frac{55}{63}$ eines Ganzen.

Um die Zahl der Ganzen zu finden, muß man Vielfache vom Nenner bilden, und zwar so weit, bis man auf 2 nach einander folgende Vielfache kommt, von denen das eine kleiner, das andere größer als der Zähler des neuen Bruches ist, so ist der Multiplikator des kleinern Vielfachen die gesuchte Zahl der Ganzen und den Bruch desselben erhält man durch Subtraktion des erwähnten Vielfachen von dem Zähler.

Das 7fache von $63 = 441 < 496$; das 8fache von $63 = 504 > 496$ ꝛc.

$2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{3}$, $8\frac{5}{6}$ ꝛc. mal $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{12}$ ꝛc. eines Ganzen giebt wie viele Ganze?

$2\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{7.4}{3.7} = \frac{1.4}{3.1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; ꝛc.
$4\frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{17}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{17.5}{4.8} = \frac{85}{32} = 2\frac{21}{32}$; ꝛc.
$7\frac{2}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{37}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{37.7}{5.9} = \frac{259}{45} = 5\frac{34}{45}$; ꝛc.
$8\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{53}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{53.3}{6.10} = \frac{53.1}{2.10} = \frac{53}{20} = 2\frac{13}{20}$; ꝛc.

$4\frac{6}{7}$ mal $3\frac{5}{8}$ giebt wie viele Ganze?

Aufl. 3. $4\frac{6}{7} = \frac{34}{7}$; $3\frac{5}{8} = \frac{29}{8}$; also $4\frac{6}{7} \times 3\frac{5}{8} = \frac{34}{7} \times \frac{29}{8} = \frac{34.29}{7.8} = \frac{17.29}{7.4} = \frac{493}{28} = 17\frac{17}{28}$ Ganze.

$5\frac{1}{2}$, $6\frac{2}{3}$, $7\frac{3}{4}$, $8\frac{4}{5}$ ꝛc. mal $9\frac{5}{6}$, $10\frac{2}{7}$, $11\frac{3}{8}$, $12\frac{4}{9}$ ꝛc. giebt wie viele Ganze?

$5\frac{1}{2} \times 9\frac{5}{6} = \frac{11}{2} \times \frac{59}{6} = \frac{11.59}{2.6} = \frac{649}{12} = 54\frac{1}{12}$; ꝛc.
$6\frac{2}{3} \times 10\frac{2}{7} = \frac{20}{3} \times \frac{72}{7} = \frac{20.72}{3.7} = \frac{20.24}{1.7} = \frac{480}{7} = 68\frac{4}{7}$; ꝛc.
$7\frac{3}{4} \times 11\frac{3}{8} = \frac{31}{4} \times \frac{91}{8} = \frac{31.91}{4.8} = \frac{2821}{32} = 88\frac{5}{32}$; ꝛc.
$8\frac{4}{5} \times 12\frac{4}{9} = \frac{44}{5} \times \frac{112}{9} = \frac{44.112}{45} = \frac{4928}{45} = 109\frac{23}{45}$; ꝛc.

Das letzte Beispiel kann auch so berechnet werden: $\frac{44}{5} \times \frac{112}{9} = \frac{44.112}{5.9} = \frac{112.44}{45} = 112 \times \frac{44}{45}$; an $\frac{44}{45}$ fehlt nur $\frac{1}{45}$ bis zu einem Ganzen; also

Digitized by Google

$\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$; also $112 \times \frac{4}{5} = 112 \times (1 - \frac{1}{5}) = 112 - \frac{112}{5} = 112 - 22\frac{2}{5}$. Nun ist $112 - 2 = 110$; und es bleibt noch $\frac{2}{5}$ von 110 hinwegzunehmen. Man nehme 1 Ganzes von 110 Ganzen, so bleiben noch 109 Ganze, und von dem 1 Ganzen $= \frac{5}{5}$ nehme man $\frac{2}{5}$ hinweg; nun ist $45 - 22 = 23$; also $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$; also ist die gesuchte Zahl $= 109\frac{3}{5}$.

II. Verwandlung gegebener Brüche in andere, deren Nenner gegeben sind.

Der Nenner des Bruches, in welchen der gegebene verwandelt werden soll, kann entweder ein Vielfaches oder nicht ein Vielfaches von dem Nenner des gegebenen Bruches sein; der erste Fall führt auf einen einfachen, der andere auf einen Doppelbruch.

Einen Bruch in einen andern verwandeln heißt einen Bruch finden, der dem gegebenen gleich ist.

$\frac{1}{7}$ enthält wie viele 35tel?

Aufl. 1. $\frac{1}{7}$ ist der 7te Theil von 1 Ganzen; 1 Ganzes ist gleich $\frac{35}{35}$; also ist $\frac{1}{7}$ der 7te Theil von $\frac{35}{35}$; der 7te Theil von 35 ist 5; also ist der 7te Theil von $\frac{35}{35} = \frac{5}{35}$; daher ist $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ enthält wie viele 12tel?

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$ Ganzes $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{12} = \frac{6}{12}$.
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1$ „ $= \frac{1}{3} \times \frac{12}{12} = \frac{4}{12}$.
$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 1$ „ $= \frac{1}{4} \times \frac{12}{12} = \frac{3}{12}$.
$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 1$ „ $= \frac{1}{6} \times \frac{12}{12} = \frac{2}{12}$.

In der vorstehenden Aufl. fällt es kleinen Kindern, ja manchen von 10 bis 12 Jahren schwer, den Schlußsatz: „also ist $\frac{1}{7}$ der 7te Theil von $\frac{35}{35}$“ zu fassen. Um sie zu diesem Schlusse zu führen, lege man ihnen bekannte Urtheile vor, und lasse sie aus dem ersten und letzten Urtheile ein neues bilden. Z. B. Die Eiche ist ein Baum, der Baum ist eine Pflanze: was folgt daraus? Die Eiche ist eine Pflanze. Der Mann ist ein Mensch, der Mensch gehört zu den vernünftigen Wesen; also gehört der Mann zu den vernünftigen Wesen. ꝛc.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ enthält wie viele 24stel?

$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$ enthält wie viele 30stel?

$\frac{1}{9}$ enthalten wie viele 36stel?

Aufl. 2. $\frac{7}{9}$ = dem 7fachen von $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ (nach Aufl. 1.); also $\frac{7}{9}$ = dem 7fachen von $\frac{4}{36} = \frac{28}{36}$.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{13}{24}$ enthalten wie viele 48stel?

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{32}{48}$; $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48}$; $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{18}{48}$;
$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{28}{48}$; $\frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{27}{48}$; $\frac{13 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{26}{48}$.

Aus diesen Beispielen folgt dieser Satz: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches durch gleiche Zahlen vervielfacht, so erhält man einen Bruch, der gleich dem gegebenen Bruche ist.

Um also einen gegebenen Bruch in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem Nenner des gegebenen Bruches ist, messe

Digitized by Google

man jenen Nenner durch diesen, und vervielfältige darauf Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch die gefundene Maßzahl. Z. B. $\frac{5}{7}$ sind wie viele 63stel? 63 durch 7 gemessen, giebt zur Maßzahl 9; also $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{45}{63}$.

$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{19}{36}$ sind wie viele 72stel?

Nun folgt die Verwandlung der Brüche in solche, deren Nenner nicht ein Vielfaches von den Nennern der gegebenen Brüche sind.

$\frac{1}{8}$ enthält wie viele 19tel?

Aufl. 3. $\frac{1}{8}$ ist der 8te Theil von 1 Ganzen; das Ganze ist $= \frac{19}{19}$; also ist $\frac{1}{8}$ der 8te Theil von $\frac{19}{19}$; der 8te Theil von 19 ist $2\frac{3}{8}$; daher ist der 8te Theil von 19 Neunzehntel $= 2\frac{3}{8}$ Neunzehntel $= \frac{2\frac{3}{8}}{19}$; folglich ist $\frac{1}{8} = \frac{2\frac{3}{8}}{19}$. Man vergl. Aufl. unter E. dieses Kapitels.

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ ꝛc. sind wie viele Zehntel?

$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 10}{10} = \frac{3\frac{1}{3}}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 10}{10} = \frac{2\frac{1}{2}}{10}$; $\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 10}{10} = \frac{1\frac{7}{7}}{10}$; $\frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 10}{10}$ $= \frac{1\frac{3}{7}}{10}$; $\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{8} \cdot 10}{10} = \frac{1\frac{1}{4}}{10}$; $\frac{1}{9} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 10}{10} = \frac{1\frac{1}{9}}{10}$.

$\frac{3}{4}$ sind wie viele 15tel?

Aufl. 4. $\frac{3}{4}$ = dem 3fachen von $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 15}{15} = \frac{3\frac{3}{4}}{15}$; also $\frac{1}{4}$ = dem 3fachen von $\frac{3\frac{3}{4}}{15} = \frac{3 \cdot (3\frac{3}{4})}{15} = \frac{9\frac{3}{4}}{15} = \frac{11\frac{1}{4}}{15}$. Siehe Aufl. 4. unter F.

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$ sind wie viele 12tel?

Solche Verwandlungen kommen im bürgerlichen Verkehr sehr häufig vor. Die letzte Aufgabe bezieht sich auf die Verwandlung der Brüche von Silbergroschen in Pfennige.

Um Brüche von Scheffeln in Metz zu verwandeln, hat man folgende Aufgabe: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{9}$ ꝛc. sind wie viele 16tel? Denn 1 Scheffel = 16 Metz. Zur Verwandlung der Brüche von Thalern in Sgr. hat man folgende Beispiele: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{12}$ ꝛc. sind wie viele 30stel? Weil 1 Thlr. = 30 Sgr. Ebenso kann man Brüche von Fuß in Zoll, 1 F. = 12 Z.; Brüche von Pfunden in Lothe, 1 Pf. = 32 Loth, ꝛc. verwandeln.

I. Ueber das Aufsuchen des allgemeinen oder General-Nenners.

Der allgemeine Nenner oder Generalnenner gegebener Nenner ist derjenige Nenner, welcher ein Vielfaches von jedem gegebenen Nenner ist.

Nun ist aber das Produkt zweier oder mehrer Faktoren ein Vielfaches von jedem einzelnen Faktor. Z. B. $3 \cdot 4 = 12$, und 12 = dem 4fachen von 3 = dem 3fachen von 4. Ferner $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; daher ist 24 = dem 12fachen von 2 = dem 8fachen von 3 = dem 6fachen von 4. ꝛc.

Dieser Satz wird den Kindern an vielen Beispielen klar gemacht.

Welches ist das Produkt der Zahlen 3, 4, 5, und dieses Produkt ist welche Vielfache von jedem Faktor? Das gesuchte Produkt ist 60, und 60

Digitized by Google

ist das 4×5= oder 20fache von 3, das 3×5= oder 15fache von 4, das 3×4= oder 12fache von 5.

Welches ist das Produkt der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6; und dieses Produkt ist welche Vielfache von jedem Faktor?

Das gesuchte Produkt ist $= 2.3.4.5.6 = 720$. Ferner ist 720 = dem $3.4.5.6$= oder 360fachen von 2 = dem $2.4.5.6$= oder 240fachen von 3 = dem $2.3.5.6$= oder 180fachen von 4 = dem $2.3.4.6$= oder 144fachen von 5 = dem $2.3.4.5$= oder 120fachen von 6.

Man wird die Bemerkung gemacht haben, daß es nicht nothwendig ist, das Produkt durch den Faktor zu theilen, von welchem es ein Vielfaches sein soll, um dieses Vielfache zu finden, sondern man kann den Multiplikator des Vielfachen unmittelbar durch Multiplikation finden; er ist nämlich das Produkt aller Faktoren außer demjenigen, welcher der Multiplikandus des gesuchten Vielfachen ist.

Hat man also 3tel und 4tel, so ist der allgemeine Nenner $= 3.4 = 12$; hat man 3tel, 4tel, 6tel, so ist der allgemeine Nenner $= 3.4.6 = 72$. ꝛc.

Aber nicht etwa nur 72 ist der allgemeine Nenner der gegebenen 3, 4, 6, sondern jedes Vielfache von 72, also $2.72 = 144$, $3.72 = 216$, ꝛc. Es ist aber auch 36, wie auch 24 ein allgemeiner Nenner der gegebenen 3, 4, 6; denn 24 = dem 8fachen von 3 = dem 6fachen von 4 = 4fachen von 6. Doch auch 24 ist nicht der kleinste allgemeine Nenner, sondern 12; und es ist 12 = dem 4fachen von 3 = dem 3fachen von 4 = dem 2fachen von 6.

Den kleinsten Generalnenner gegebener Nenner zu finden, ist die vorzügliche Aufgabe des Rechners, weil es sich mit kleinen Zahlen nicht allein rasch, sondern auch sicher rechnen läßt.

Welches ist der kleinste Generalnenner der gegebenen 12 und 18?

Aufl. 1. Das größte gemeine Maß zwischen 12 und 18 ist 6, 12 wird von 6 nach 2 und 18 von 6 nach 3 gemessen; so ist der kleinste Generalnenner $= 6.2.3 = 36$. Daß 36 ein Generalnenner ist, folgt daraus, daß 36 = dem 3fachen von 12 und = dem 2fachen von 18 ist.

Gäbe es eine kleinere Zahl, die ein Generalnenner von 12 und 18 wäre, so müßte sie gleichfalls Vielfache von 12 und 18 sein; da diese Zahl aber kleiner als 36 sein soll, und 36 das 2fache von 18 ist, so könnte sie nur das Einfache von 18 sein; das Einfache von 18 ist aber = 18, und 18 ist kein Vielfaches von 12; daher giebt es keine kleinere Zahl als 36, welche ein Generalnenner von 12 und 18 wäre; folglich ist 36 der kleinste allgemeine Nenner der gegebenen 12 und 18.

Noch ein Beispiel. Sind die gegebenen Nenner 40 und 56, so ist ihr größtes gemeine Maß 8, und 40 wird von 8 nach 5, 56 von 8 nach 7 gemessen; daher ist der kleinste allgemeine Nenner $= 8.5.7 = 280$.

Digitized by Google

Zuerst ist zu zeigen; daß 280 ein allgemeiner Nenner ist. Es ist 280 $= 8.5.7 = 40.7$, also das 7fache von 40, und $280 = 5.8.7 = 5.56 =$ dem 5fachen von 56; also ein Generalnenner.

Nun ist zu zeigen, daß 280 auch der kleinste Generalnenner ist. Würde 280 nicht der kleinste G.N. sein, so müßte es eine kleinere Zahl als 280 sein; und weil 280 das 5fache von 56 ist, so könnte die kleinere Zahl nur das 4=, 3=, 2= oder Einfache von 56 sein. Nun ist das 4fache von 56 $= 4.56 = 4.8.7$ kein Vielfaches von 40; also ist das 4fache von 56 nicht ein G.N. von 40 und 56. Ebenso kann man zeigen, daß auch das 3fache, das 2fache, das Einfache von 56 nicht ein Vielfaches von 40 ist: daher giebt es keine kleinere Zahl als 280, welche zugleich ein Vielfaches von 40 und 56 wäre. Folglich ist 280 der kleinste G.N.

Man könnte den kleinsten G.N. auch der Art finden, daß man Vielfache jedes gegebenen Nenners nach der natürlichen Ordnung der Zahlen bildete, und unter diesen Vielfachen das kleinste nähme, welches zugleich ein Vielfaches jedes Nenners ist. Z. B.

die Vielfachen von 40 sind: 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280 ꝛc.
" " " 56 " 56, 112, 168, 224, 280, 336, 392 ꝛc.

Hieraus ersieht man, daß 280 die kleinste Zahl ist, welche zugleich ein Vielfaches von 40 und 56 ist.

Dieses Verfahren ist nicht kürzer als jenes, und verdient daher nicht den Vorzug vor dem obigen.

Der kleinste G.N. zweier gegebenen Nenner wird also so gefunden: man sucht das größte gemeine Maß der gegebenen Nenner, mißt mit demselben die gegebenen Nenner und bildet das Produkt aus dem größten gemeinen Maße und den beiden Maßzahlen, so ist dasselbe der kleinste G.N.

Welches ist der kleinste G.N. der beiden gegebenen 8 und 12, 9 und 15, 10 und 15, 12 und 16, 14 und 21, 15 und 20, 16 und 24, 18 und 27, ꝛc.? Antw. 24, 45, 30, 48, 42, 60, 48, 54, ꝛc.

Welches ist der kleinste G.N. der gegebenen Nenner 8, 12, 16?

Aufl. 2. Der kleinste G.N. von 8 und 12 ist 24, und der kleinste G.N. von 24 und 16 ist 48; also ist der kleinste G.N. von 8, 12, 16 die Zahl 48.

Dieses kann man wie früher erweisen.

Welches ist der kleinste G.N. von 9, 12 und 18, von 10, 12, 15, von 12, 16, 18, von 14, 21, 28, von 15, 20, 24, von 16, 20, 25, von 18, 24, 27, ꝛc.? Antw. 36, 60, 144, 84, 120, 400, 216 ꝛc.

Welches ist der kleinste G.N. von 12, 16, 18 und 24?

Aufl. 3. Der kleinste G.N. von 12 und 16 ist 48; der kleinste G.N. von 48 und 18 ist 144, und der kleinste G.N. von 144 und 24 ist 144; also ist der kleinste G.N. von 12, 16, 18, 24 $= 144$.

Digitized by Google

Sind also mehrere Nenner gegeben, so sucht man zuerst den kleinsten G.N. von den beiden ersten; dann den kleinsten G.N. von dem gefundenen und dem 3ten gegebenen; darauf den kleinsten G.N. von dem zuletzt gefundenen und dem 4ten gegebenen, und so fort, bis man alle gegebenen Nenner in Rechnung gebracht hat.

Welches ist der kleinste G.N. von 8, 10, 12, 15, von 6, 8, 9, 10, 12, 15, ꝛc.? Antw. 120, 360, ꝛc.

Das vorgetragene Verfahren, den kleinsten Generalnenner gegebener Nenner zu finden, kann man folgender Art kurz zusammenfassen. Die gegebenen Nenner seien 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 24, 27.

Diejenigen Nenner, welche Maße von einem der übrigen Nenner sind, läßt man unberücksichtigt, und nimmt diejenigen, welche solches nicht sind. Also, da 6 ein Maß von 12, 18, 24 ist, 7 von 14, 8 von 16 und 24, 9 von 18 und 27, 12 von 24; so läßt man 6, 7, 8, 9, 12 außer Acht, und betrachtet nur die übrigen Nenner 14, 16, 18, 24, 27. Denn es ist klar, daß, da 24 ein Vielfaches von 6 ist, auch jedes Vielfache von 24 ein Vielfaches von 6 sein muß. (Wer etwas Ausführlicheres über Vielfache lesen will, der nehme den »Grundriß der Elementar-Arithmetik und algebraisches Kopfrechnen von S. E. Baltrusch, Berlin bei Veit & Comp. 1836, Seite 23 ff.« durch.)

14.	16.	18.	24.	27	gem. einf. Faktor.			
7.	8.	9.	12.	27	(2	„	„	„
7.	4.	9.	6.	27	(2	„	„	„
7.	2.	9.	3.	27	(2	„	„	„
7.	2.	3.	1.	9	(3	„	„	„
7.	2.	1.	1.	3	(3	„	„	„

Die zu beachtenden Nenner stellt man in eine wagerechte Reihe, sucht dann die gemeinen einfachen Faktoren, die man zur Seite von den übrigen absondert; die übrigen setzt man wieder zur Absonderung von ihren Produkten unter einen wagrechten Strich, und fährt so fort, bis jeder der unter dem wagrechten Striche stehenden Faktoren zu jedem andern derselben eine Primzahl ist. Doch darf man nicht wieder unter den gemeinen Faktoren einen neuen gemeinen Faktor nehmen. Nun bildet man das Produkt aus den Faktoren unter dem wagrechten Striche und den abgesonderten gemeinen Faktoren, so ist dasselbe der kleinste G.N. der gegebenen Nenner; also im vorliegenden Beispiele ist der kleinste G.N. $=$ $7.2.3 \times 2.2.2.3.3 = 2.2.2.2.3.3.3.7 = 3024$.

Um nun die Maßzahlen zu finden, nach welcher der G.N. von jedem gegebenen Nenner gemessen wird, wird man nicht denselben durch jeden gegebenen Nenner theilen oder messen, sondern man zerlege jeden gegebenen Nenner in seine einfachen Faktoren, und lasse alle diese aus dem G.N. weg, bilde aus den übrig bleibenden des G.N. ein Produkt, so ist dasselbe die gesuchte Maßzahl des in Rede stehenden Nenners.

Also $6 = 2.3$, diese bleiben aus $2.2.2.2.3.3.3.7$ weg, so

Digitized by Google

sind die übrigen $2.2.2.3.3.7 = 504$; also wird 3024 von 6 nach 504 gemessen.

3024 wird von 7 nach $2.2.2.2.3.3.3 = 432$, von 8 nach $2.3.3.3.7 = 378$, von 9 $= 3.3$ nach $2.2.2.2.3.7 = 336$, von 12 $= 2.2.3$ nach $2.2.3.3.7 = 252$, von 14 $= 2.7$ nach $2.2.2.3.3.3 = 216$, von $16 = 2.2.2.2$ nach $3.3.3.7 = 189$, von $18 = 2.3.3$ nach $2.2.2.3.7 = 168$, von 24 $= 2.2.2.3$ nach $2.3.3.7 = 126$, von $27 = 3.3.3$ nach $2.2.2.2.7 = 112$ gemessen.

K. Addition gegebener Brüche.

Brüche sind entweder solche, welche gleiche Nenner haben, und deswegen gleichnamige heißen, oder solche, welche verschiedene Nenner haben, und ungleichnamige Brüche genannt werden.

$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=1$; $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$; $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=\frac{36}{9}=4$; $\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=\frac{45}{10}=4\frac{1}{2}$; ꝛc.

Daraus folgt der Satz: Die Summe gleichnamiger Brüche ist gleich einem Bruche, der zum Zähler die Summe der Zähler und zum Nenner einen der gleichen Nenner der gegebenen Brüche hat.

Dieser Satz bedarf keines Beweises, er ist durch sich selbst klar.

$\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{7}{12}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{12}=\frac{28}{12}=2\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{2}$ und jeder folgende Bruch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{20}$ betragen zusammen wie viel?

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{20}=\frac{11}{20}$.

Aufl. Die Schüler werden leicht bemerken, daß nur dadurch die Addition dieser Brüche möglich ist, daß man sie gleichnamig mache; daß man also $\frac{1}{2}$ in 4tel, 6tel, 8tel, 10tel ꝛc. verwandle, was hier leicht geschehen kann, da die Nenner 4, 6, 8 ꝛc. Vielfache von dem Nenner 2 sind. Man sehe hierüber S. 84. H.

Nun ist $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; also $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, daher $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$, also $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$. ꝛc.

$\frac{1}{3}$ und jeder folgende Bruch $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{30}$ betragen zusammen wie viel? Antw. $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{10}{27}$, $\frac{11}{30}$.

$\frac{1}{4}$ und jeder folgende Bruch $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{28}$ sind zusammen wie viel? Antw. $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{2}{7}$.

$\frac{1}{5}$ und jeder folgende Bruch $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{13}{30}$ sind zusammen wie viel? Antw. $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{19}{30}$.

Digitized by Google

Je zwei folgender Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ ꝛc. addirt, giebt welche Summe?

Aufl. Da die Brüche gleichnamig gemacht werden müssen, so muß man sie in solche verwandeln, deren Nenner Vielfache der gegebenen Nenner also ein allgemeiner Nenner von diesen ist, und natürlich wird man dazu den kleinsten Generalnenner nehmen. Diesen zu finden, ist bekannt.

Hat man $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, so ist der kleinste Generalnenner $= 2.3 = 6$. Nun ist $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; also $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Ebenso werden die übrigen Beispiele behandelt.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} = \frac{9}{14}$;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11}{18}$;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{11} = \frac{13}{22}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$;
$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} = \frac{14}{33}$.

Hier sind absichtlich diejenigen Brüche übergangen, deren Nenner ein Vielfaches von dem andern ist, weil die Addition derselben bereits gewesen ist; doch die Schüler mögen alle Beispiele nach der Reihe berechnen, sie werden dadurch aufmerksam auf vorkommende Vortheile. $\frac{1}{4}$ und einer der nachfolgenden Brüche giebt $\frac{9}{20}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{28}$, $\frac{13}{36}$, $\frac{15}{44}$. $\frac{1}{5}$ und einer der nachfolgenden Brüche giebt $\frac{11}{30}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{14}{45}$, $\frac{16}{55}$, $\frac{17}{60}$.

$\frac{1}{6}$ und einer der nachfolgenden Brüche giebt $\frac{13}{42}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{17}{66}$, $\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{7}$ " " " " " " $\frac{15}{56}$, $\frac{16}{63}$, $\frac{17}{70}$, $\frac{18}{77}$, $\frac{19}{84}$.
$\frac{1}{8}$ " " " " " " $\frac{17}{72}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{19}{88}$, $\frac{5}{24}$.
$\frac{1}{9}$ " " " " " " $\frac{19}{90}$, $\frac{20}{99}$, $\frac{7}{36}$.
$\frac{1}{10}$ " " " " " " $\frac{21}{110}$, $\frac{11}{60}$.
$\frac{1}{11}$ " " " " " " $\frac{23}{132}$.

In ähnlicher Art kann man 3 und mehrere dieser Brüche addiren. Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$.

Bei der Addition mehrerer Brüche sehe man darauf, daß nicht jeder Nenner eine Primzahl zu den übrigen sei, weil sonst der Generalnenner eine für das Kopfrechnen zu große Zahl sein würde.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$;
$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} = \frac{11}{30}$; ꝛc. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{25}{36}$;
$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{25}{48}$; ꝛc.

Zur schriftlichen Darstellung der Addition gegebener Brüche hat man folgendes Schema:

Digitized by Google

	144
$\frac{1}{2}$	72
$\frac{1}{3}$	48
$\frac{1}{4}$	36
$\frac{1}{6}$	24
$\frac{1}{8}$	18
$\frac{1}{9}$	16
$\frac{1}{12}$	12
$\frac{1}{16}$	9
$\frac{1}{18}$	8
$\frac{1}{24}$	6
$\frac{1}{36}$	4
$1\frac{109}{144}$	253

16 . 18 . 24 . 36

8 . 9 . 12 . 18 (2

4 . 9 . 6 . 9 (2

2 . 9 . 3 . 9 (2

2 . 3 . 1 . 3 (3

2 . 1 . 1 . 1 (3

G.N. = 2.2.2.2.3.3

= 144.

Zuerst wird der G.N. gesucht, der in diesem Beispiele 144 ist; diesen schreibt man nur einmal, und unter denselben setzt man nun die Zähler der in 144stel verwandelten Brüche, und zwar neben den Bruch, welchem der verwandelte gleich ist.

Alle Nebenrechnungen haben die Schüler im Kopfe zu machen, das sie auch leicht ausführen können, wenn der G.N. nicht zu groß wird, also nicht das größte Produkt des großen Einmaleins übersteigt.

Später die eigentliche schriftliche Addition der Brüche.

$\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ betragen wie viel zusammen?

Aufl. Hat man 4tel und 6tel, so ist der kleinste G.N. = 12. Nun ist $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, also $\frac{3}{4} = 3 . \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$; $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, daher $\frac{5}{6} = 5 . \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$; folglich $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.

Ein Beispiel zur schriftlichen Darstellung.

		72
$\frac{3}{8}$	9	27
$\frac{5}{9}$	8	40
$\frac{7}{12}$	6	42
$\frac{13}{18}$	4	52
$\frac{11}{24}$	3	33
$\frac{19}{36}$	2	38
$3\frac{3}{8}$		232
		216
		16

18 . 24 . 36

2) 9 . 12 . 18

2) 9 . 6 . 9

3) 3 . 2 . 3

3) 1 . 2 . 1

In der ersten senkrechten Kolumne stehen die zu addirenden Brüche, in der 2ten die Zähler der 72stel, welche jeder einzelne Theil enthält, in der 3ten die Zähler der nebenstehenden in 72stel verwandelten Brüche.

Man kann auch Ganze und Brüche addiren lassen, so wird man die Ganzen und dann die Brüche oder umgekehrt addiren.

$3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} = 7\frac{7}{6} = 8\frac{1}{6}$; $9\frac{6}{7} + 12\frac{5}{8} = 22\frac{41}{56}$; &c.

L. Subtraktion der Brüche.

Zuerst wird man Brüche von Ganzen, dann Brüche von Brüchen und endlich Brüche von Ganzen und Brüchen hinwegnehmen?

Was bleibt übrig, wenn man $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$ &c. von 1 Ganzen hinwegnimmt?

$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$;
$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $1 - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Digitized by Google

Wenn die Schüler das Vorhergehende gehörig begriffen haben, so wird man bei der Subtraktion nicht lange verweilen dürfen.

Was erhält man, wenn man jeden Bruch von jedem folgenden hinwegnimmt: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ ꝛc.?

$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$; $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$; $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{1}{30}$;
$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$; $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$; $\frac{6}{7}-\frac{4}{5}=\frac{2}{35}$;
$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$; $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$; $\frac{6}{7}-\frac{3}{4}=\frac{3}{28}$; $\frac{7}{8}-\frac{4}{5}=\frac{3}{40}$; ꝛc.

Welchen Rest erhält man, wenn man $\frac{1}{12}$ von $7\frac{3}{8}$ hinwegnimmt?

Aufl. Da $\frac{1}{12}$ größer als $\frac{3}{8}$ sind, so nehme man $\frac{1}{12}$ von 1 Ganzen hinweg, so behält man $\frac{11}{12}$ und außerdem noch $6\frac{3}{8}$; nun addire man $\frac{11}{12}$ und $6\frac{3}{8}$, dieses giebt zusammen $6\frac{17}{24}$; also ist $7\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=6\frac{17}{24}$.

Oder man mache die Brüche gleichnamig; $7\frac{3}{8}=7\frac{9}{24}$, $\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$; da man nun $\frac{2}{24}$ von $\frac{9}{24}$ nicht hinwegnehmen kann, so nehme man 1 Ganzes $=\frac{24}{24}$ zu Hilfe, und es ist $7\frac{3}{8}=6\frac{24}{24}+\frac{9}{24}=6\frac{33}{24}$, und davon $\frac{2}{24}$ hinweggenommen giebt $6\frac{33}{24}-\frac{2}{24}=6\frac{31}{24}$.

$5\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=4\frac{3}{4}$; $10\frac{5}{8}-\frac{1}{14}=9\frac{39}{56}$; $3\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}=2\frac{1}{6}$;
$6\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=5\frac{7}{12}$; $17\frac{5}{6}-\frac{1}{18}=16\frac{8}{9}$; $4\frac{1}{3}-2\frac{5}{8}=1\frac{11}{24}$;
$8\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=7\frac{13}{15}$; $19\frac{4}{7}-\frac{20}{21}=18\frac{13}{21}$; $5\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}=3\frac{7}{12}$; ꝛc.

M. Ueber das Aufsuchen der Vielfachen und Brüche, welche ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen von ganzen, gebrochenen oder gemischten Zahlen sind.

Man kann suchen, welche Vielfache und Brüche 1) ganze Zahlen von ganzen Zahlen, 2) ganze Zahlen von Brüchen, 3) ganze Zahlen von gemischten Zahlen, 4) Brüche von ganzen Zahlen, 5) Brüche von Brüchen, 6) Brüche von gemischten Zahlen, 7) gemischte Zahlen von ganzen Zahlen, 8) gemischte Zahlen von Brüchen, und 9) gemischte Zahlen von gemischten Zahlen sind. Die erste Untersuchung ist bereits in diesem Kapitel I. unter G. und H. behandelt worden, und dient dieser ganzen Untersuchung zur Grundlage, daher hat man jene Seiten 70—72. nachzulesen.

1) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche ganze Zahlen von Brüchen sind.

Welche Vielfache und Brüche sind folgende ganze Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. von jedem folgender Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ ꝛc.?

Aufl. 1. 12 Ganze = dem 12fachen von 1 Ganzen, 1 Ganzes = dem 7fachen von $\frac{1}{7}$, also 12 Ganze = dem 12fachen von dem 7fachen von $\frac{1}{7}=12.7=$ dem 84fachen von $\frac{1}{7}$.

$2=2.2.\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{2}$; $3=3.2.\frac{1}{2}=6.\frac{1}{2}$; $4=4.2.\frac{1}{2}=8.\frac{1}{2}$;
$2=2.3.\frac{1}{3}=6\times\frac{1}{3}$; $3=3.3.\frac{1}{3}=9.\frac{1}{3}$; $4=4.3.\frac{1}{3}=12.\frac{1}{3}$;
$2=2.4.\frac{1}{4}=8\times\frac{1}{4}$; $3=3.4.\frac{1}{4}=12.\frac{1}{4}$; $4=4.4.\frac{1}{4}=16.\frac{1}{4}$.

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

Einige Fragen. 8 ist wie vielmal $\frac{1}{9}$?

9 ist das wie Vielfache von $\frac{1}{8}$?

Wie vielmal muß man $\frac{1}{8}$ nehmen, um 4 zu erhalten?

Welches Vielfache von $\frac{1}{10}$ giebt 3? ꝛc.

Welche Vielfache und Brüche sind 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ꝛc. von $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{10}$?

Aufl. 2. 1 Ganzes $= \frac{8}{8}$, also 14 Ganze $= 14 \times \frac{8}{8} = \frac{112}{8}$. Will man nun wissen, welches Vielfache 14 von $\frac{5}{8}$ sind, so hat man zu untersuchen, welches $\frac{112}{8}$ von $\frac{5}{8}$ sind. Nun nehme man Vielfache von $\frac{5}{8}$ nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, bis man auf 2 nach einander folgende Vielfache kommt, von denen das eine kleiner als $\frac{112}{8}$, das andere größer als $\frac{112}{8}$ ist; jenes nehme man von $\frac{112}{8}$ hinweg. Später vom Bruche.

Das 22fache von $\frac{5}{8} = 22 . \frac{5}{8} = \frac{110}{8}$; das 23fache von $\frac{5}{8} = \frac{115}{8} > \frac{112}{8}$; daher $\frac{112}{8}$ = dem 22fachen von $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$.

Nun ist zu untersuchen, welcher Bruch $\frac{2}{8}$ von $\frac{5}{8}$ sind. Man weiß, daß 1 der 5te Theil von 5 ist, und daher 2 2 mal der 5te Theil von 5, oder $2 = \frac{2}{5} \times 5$. Ebenso ist 1 Achtel der 5te Theil von 5 Achteln, und also 2 Achtel 2 mal den 5ten Theil von 5 Achteln oder $\frac{2}{8} = 2$ mal den 5ten Theil von $\frac{5}{8}$, oder noch kürzer $\frac{2}{8} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{8}$.

Auf die Benennung der Theile, oder auf den Nenner, darf man keine Rücksicht nehmen, wenn nur die Theile, oder vielmehr die Brüche gleichnamig sind, so sieht man, welcher Bruch der eine Zähler von dem andern ist. Daher ist $14 =$ dem 22fachen von $\frac{5}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{8}$, oder kurz $14 = 22\frac{2}{5} \times \frac{5}{8}$.

Um anzuzeigen, daß man untersuche, welches Vielfache oder welcher Bruch eine Zahl von einer andern sei, bedient man sich des Kolon, nämlich 2 senkrecht über einander stehende Punkte (:); die Zahl, welche als ein Vielfaches einer andern betrachtet wird, steht vor dem Kolon, die andere nach demselben; also $8 : 4 = 2$ heißt 8 ist von 4 das 2fache; $14 : \frac{5}{8} = 22\frac{2}{5}$ heißt 14 ist von $\frac{5}{8}$ das 22fache und noch $\frac{2}{5}$ mal $\frac{5}{8}$ oder 14 ist $22\frac{2}{5}$ mal $\frac{5}{8}$.

$4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{3} : \frac{2}{3} = 6$; $4 : \frac{3}{4} = \frac{16}{4} . \frac{3}{4} = 5\frac{1}{3}$; $4 : \frac{4}{5} = \frac{20}{5} : \frac{4}{5} = 5$;

$5 : \frac{3}{3} = \frac{15}{3} : \frac{2}{3} = 7\frac{1}{2}$; $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{4} . \frac{3}{4} = 6\frac{2}{3}$; $5 : \frac{4}{5} = \frac{25}{5} : \frac{4}{5} = 6\frac{1}{4}$;

$6 : \frac{2}{3} = \frac{18}{3} : \frac{2}{3} = 9$; $6 : \frac{3}{4} = \frac{24}{4} : \frac{3}{4} = 8$; $6 : \frac{4}{5} = \frac{30}{5} : \frac{4}{5} = 7\frac{1}{2}$. ꝛc.

Man wird in vorstehenden Beispielen die Bemerkung gemacht haben, daß die ganze Zahl dann ein Vielfaches und kein Bruch von dem Bruche ist, wenn die Zahl der Ganzen ein Vielfaches von dem Zähler des Bruches ist.

2) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche ganze Zahlen von gemischten Zahlen sind.

18 ist welches Vielfache und welcher Bruch von $4\frac{1}{2}$?

Aufl. Man verwandle jede ganze Zahl in einen Bruch von dem gegebenen Nenner; also $18 = 18 . \frac{2}{2} = \frac{90}{5}$, $4\frac{1}{2} = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$; nun untersuche man, wie in der vorigen Rumer, welches Vielfache und welcher Bruch

der erste Zähler von dem andern ist. $\frac{90}{5}$ sind das 3fache von $\frac{24}{5}$ (denn $3 \cdot \frac{24}{5} = \frac{72}{5}$) und $\frac{18}{5}$; aber $\frac{1}{5} = \frac{1}{24} \times \frac{24}{5}$, und daher $\frac{18}{5} = \frac{18}{24} \times \frac{24}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{24}{5}$; folglich $18 = 3\frac{3}{4} \times 4\frac{4}{5}$ oder $18 : 4\frac{4}{5} = 3\frac{3}{4}$.

$5 : 2\frac{1}{2} = \frac{10}{2} : \frac{5}{2} = 2$; $7 : 2\frac{1}{3} = \frac{21}{3} : \frac{7}{3} = 3$; $9 : 6\frac{3}{4} = \frac{36}{4} : \frac{27}{4} = 1\frac{1}{3}$;
$6 : 1\frac{5}{7} = \frac{42}{7} : \frac{12}{7} = 3\frac{1}{2}$; $8 : 5\frac{1}{3} = \frac{24}{3} : \frac{16}{3} = 1\frac{1}{2}$; $10 : 2\frac{2}{3} = \frac{30}{3} : \frac{8}{3} = 3\frac{3}{4}$.

3) Aufsuchung der Brüche, welche Brüche von ganzen Zahlen sind.

$\frac{15}{16}$ ist welcher Bruch von 3?

Aufl. Man verwandle die ganze Zahl in einen Bruch, dessen Nenner gleich dem gegebenen Nenner ist; also $3 = 3 \cdot \frac{16}{16} = \frac{48}{16}$. Nun soll man suchen, welcher Bruch $\frac{15}{16}$ von $\frac{48}{16}$ sei; daher hat man $\frac{48}{16}$ als das Ganze zu betrachten, und da es 48 gleiche Theile hat, so ist jeder Theil von demselben $\frac{1}{48}$; daher sind $\frac{15}{16}$ $\frac{15}{48}$ von dem gedachten Ganzen; folglich ist $\frac{15}{16} = \frac{15}{48}$ von $\frac{48}{16}$ oder $\frac{15}{16} = \frac{5}{16} \times \frac{48}{16} = \frac{5}{16} \times 3$.

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{4}{2} = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{20}{4} = \frac{3}{20}$; $\frac{5}{6} : 5 = \frac{5}{6} : \frac{30}{6} = \frac{1}{6}$;
$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3} : \frac{9}{3} = \frac{2}{9}$; $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5} : \frac{30}{5} = \frac{2}{15}$; $\frac{6}{7} : 8 = \frac{6}{7} : \frac{56}{7} = \frac{3}{28}$. ꝛc.

4) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche Brüche von Brüchen sind.

$\frac{8}{6}$ ist welcher Bruch von $\frac{7}{6}$? $\frac{11}{12}$ ist welches Vielfache und welcher Bruch von $\frac{2}{9}$?

Aufl. Man mache die Brüche gleichnamig, und suche daher zunächst ihren kleinsten GN. $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$. Der als das Ganze zu betrachtende Bruch $\frac{21}{24}$ hat nun 21 gleiche Theile; also ist jeder Theil $\frac{1}{21}$ desselben; folglich sind 20 dieser Theile $\frac{20}{21}$; also ist $\frac{5}{6} = \frac{20}{21} \times \frac{7}{8}$, oder $\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{20}{21}$.

Der kleinste Generalnenner von 12 und 9 ist 36; $\frac{11}{12} = \frac{33}{36}$, $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$; nun sind $\frac{33}{36} = 4 \times \frac{8}{36} + \frac{1}{36}$; aber $\frac{1}{36} = \frac{1}{8}$ von $\frac{8}{36}$; daher ist $\frac{11}{12} : \frac{2}{9} = 4\frac{1}{8}$.

Welches Vielfache und welcher Bruch ist jeder folgende $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$ ꝛc. von jedem folgenden $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$ ꝛc.?

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{6} : \frac{3}{6} = 1\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} : \frac{3}{7} = \frac{7}{28} : \frac{21}{28} = \frac{7}{21}$;
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$; $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$;
$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{4} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$; $\frac{1}{4} : \frac{5}{9} = \frac{9}{36} : \frac{20}{36} = \frac{9}{20}$.

5) Aufsuchung der Brüche, welche Brüche von gemischten Zahlen sind.

$\frac{8}{15}$ ist welcher Bruch von $2\frac{2}{9}$?

Aufl. Zuerst suche man den kleinsten G.N. der gegebenen, und verwandle dann die Ganze in einen Bruch, der zum Nenner den G.N. hat. Der kleinste G.N. von 15 und 9 ist 45; $\frac{8}{15} = \frac{24}{45}$; $2 = \frac{90}{45}$, $\frac{2}{9} = \frac{10}{45}$; also $2\frac{2}{9} = \frac{90+10}{45} = \frac{100}{45}$. Nun hat man als ein Ganzes $\frac{100}{45}$ zu be-

Digitized by Google

trachten, und da dieses 100 gleiche Theile hat, so ist jeder Theil $\frac{1}{100}$ desselben, und 24 solcher Theile sind $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$; daher sind $\frac{24}{45}$ $\frac{6}{25}$ von $\frac{100}{45}$, oder $\frac{6}{15} = \frac{6}{25} \times 2\frac{2}{9}$, oder $\frac{6}{15} : 2\frac{2}{9} = \frac{6}{25}$.

Folgende Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{8}{13}$ ꝛc. sind welche Brüche von folgenden gemischten Zahlen $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{5}{7}$, $1\frac{5}{9}$, $3\frac{3}{10}$, $3\frac{1}{5}$ ꝛc.?

$\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} = \frac{4}{6} : \frac{9}{6} = \frac{4}{9}$; $\frac{5}{6} : 2\frac{3}{4} = \frac{10}{12} : \frac{33}{12} = \frac{10}{33}$;

$\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{33}{12} = \frac{8}{33}$; $\frac{13}{14} : 7\frac{7}{7} = \frac{13}{14} : \frac{52 \cdot 2}{14} = \frac{4}{5}$;

$\frac{5}{6} : 1\frac{1}{2} = \frac{5}{6} : \frac{9}{6} = \frac{5}{9}$; $\frac{17}{18} : 3\frac{3}{16} = \frac{17 \cdot 8}{144} : \frac{51 \cdot 9}{144} = \frac{8}{27}$. ꝛc.

Wenn man den Bruch und die gemischte Zahl auf gleiche Benennung bringt, und man zwischen den Zählern dieser Brüche ein gemeines Maß bemerkt, so ist es vortheilhaft, die Zähler der Brüche in Faktoren zu zerlegen, weil man dann leicht den gemeinen Faktor aus der Rechnung schaffen kann, wie solches in obigen letzten Beispielen geschehen ist. Noch ein Beispiel zu genauerer Erläuterung. $\frac{35}{36} : 7\frac{7}{8} = \frac{35}{36} : \frac{70}{8}$; zwischen den Zählern dieser Brüche wird man die gemeinen Faktoren 5 und 7 oder 35 erblicken, daher führe man die Rechnung so: $\frac{35}{36} : \frac{70}{8} = \frac{35}{36} : \frac{70 \cdot 4}{36} = \frac{35}{70 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$.

6) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte Zahlen von ganzen Zahlen sind.

$18\frac{4}{7}$ sind welches Vielfache und welcher Bruch von 6?

Aufl. Man nehme Vielfache der ganzen Zahl, welche als das Ganze betrachtet wird, bis man auf 2 auf einander folgende kommt, von denen das eine kleiner, das andere größer als die gemischte Zahl ist; $3 \cdot 6 = 18 < 18\frac{4}{7}$, $4 \cdot 6 = 24 > 18\frac{4}{7}$; nehme das kleinere Vielfache von der gemischten Zahl hinweg, $18\frac{4}{7} - 18 = \frac{4}{7}$, und suche nun, welcher Bruch der Rest von der ganzen Zahl ist. $\frac{4}{7} : 6 = \frac{4}{7} : \frac{42}{7} = \frac{4}{42}$; daher ist $18\frac{4}{7} : 6 = 3\frac{4}{42}$.

$27\frac{5}{6}$ sind welches Vielfache und welcher Bruch von 8?

$3 \cdot 8 = 24 < 27\frac{5}{6}$, $4 \cdot 8 = 32 > 27\frac{5}{6}$; also $27\frac{5}{6} - 24 = 3\frac{5}{6}$. Nun ist aber $3\frac{5}{6} : 8 = \frac{23}{6} : \frac{48}{6} = \frac{23}{48}$; also $27\frac{5}{6} : 8 = 3\frac{23}{48}$.

$9\frac{1}{2}$, $12\frac{2}{3}$, $15\frac{3}{4}$, $18\frac{2}{5}$ ꝛc. sind welche Vielfache und Brüche von 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc.?

$9\frac{1}{2} : 2 = 4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$. Unter H. dieses Kapitels II. ist der Satz gewesen: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches durch gleiche Zahlen vervielfacht, so erhält man einen Bruch, der gleich dem gegebenen ist. Diesen Satz wende man auch auf Doppelbrüche an, wie obiger $\frac{1\frac{1}{2}}{2}$ ist, so ist $\frac{(1\frac{1}{2}) \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1\frac{1}{2}}{2} = \frac{2\frac{2}{2}}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$. Ebenso ist $\frac{3\frac{1}{5}}{6} = \frac{(3\frac{1}{5}) \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{15 + \frac{5}{5}}{30} = \frac{15+4}{30} = \frac{19}{30}$. Um also einen Doppelbruch in einen einfachen zu verwandeln, wird man Zähler und Nenner desselben durch den Nenner des einfachen Bruches multipliciren. Einen Bruch durch den Nenner desselben vervielfacht, giebt immer eine ganze Zahl, die gleich dem Zähler des Bruches ist.

Digitized by Google

z. B. $3 . \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, $4 . \frac{3}{4} = \frac{4 . 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$; $5 . \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$; $6 . \frac{5}{6} = \frac{30}{6} = 5$; ꝛc. Diesen letzten Satz berücksichtige man gleichfalls in nachfolgenden Rechnungen.

$9\frac{1}{2} : 3 = 3\frac{1}{6}$: $\quad 12\frac{2}{3} : 5 = 2\frac{\frac{28}{3}}{5} = 2\frac{8}{15}$;

$9\frac{1}{2} : 4 = 2\frac{1\frac{1}{2}}{4} = 2\frac{3}{8}$; $\quad 12\frac{2}{3} : 6 = 2\frac{\frac{8}{3}}{6} = 2\frac{1}{6}$;

$9\frac{1}{2} : 5 = 1\frac{4\frac{1}{2}}{5} = 1\frac{9}{10}$; $\quad 15\frac{3}{4} : 2 = 7\frac{1\frac{1}{2}}{2} = 7\frac{3}{8}$. ꝛc.

Vorstehende Aufgaben kommen in bürgerlichen Rechnungen sehr häufig vor, und zwar unter der Rubrik der Reduktion, d. h. Angabe des Bruches, welche kleinere Münzen, Gewichte, Maße von größern derselben Gattung sind; z. B. $7\frac{1}{2}$ Sgr. welcher Bruch von 1 Thlr. $= \frac{7\frac{1}{2}}{30} = \frac{15}{600} = \frac{1}{40}$ Thlr.; $4\frac{4}{5}$ Loth welcher Bruch von 1 Pfunde $= \frac{4\frac{4}{5}}{32} = \frac{24}{32 . 5} = \frac{3}{20}$ Pf.; $6\frac{3}{4}$ Zoll welcher Bruch eines Fußes $= \frac{6\frac{3}{4}}{12} = \frac{27}{12 . 4} = \frac{9}{16}$ Fuß. ꝛc. Später Aufgaben darüber.

7) Auflösung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte Zahlen von Brüchen sind.

$17\frac{11}{12}$ sind welches Vielfache und welcher Bruch von $\frac{15}{16}$? von $\frac{26}{27}$?

Aufl. Man verwandle die ganze Zahl der gemischten in den nebenstehenden Bruch, und addire beide Brüche; also $17\frac{11}{12} = \frac{12 . 17 + 11}{12} = \frac{215}{12}$; darauf bringe man diesen unechten und den gegebenen echten Bruch auf gleiche Benennung; also $\frac{215}{12} = \frac{4 . 215}{4 . 12} = \frac{860}{48}$, $\frac{15}{16} = \frac{3 . 15}{3 . 16} = \frac{45}{48}$; nun untersuche man, welches Vielfache und welcher Bruch der erste von dem andern Bruche ist, der als das Ganze betrachtet werden muß. $\frac{860}{48} : \frac{45}{48} = 19\frac{1}{8}$.

In vielen Fällen kann man sich dadurch die Rechnung erleichtern, daß man die ganze Zahl der gemischten mit dem Zähler des andern Bruches vergleicht; ist jene größer als dieser, so muß die gemischte Zahl ein höheres Vielfache von dem Bruche sein, als der Nenner dieses von der Einheit, also da $17 > 15$, so ist $17\frac{1}{4}$ mehr als das 16fache von $\frac{1}{15}$; weil der Bruch durch den Nenner vervielfacht eine ganze Zahl wird, die kleiner als die ganze Zahl der gemischten ist; ist aber die ganze Zahl der gemischten kleiner als der Zähler des andern Bruches, so ist die gemischte Zahl ein niedrigeres Vielfache von dem Bruche, als dessen Nenner von der Einheit; also weil $17 < 26$, so ist $17\frac{11}{12}$ weniger als das 27fache von $\frac{26}{27}$. Man vervielfältige nun diesen Bruch durch einen Faktor seines Nenners, wenn er solchen hat, hier durch 9, so ist $9 . \frac{26}{27} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$; dieses Produkt vervielfache man so, daß man ein Vielfaches erhält, welches zunächst kleiner als die gemischte Zahl ist; also $2 \times 8\frac{2}{3} = 17\frac{1}{3}$; dieses von der gemischten Zahl subtrahirt, giebt $17\frac{11}{12} - 17\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$. Nun untersuche man, was der Rest von dem andern gegebenen Bruche ist; also $\frac{7}{12} : \frac{26}{27} = \frac{63}{108} : \frac{104}{108} = \frac{63}{104}$; daher ist $17\frac{11}{12} : \frac{26}{27} =$ dem 2fachen von 9fachen von $\frac{26}{27} + \frac{63}{104} = 18\frac{63}{104}$.

Digitized by Google

$19\frac{3}{4} : \frac{7}{8} =$ dem 2fachen vom 8fachen von $\frac{7}{8}$ (d. h. 14) $+ \frac{5\frac{3}{8}}{7}$; Zähler und Nenner des mehrfachen Bruches multiplicire man durch den kleinsten G.N., hier durch 8, so ist $\frac{5\frac{3}{8}}{7} = \frac{8.(5\frac{3}{8})}{8.7} = \frac{46}{7} = 6\frac{4}{7}$; daher ist $19\frac{3}{4} : \frac{7}{8} =$ dem 16fachen von $\frac{7}{8} + 4\frac{4}{7} \times \frac{7}{8} = 16 + 6\frac{4}{7} = 22\frac{4}{7}$.

Dieses Verfahren gewährt wenigstens den Vortheil, mit kleinen Zahlen zu rechnen.

$10\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{3}$, $12\frac{3}{4}$, $13\frac{3}{5}$, $14\frac{1}{6}$ ꝛc. ist welches Vielfache und welcher Bruch von $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{15}{16}$ ꝛc.?

$$10\tfrac{1}{2} : \tfrac{7}{8} = 9 + \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = 9 + \tfrac{6}{14} = 13\tfrac{1}{2};$$

$$10\tfrac{1}{2} : \tfrac{9}{10} = 10 + \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{9}{10}} = 10 + \tfrac{15}{9} = 11\tfrac{2}{3};$$

$$10\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{12} = 6 + \frac{5}{1\frac{1}{12}} = 6 + \tfrac{60}{11} = 11\tfrac{5}{11}.$$ ꝛc.

$12\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = 16\frac{1}{14}$; $12\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = 14\frac{1}{6}$; $12\frac{3}{4} : 1\frac{1}{12} = 13\frac{10}{11}$; $12\frac{3}{4} : \frac{13}{14} = 13\frac{10}{26}$; $12\frac{3}{4} : \frac{15}{16} = 13\frac{3}{5}$; ꝛc.

Die kurze Regel für diese Art Rechnung wird später folgen.

8) Aufsuchung der Vielfachen und Brüche, welche gemischte von gemischten Zahlen sind.

Das allgemeine Verfahren zu diesen Untersuchungen ist, daß man die Ganze in einen Bruch verwandelt, der gleichnamig mit dem nebenstehenden Bruche ist; dieses nennt man auch kurz: eine gemischte Zahl einrichten; dann bringt man die unechten Brüche auf gleiche Benennung, und verfährt wie früher.

$15\frac{1}{2}$, $16\frac{2}{3}$, $17\frac{3}{4}$, $18\frac{3}{5}$, $19\frac{1}{6}$, $20\frac{4}{7}$ ꝛc. sind welche Vielfache und Brüche von $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{4}{5}$, $5\frac{5}{6}$, $6\frac{3}{7}$ ꝛc.?

$15\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{5}$; $15\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = 4\frac{13}{20}$; $15\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = 4\frac{2}{5}$;
$16\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2} = 6\frac{2}{3}$; $16\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3} = 5$; $16\frac{2}{3} : 3\frac{3}{4} = 4\frac{4}{9}$;
$17\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{10}$; $17\frac{3}{4} : 3\frac{1}{3} = 5\frac{13}{40}$; $17\frac{3}{4} : 3\frac{3}{4} = 4\frac{11}{15}$. ꝛc.

III. Schriftliche Division.

Division vom Lateinischen divisio die Zertheilung, Eintheilung, Theilung, und dieses von dividere (dividiren) von einander theilen, austheilen, vertheilen, theilen.

Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt suchen, welches Vielfache und welcher Bruch die erste Zahl von der andern ist.

Es tritt nicht selten der Fall ein, daß man nur das Vielfache und nicht den Bruch wissen will, welches die größere Zahl von der kleinern ist, und dann bleibt ein Rest der Division, wenn die größere Zahl nicht ein Vielfaches der kleinern Zahl ist. In diesem Falle heißt die Division eine theilweise oder Partialdivision.

Digitized by Google

Die Zahl, welche als ein Vielfaches, oder als ein Bruch, oder als ein Vielfaches und ein Bruch einer andern betrachtet wird, heißt der Dividendus (numerus dividendus die Zahl, welche getheilt werden soll). Die Zahl, von der eine andere als ein Vielfaches oder Bruch betrachtet wird, heißt der Divisor (divisor Vertheiler, Austheiler, Abtheiler).

Der Multiplikator des Vielfachen oder der Bruch, oder beide zusammen, welche der Dividendus vom Divisor ist, heißt der Quotient (von quot wie viel, wie viele).

Aus dieser Erklärung und den Untersuchungen unter M. II. dieses Kapitels geht hervor, daß der Dividendus gleich dem Produkte aus Divisor und Quotienten ist.

In der theilweisen Division ist der Dividendus gleich dem Produkte aus Divisor und Quotienten nebst dem Reste der Division. Daher kann man die Division auch so erklären: Eine Zahl durch eine andere dividiren heißt eine Zahl suchen, welche durch die zweite multiplicirt, ein Produkt giebt, das gleich der ersten Zahl ist.

Nach der eigentlichen Bedeutung des Wortes heißt eine Zahl durch eine andere dividiren, die erste in so viele gleiche Theile theilen, als die andere Einheiten hat.

Andere geben noch andere Erklärungen der Division; es ist aber gleichgiltig, welche Erklärung derselben man wählt, wenn man nur den richtigen Sinn mit dem Worte verbindet, und dem gemäß die Division mit Zahlen ausführt.

Den Kindern wird man diejenige Erklärung der Division geben, welche sie am leichtesten und klarsten fassen. Vielleicht zieht Mancher folgende Erklärung den übrigen vor.

Eine Zahl durch eine andere dividiren heißt: eine dritte Zahl so aus der ersten hervorbringen, wie ein Ganzes aus der zweiten entsteht.

Die Zahl, aus welcher eine Zahl so erzeugt wird, wie das Ganze aus einer andern entsteht, heißt der Dividendus.

Die Zahl, welche so aus einer Zahl entsteht, wie das Ganze aus einer andern gebildet wird, heißt der Quotient.

Der Divisor ist die Zahl, welche durch die Entstehungsart eines Ganzen aus ihr die Art der Erzeugung einer Zahl aus einer andern bestimmt.

(Diese vier letzten Definitionen sind aus dem: Grundrisse der Elementar-Arithmetik ꝛc. von S. E. Baltrusch.)

Da die schriftliche Division sich mit größern Zahlen als das Kopfrechnen beschäftigt, die größern Zahlen aber in Einheiten verschiedener Ordnungen eingetheilt sind, so wird man zunächst untersuchen müssen, von welchen Ordnungen man Einheiten erhält, wenn man die Zahlen verschiedener Einheiten durch Zahlen verschiedener Einheiten dividirt. Dieser Untersuchung lege man den Satz zum Grunde: daß der Dividendus gleich dem Produkte aus Di-

Digitized by Google

visor und Quotienten ist; weil das Produkt der Zahlen von verschiedenen Einheiten aus der schriftlichen Multiplikation bekannt ist.

Zur Bezeichnung der Division bedient man sich des Kolon, und 8 dividirt durch 2 giebt zum Quotienten 4 bezeichnet man so 8 : 2 = 4; der Dividendus wird also vor, der Divisor nach dem Divisionszeichen gesetzt, und dann folgt der Quotient. Der Bruch im Quotienten wird vorläufig außer Acht gelassen.

Einer : Einer = Einern; weil Einer × Einer = Einern.
Zehner : Einer = Zehnern; weil Einer × Zehner = Zehnern.
Hunderter : Einer = Hundertern; weil Einer × Hunderter = Hundertern.
Tausender : Einer = Tausendern; weil Einer × Tausender = Tausendern.
Zehntausender : Einer = Zehntausendern; weil Einer × Zehntausender = Zehntausendern.
Hunderttausender : Einer = Hunderttausendern; weil Einer × Hunderttausender = Hunderttausendern.
Millionen : Einer = Millionen; weil Einer × Millionen = Millionen.

Allgemein: Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten ꝛc. Ordnung durch Einer dividirt, giebt Zahlen von Einheiten der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten ꝛc. Ordnung, also von derselben Ordnung.

Fragen. Was erhält man, wenn man 12 Z. durch 3, 8 H. durch 4, 15 T. durch 5, 18 Z.T. durch 6, 24 H.T. durch 8 dividirt? ꝛc.

Zehner : Zehner = Einern; weil Zehner × Einer = Zehnern.
Hunderter : Zehner = Zehnern; weil Zehner × Zehner = Hundertern.
Tausender : Zehner = Hundertern; weil Zehner × Hunderter = Tausendern.
Zehntausender : Zehner = Tausendern; weil Zehner × Tausender = Zehntausendern.
Hunderttausender : Zehner = Zehntausendern; weil Zehner × Zehntausender = Hunderttausendern.
Millionen : Zehner = Hunderttausendern; weil Zehner × Hunderttausender = Millionen.

Fragen. 14 Zehner durch 2 Z., 16 H. durch 4 Z., 18 T. durch 6 Z., 25 Z.T. durch 5 Z., 27 H.T. durch 3 Z., 24 M. durch 8 Z. dividirt, giebt was zum Quotienten?

Allgemein: Zahlen der Einheiten von der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten ꝛc. Ordnung durch Zehner dividirt, giebt zum Quotienten Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Ordnung, also von der um Eins verminderten Ordnung.

Hunderter : Hunderter = Einern; weil Hunderter × Einer = Hundertern.
Tausender : Hunderter = Zehnern; weil Hunderter × Zehner = Tausendern.
Zehntausender : Hunderter = Hundertern; weil Hunderter × Hunderter = Zehntausendern.

Digitized by Google

Hunderttausender : Hunderter = Tausendern; weil Hunderter × Tausender = Hunderttausendern.

Millionen : Hunderter = Zehntausendern; weil Hunderter × Zehntausender = Millionen.

Fragen. Was giebt 9 H. durch 3 H., 6 T. durch 2 H., 36 Z.T. durch 9 H., 45 H.T. durch 5 H., 48 M. durch 8 H. dividirt?

Allgemein: Zahlen der Einheiten von der 3ten, 4ten, 5ten, 6ten ꝛc. Ordnung dividirt durch Zahlen der Einheiten von der 3ten Ordnung, giebt zum Quotienten Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Ordnung, also von einer um 2 verminderten Ordnung.

Tausender : Tausender = Einern: weil Tausender × Einer = Tausendern.

Zehntausender : Tausender = Zehnern; weil Tausender × Zehner = Zehntausendern.

Hunderttausender : Tausender = Hundertern; weil Tausender × Hunderter = Hunderttausendern.

Millionen : Tausender = Tausendern; weil Tausender × Tausender = Millionen.

Fragen. Was giebt 8 T. durch 4 T., 10 Z.T. durch 2 T., 14 H.T. durch 7 T., 15 M. durch 3 T. dividirt?

Allgemein: Zahlen der Einheiten von der 4ten, 5ten, 6ten, 7ten ꝛc. Ordnung dividirt durch Zahlen der Einheiten von der 4ten Ordnung, giebt zum Quotienten Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Ordnung, also von einer um 3 verminderten Ordnung.

Zehntausender : Zehntausender = Einern; weil Zehntausender × Einer = Zehntausendern.

Hunderttausender : Zehntausender = Zehnern; weil Zehntausender × Zehner = Hunderttausendern.

Millionen : Zehntausender = Hundertern; weil Zehntausender × Hunderter = Millionen.

Fragen. Wenn man 18 Z.T. durch 6 Z.T., 21 H.T. durch 7 Z.T., 28 M. durch 4 Z.T. dividirt, so erhält man?

Allgemein: Zahlen der Einheiten von der 5ten, 6ten, 7ten, 8ten ꝛc. Ordnung dividirt durch Zahlen der Einheiten der 5ten Ordnung, giebt zum Quotienten Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Ordnung, also von einer um 4 verminderten Ordnung.

Hunderttausender : Hunderttausender = Einern; weil Hunderttausender × Einer = Hunderttausendern.

Million : Hunderttausender = Zehnern; weil Hunderttausender × Zehner = Millionen.

Allgemein: Zahlen von Einheiten der 6ten, 7ten, 8ten ꝛc. Ordnung dividirt durch Zahlen der Einheiten von der 6ten Ordnung, giebt zum

Digitized by Google

Quotienten Zahlen der Einheiten von der 1sten, 2ten, 3ten ꝛc. Ordnung, also von einer um 5 verminderten Ordnung.

Wenn man also Zahlen von Einheiten einer gewissen Ordnung durch Zahlen von Einheiten derselben Ordnung dividirt, so erhält man stets Einer zum Quotienten.

Die Ordnungszahl der Einheiten des Quotienten ist also immer um Eins mehr als der Ueberschuß der Ordnungszahl der Einheiten des Dividendus über die Ordnungszahl der Einheiten des Divisors.

Da die Ordnungen der Einheiten einer Zahl durch die Stellen der geschriebenen Zahl bezeichnet werden, so kann man die Sätze über die Ordnungszahlen der Einheiten der Zahlen, welche bei der Division vorkommen, in gleicher Weise über die Stellenzahlen von denselben Zahlen aussprechen und sie anwenden.

Die Zahlen sind entweder ganze, gebrochene, oder gemischte Zahlen; die gemischten Zahlen können aber stets in unechte Brüche verwandelt werden, also in gebrochene Zahlen; daher hat man die Division auf ganze und gebrochene Zahlen anzuwenden. Man wird also zuerst ganze, dann gebrochene Zahlen durch einander dividiren. Da aber zur Division die Multiplikation als bekannt vorausgesetzt wird, diese zwar im Kopfrechnen mit gebrochenen Zahlen, nicht aber schriftlich behandelt worden ist, so muß man vor der Division gebrochener Zahlen die Multiplikation mit diesen Zahlen vornehmen. Man kann aber die Multiplikation mit gebrochenen Zahlen so ausführen, daß man zur Erlangung des vollständigen Produkts Brüche zu addiren oder zu subtrahiren hat; daher hat man folgende Ordnung in Bearbeitung des Stoffes dieser Numer zu beobachten: A. Division ganzer Zahlen; B. Addition gebrochener Zahlen; C. Subtraktion gebrochener Zahlen; D. Multiplikation gebrochener Zahlen; E. Division gebrochener Zahlen.

A. Division ganzer Zahlen.

1) Theilweise Division.

Durch die theilweise Division will man erfahren, welches Vielfache die größere Zahl von der kleinern ist, ohne Rücksicht auf den Bruch, den jene von dieser noch sein möchte; daher wird man Vielfache der kleinern Zahl bilden, und diese von der größern hinwegnehmen, bis man auf einen Rest kommt, der kleiner als der Divisor ist, so hat man die Division beendigt. Das Genauere darüber wird man in der Behandlung einzelner Beispiele erfahren.

Digitized by Google

75 896 : 2 = 37 948.

6
15
14
18
18
9
8
16
16
0

Erläuterung. Man beginnt die Division mit den höchsten Stellen des Dividendus. 7 Z.T. dividirt durch 2 E. giebt 3 Z.T., oder 2 E. sind in 7 Z.T. 3 Z.T. mal enthalten; 2 E. mal 3 Z.T. giebt 6 Z.T., diese von den 7 Z.T. hinweggenommen, läßt 1 Z.T. zum Reste.

Den Rest von einem Z.T. verwandelt man nun in T., und nimmt die 5 T. des Dividendus dazu, das sind zusammen 15 T.; nun sind 2 E. in 15 T. 7 T. mal enthalten; 2 E. mal 7 T. giebt 14 T.; dieses Produkt von 15 T. subtrahirt, läßt 1 T. zum Reste, den man wieder in H. verwandelt, und die 8 H. des Dividendus dazunimmt, das sind 18 H., diese durch 2 E. dividirt giebt 9 H.; 2 E. mal 9 H. = 18 H., welche von 18 H. hinweggenommen, keinen Rest lassen. Die 9 Z. des Dividendus durch 2 E. dividirt, giebt 4 Z.; 2 E. × 4 Z. = 8 Z., von 9 Z. subtrahirt, läßt 1 Z.; 1 Z. + 6 E. = 16 E., durch 2 E. dividirt, giebt 8 E.; 2 E. × 8 E. = 16 E., von 16 E. subtrahirt, läßt keinen Rest. Daher ist der Quotient = 37 948, und diesen mit 2 multiplicirt, muß ein Produkt geben, das gleich dem Dividendus ist.

In derselben Art wird man eine gegebene Zahl durch 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dividiren. Noch ein Beispiel.

329 708 : 9 = 36 634.

27
59
54
57
54
30
27
38
36
2

Kurze Erläuterung. 9 ist größer als die Zahl der H.T., deswegen verwandle man die 3 H.T. in Z.T. und nehme die 2 Z.T. des Dividendus dazu, das sind zusammen 32 Z.T., durch 9 E. dividirt, giebt 3 Z.T., 9 E. × 3 Z.T. = 27 Z.T., von 32 Z.T. subtrahirt, läßt 5 Z.T. ꝛc. ꝛc.

Der Quotient = 36 634, der Rest der Division ist 2 und 329 708 = 9 . 36 634 + 2.

Welche Reste kann man erhalten, wenn man eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dividirt? Wenn man eine Zahl durch 9 dividirt, so kann man die Reste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 erhalten.

Ist der Rest der Division Null, so ist der Dividendus ein genaues Vielfache vom Divisor.

Eine beliebige Zahl durch Eins dividirt, giebt welchen Quotienten und welchen Rest? Wenn man eine Zahl durch Eins dividirt, so erhält man zum Quotienten stets dieselbe Zahl und Null zum Reste.

Welches muß der Divisor sein, wenn der größte Rest der Division, welcher stattfinden kann, 8 ist. Der Divisor ist 9.

Digitized by Google

Welche Zahlen sind ohne Rest durch 2, 4, 8 und 5 theilbar?
Eine Zahl ist durch 2 ohne Rest theilbar, wenn die Einer solches sind.

" " " " 4 " " " " " Einer und Zehner solches sind.
" " " " 8 " " " " Hunderter, Zehner u. Einer solches sind
" " " " 5 " " " " Einer solches sind.

Denn 1 Zehner ist durch 2 ohne Rest theilbar, daher jede Zahl Zehner, folglich auch Hunderter, Tausender ꝛc. durch 2 ohne Rest theilbar.

1 Hunderter kann durch 4 ohne Rest dividirt werden, daher jede Zahl Hunderter, also auch Tausender, Zehntausender ꝛc.

Ueber die Theilbarkeit einer Zahl ohne Rest durch 3, 9, 11, 12 ꝛc. später.

Eine durch 2 ohne Rest theilbare Zahl heißt eine gerade, jede andere eine ungerade Zahl.

Wenn eine Zahl durch eine andere dividirt wird, und kein Rest der Division übrig bleibt, darauf wieder der erhaltene Quotient durch eine dritte Zahl dividirt wird, und wieder kein Rest übrig bleibt: so ist die erste Zahl durch das Produkt der beiden andern Zahlen theilbar ohne Rest, und die erste Zahl durch das Produkt der beiden andern dividirt, giebt einen Quotienten, der gleich jenem zweiten Quotienten ist. Z. B.

$24 : 2 = 12$; $12 : 3 = 4$; so ist $24 : 6 = 4$.
$72 : 3 = 24$; $24 : 6 = 4$; also $72 : 18 = 4$.
$288 : 9 = 32$; $32 : 4 = 8$; also $288 : 36 = 8$. ꝛc.

Soll man eine Zahl durch eine andere dividiren, die ein Produkt zweier andern ist, so kann man den Dividendus zuerst durch den einen Faktor, und den erhaltenen Quotienten wieder durch den andern Faktor dividiren, so muß man zum zweiten Quotienten denjenigen erhalten, welchen man erhält, wenn man den Dividendus durch den ganzen Divisor dividirt. Es wird hier vorausgesetzt, daß in keinem Falle ein Rest der Division übrig bleibe. Z. B. $3856 : 8 = 482$; $8 = 2 \cdot 4$; also $3856 : 2 = 1928$; $1928 : 4 = 482$.
$54\,522 : 6 = 9087$; $6 = 2 \cdot 3$; also $54\,522 : 2 = 27\,261$; $27\,261 : 3 = 9087$.

$256\,874 : 10 = 25\,687$.

20
56
50
68
60
87
80
74
70
4.

Erläuterung. Hunderttausender durch Zehner dividirt, giebt Zehntausender, 2 durch 1 dividirt, giebt 2; also 2 H.T. durch 1 Z. dividirt, giebt 2 Z.T. 1 Z. ist in 5 Z.T. 5 T. mal enthalten; 1 Z. ist in 6 T. 6 H. mal enthalten; 1 Z. ist in 8 H. 8 Z. mal enthalten; 1 Z. ist in 7 Z. 7 E. mal enthalten; und 4 E. ist der Rest der Division.

Digitized by Google

Wenn man eine Zahl durch 10 oder einen Zehner dividirt, so erhält man den Quotienten, wenn man von der Zahl die Einer abschneidet, welche den Rest bilden; die übrigen Stellen als eine Zahl betrachtet ist der gesuchte Quotient.

Wenn man eine Zahl durch 1 Z. = 10, durch 1 H. = 100, durch 1 T. = 1000, durch 1 Z.T. = 10 000; durch 1 H.T. = 100 000, durch 1 M. = 1 000 000 ꝛc. dividirt: so erhält man zum Quotienten dieselbe Zahl, wenn man von derselben von den Einern an gerechnet 1 Stelle, 2 Stellen, 3, 4, 5, 6 ꝛc. Stellen, allgemein so viele Stellen, als der Divisor Nullen hat, abschneidet; diese abgeschnittenen Stellen, als Zahlen betrachtet, sind die den Divisoren zugehörigen Reste, und die jedesmaligen übrigen Stellen, als Zahlen angesehen, sind die gesuchten Quotienten. Z. B.

378 596 432 : 10 = 37 859 643 Quotient + 2 Rest.
378 596 432 : 100 = 3 785 964 » + 32 Rest.
378 596 432 : 1000 = 378 596 » + 432 Rest.
378 596 432 : 10 000 = 37 859 » + 6432 Rest.
378 596 432 : 100 000 = 3 785 » + 96 432 Rest.
378 596 432 : 1 000 000 = 378 » + 596 432 Rest. ꝛc.

Hat der Dividendus an den niedrigen Stellen Nullen, so wird man durch 10, 100, 1000 ꝛc. diese Zahl dividiren, wenn man von ihr 1, 2, 3 ꝛc. Nullen durchstreicht.

587 65(3 : 3(0 = 19 588.
3
28
27
17
15
26
24
25
24
13

Erläuterung. 3 Z. sind in 5 H.T. 1 Z.T. mal enthalten, 3 Z. × 1 Z.T. = 3 H.T., diese von 5 H.T. subtrahirt, läßt 2 H.T., dazu 8 Z.T. sind 28 Z.T., durch 3 Z. dividirt, giebt 9 T., 3 Z. × 9 T. = 27 Z.T. von 28 Z.T. hinweggenommen, läßt 1 Z.T. + 7 T. sind 17 T., durch 3 Z. dividirt, giebt 5 H.; 3 Z. × 5 H. = 15 T., von 17 T. subtrahirt, läßt 2 T. + 6 H. = 26 H. durch 3 Z. dividirt, giebt 8 Z.; 3 Z. × 8 Z. = 24 H. von 26 H. subtrahirt, läßt 2 H. + 5 Z. = 25 Z., durch 3 Z. dividirt, giebt 8 E.; 3 Z. × 8 E. = 24 Z., von 25 Z. subtrahirt, läßt 1 Z., daher 3 E. = 13 E., welches der Rest der Division ist.

Allgemein: Hat man eine Zahl durch Hunderter (400), Tausender (5000), Zehntausender (60 000), Hunderttausender (700 000) ꝛc. zu dividiren; so sind die Hunderter in den Hundertern, die Tausender in den Tausendern, die Zehntausender in den Zehntausendern, die Hunderttausender in den Hunderttausendern ꝛc., Einer mal enthalten, die niedrigen Stellen bleiben also für den Rest, und zwar so viele Stellen, als der Divisor Nullen hat; daher kann man gleich zu Anfange der Rechnung die erwähnten Stellen von dem Dividendus absondern, und nur die höhern Stellen dividiren, und an

Digitized by Google

den übrig bleibenden Rest die abgesonderten Stellen des Dividendus hinzufügen, so hat man den vollständigen Rest.

357 908 : 17 = 21 053.

34
17
17
90
85
58
51
7

Erläuterung. Der Divisor hat 2 Stellen, so nehme man auch vom Dividendus 2 Stellen, und zwar die beiden höchsten, dieser sind 35 Z.T. dividirt durch 17 E. = 2 Z.T.; 17 E. × 2 Z.T. = 34 Z.T., diese von 35 Z.T. subtrahirt, läßt 1 Z.T., dazu 7 T. sind 17 T. : 17 E. = 1 T.; 9 H. : 17 E. = 0 H.; 9 H. + 0 Z. = 90 Z. dividirt durch 17 E. = 5 Z.; 17 E. × 5 Z. = 85 Z., von 90 Z. subtrahirt, läßt 5 Z., dazu 8 E. = 58 E. : 17 E. = 3 E.; 17 E. × 3 E. = 51 E., von 58 E. subtrahirt, läßt 7 E. zum Reste, und der Quotient ist 21 053.

2 345 689 : 987 = 2376.

1 974
3716
2961
7558
6909
6499
5922
577

Da der Divisor 3 Stellen hat, so nehme man auch vom Dividendus 3 Stellen, und zwar die höchsten; nun sehe man, ob die Zahl an der höchsten Stelle des Divisors in der Zahl an der höchsten der 3 genommenen Stellen des Dividendus enthalten sei, also hier 9 in 2; da dieses nicht ist, so nehme man die folgende dazu, also 9 in 23, enthalten 2 mal, und zwar 2 T. mal ꝛc.

Man gebraucht in gewöhnlichen Rechnungen das Divisionszeichen nicht, sondern trennt den Dividendus von dem Divisor durch einen senkrechten Strich, und schreibt den Quotienten unter den Divisor, welchen man von jenem durch einen wagrechten Strich absondert. Z. B.

48 763 406	7854
47 124	6208
1 6394	
1 5708	
68606	
62832	
5774	

Hier sucht man zunächst, wie oft 7 T. in 48 M. enthalten sind ꝛc. Der Quotient ist 6208, der Rest der Division 5774.

Man hat auch noch eine dritte Art der Stellung der 3 Zahlen Dividendus, Divisor, Quotient; und zwar schreibt man den Divisor links und den Quotienten rechts vom Dividendus, diesen also in die Mitte zwischen jene.

Digitized by Google

Divisor	Dividendus	Quotient
38795	123465789087654	3182518084
	116385	
	70807	
	38795	
	320128	
	310360	
	97689	
	77590	
	200990	
	193975	
	70158	
	38795	
	313637	
	310360	
	327765	
	310360	
	174054	
	155180	
	18874	Rest der Division.

Es ist gleichgiltig, welche Stellung der 3 Zahlen man wählt, die vorstehende dürfte die vorzüglichere sein, weil Divisor und Quotient zur Multiplikation bereits unter einander stehen, und weil sie Raum erspart. Die Lieblingsstellung wird durch die erste Gewöhnung bedingt.

2) Ueber das größte gemeine Maß der Zahlen.

Das gemeine Maß zweier Zahlen ist sowohl ein Maß der Summe als auch der Differenz der Zahlen.

(Diesen Satz findet man in dem oben citirten Grundrisse der Elementararithmetik ꝛc. vollständig erwiesen; hier kann man denselben nur durch viele Beispiele bestätigen und ihn dadurch zu einem gewissen Grade der Wahrscheinlichkeit erheben.)

Das größte gemeine Maß zwischen 8 und 12 ist 4, und 4 ist ein Maß von $8+12=20$, wie auch von $12-8=4$; denn $20=$ dem 5fachen, $4=$ dem 1fachen von 4.

Das größte gemeine Maß von 15 und 35 ist 5; 5 mißt $15+35=50$ nach der Zahl 10, und $35-15=20$ nach der Zahl 4.

Das größte gemeine Maß von 65 und 104 ist 13; $65=5.13$; $104=8.13$; daher ist $104+65=8.13+5.13=13.13$, und $104-65=8.13-5.13=3.13$; es ist also sowohl $104+65$, als auch $104-65$ durch 13 meßbar.

Wenn man zwei ungleiche Zahlen hat, und die größere durch die kleinere nach der theilweisen Division dividirt, dann den Divisor durch den Rest dividirt, diesen zweiten Divisor wieder durch den zweiten Rest, den dritten Divisor durch den dritten Rest dividirt, immer den letzten Divisor durch den letzten Rest; so wird man durch diese fortschreitende Division endlich

Digitized by Google

auf einen Divisor kommen, der ein Maß von dem letzten Dividendus ist, und dieses Maß ist zugleich das größte gemeine Maß der beiden gegebenen Zahlen.

Z. B. die gegebenen Zahlen seien 4015 und 9271, deren größtes gemeine Maß man sucht.

$$
\begin{array}{rl|l}
4015 & 9271 & 2 \\
 & 8030 & \\
\hline
 & 1241 & 4015 \mid 3 \\
 & & 3723 \\
\hline
 & & 292 \mid 1241 \mid 4 \\
 & & \quad 1168 \\
\hline
 & & \quad 73 \mid 292 \mid 4 \\
 & & \quad\quad 292 \\
\hline
 & & \quad\quad 0
\end{array}
$$

9271 : 4015 = 2 zum Quotienten und 1241 zum Rest;
4015 : 1241 = 3 " " " 292 " "
1241 : 292 = 4 " " " 73 " "
292 : 73 = 4 " " " 0 " "

so ist 73 das größte gemeine Maß der gegebenen Zahlen.

Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, daß der Dividendus gleich ist dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten nebst dem Reste; daher ist $292 = 4 . 73 + 0 = 4 . 73$, also ist 73 ein Maß von 292. Nun ist $1241 = 4 . 292 + 73$; da 73 ein Maß von 292 ist, so ist 73 auch ein Maß von $4 . 292 = 16 . 73$; daher ist 73 ein Maß von $4 . 292 + 73$ oder von 1241. Es ist $4015 = 3 . 1241 + 292$; 73 ist nun ein Maß von $3 . 1241$, aber auch von 292; also ist 73 ein Maß von $3 . 1241 + 292$ oder von 4015. Nun ist $9271 = 2 \times 4015 + 1241$; aber 73 mißt $2 . 4015$ und auch 1241; also mißt 73 die Zahl 9271; also ist 73 ein gemeines Maß der gegebenen Zahlen, und es ist $4015 = 55 . 73$, $9271 = 127 . 73$.

Nun ist zu zeigen, daß 73 auch das größte gemeine Maß ist; wäre 73 solches nicht, so müßte es eine Zahl > 73 geben, welche das größte gemeine Maß der gegebenen Zahlen 4015 und 9271 wäre; da es noch unbekannt ist, so nenne man es vorläufig das unbekannte Maß.

Nun mißt das unbek. Maß 4015, also auch $2 . 4015$ und auch 9271, daher auch die Differenz $9271 - 2 . 4015 = 1241$; daher mißt das unbek. Maß auch $3 . 1241$, also auch die Differenz $4015 - 3 . 1241 = 292$. Da das unbek. Maß 1241 und auch 292, also auch $4 . 292$ mißt, so mißt das unbek. Maß auch $1241 - 4 . 292 = 73$; also mißt die größere Zahl, das unbek. Maß, die kleinere 73, welches unmöglich ist. Daher giebt es keine Zahl, die größer als 73 ist, und die zugleich ein Maß der gegebenen Zahlen wäre; folglich ist 73 das größte gemeine Maß der gegebenen Zahlen.

Digitized by Google

Jedes ähnliche Beispiel wird in gleicher Art behandelt.

Welches ist das größte gemeine Maß von 6499 und 21 534, von 5056 und 16 881?

Wenn man die Summe der Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf die Ordnung der Einheiten, welche die Stellen bezeichnen, nimmt, so nennt man diese Summe die Quersumme derselben. Z. B. die Quersumme der Zahl 3487 ist $= 3+4+8+7 = 22$.

Wenn die Quersumme einer Zahl ein Vielfaches von 3 oder 9 ist: so ist die Zahl selbst ein Vielfaches von 3 oder 9.

Es ist
$$10 = 9+1$$
$$100 = 99+1$$
$$1000 = 999+1$$
$$10\,000 = 9999+1$$
$$100\,000 = 99\,999+1$$
$$1\,000\,000 = 999\,999+1. \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Ferner ist eine beliebige Zahl $45834 = 4 + 3.10 + 8.100 + 5.1000 + 4.10\,000$; also

$$4 = 4$$
$$30 = 3.9+3$$
$$800 = 8.99+8$$
$$5\,000 = 5.999+5$$
$$40\,000 = 4.9999+4$$

$$45\,834 = (4+3+8+5+4)+(3.9+8.99+5.999+4.9999)$$

Die 2te Summe in den Klammern $(3.9+8.99+5.999+4.9999)$ ist ein Vielfaches sowohl von 3 als auch von 9; wenn nun solches auch die erste $4+3+8+5+4 = 24$ ist, so muß die Zahl selbst ein Vielfaches von 3 oder 9 sein. Nun ist 24 ein Vielfaches von 3, also ist die Zahl 45 834 ein Vielfaches von 3.

Die Quersumme der Zahl 834 541 ist $8+3+4+5+4+1 = 25$, ein Vielfaches weder von 3 noch von 9; daher ist auch die Zahl selbst ein Vielfaches weder von 3 noch von 9.

Aber die Quersumme der Zahl 834 741 ist $8+3+4+7+4+1 = 27$, ein Vielfaches von 9, so ist auch die Zahl selbst ein Vielfaches von 9, daher auch von 3.

Eine Zahl ist ein Vielfaches von 11, wenn die Differenz zwischen der Quersumme der geraden und der Quersumme der ungeraden Stellen einer Zahl (von der niedrigsten Stelle an gerechnet) ein Vielfaches von 11 oder Null ist.

Z. B. 742 456; die Quersumme der ungeraden Stellen ist $6+4+4 = 14$, die Quersumme der geraden ist $5+2+7 = 14$; die Differenz beider Summen ist Null, so ist die gegebene Zahl ein Vielfaches von 11; nämlich $742\,456 = 67\,496 . 11$.

Digitized by Google

Ein anderes Beispiel. 2 836 174 ist ein Vielfaches von 11; denn die Quersumme der ungeraden Stellen ist $4+1+3+2=10$, die Quersumme der geraden ist $7+6+8=21$; die Differenz beider Summen ist $21-10=11$, also ein Vielfaches von 11; daher ist solches auch die gegebene Zahl.

Denn es ist
$$\begin{aligned}
1 &= 0.11+1\\
10 &= 11-1 = 11-1\\
100 &= 99+1\\
1\,000 &= 990+10 = 990+11-1\\
10\,000 &= 9999+1\\
100\,000 &= 99\,990+10 = 99\,990+11-1\\
1\,000\,000 &= 999\,999+1\\
&\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Man wird bemerken, daß die Einheiten an den ungeraden Stellen ein Vielfaches von 11 und 1, die Einheiten an den geraden Stellen ein Vielfaches von 11 weniger 1 sind.

$$\begin{aligned}
6 &= 6\\
50 &= 5.11-5\\
400 &= 4.99+4\\
2\,000 &= 2.(990+11)-2\\
40\,000 &= 4.9999+4\\
700\,000 &= 7.(99\,990+11)-7\\
\hline
742\,456 &= [5.11+4.99+2.(990+11)+4.9999+7\times\\
&\quad (99990+11)]+(6+4+4)-(5+2+7).
\end{aligned}$$

Die erste Summe in Klammern ist ein Vielfaches von 11; wenn nun die Differenz der beiden andern Summen in Klammern auch ein Vielfaches von 11 ist, so muß solches die gegebene Zahl sein. Nun ist aber Null ein Vielfaches von 11, also ist solches die Zahl. ꝛc. Hieraus wird man leicht folgern, wenn eine Zahl das 6fache, 12fache, 15fache ꝛc. einer Zahl ist. Denn $6=2.3$; ist also eine Zahl das 2fache und das 3fache einer andern, so ist sie das 6fache einer Zahl. $12=3.4$; wenn also eine Zahl ein Vielfaches von 3 und auch von 4 ist, so ist sie ein Vielfaches von 12. ꝛc.

3) Ueber die Neunerprobe der vier Species in ganzen Zahlen.

Will man sich von der Richtigkeit einer Rechnung überzeugen, so muß man sie noch-einmal vornehmen; da dieses aber oft mühsam und Zeit raubend ist, so muß es sehr willkommen sein, ein einfaches Mittel zur Prüfung der Richtigkeit einer Rechnung zu haben; und dieses einfache Mittel ist die Neunerprobe.

Die Quersumme einer Zahl durch 9 dividirt, und die Zahl selbst durch 9 dividirt, giebt stets gleiche Reste der Division.

Dieser Satz ist aus dem Vorhergehenden klar.

Digitized by Google

Die Addition ist richtig, wenn die Summe der Quersummen von den Summanden durch 9 dividirt, und die Quersumme der Summe durch 9 dividirt, gleiche Reste der Division lassen.

3485 Quersumme = 20
7596 " = 27
4678 " = 25
} = 72 : 9, giebt zum Reste 0.

15759 " = 27 : 9, giebt zum Reste 0; also ist die Addition richtig. Wäre sie dennoch unrichtig, so müßte man sich entweder in der Addition oder in der Probe um ein Vielfaches von 9 verrechnet haben, welches gewiß selten geschehen wird.

Man kann diese Probe dadurch abkürzen, daß man 9 oder jedes Vielfache von 9 aus der Rechnung läßt; dadurch reducirt sich die erste Quersumme auf 2, die andere auf 0, die 3te auf 7, und also die Summe der Quersummen auf 9; also Divisionsrest Null. Die Quersumme der Summe wird dadurch gleichfalls Null.

Da der Minuendus stets gleich der Summe des Subtrahendus und des Restes ist; so wird die Subtraktion richtig sein, wenn die Quersumme des Minuendus durch 9 dividirt, und die Summe der Quersummen des Subtrahendus und Restes durch 9 dividirt, gleiche Reste der Division lassen.

$284 \times 467 = 132\,628$; $284 = (2.99 + 8.9) + 2 + 8 + 4 = (2.99 + 8.9) + 9 + 5 =$ (einem Vielfachen von 9) $+ 5$; $467 = (4.99 + 6.9) + 4 + 6 + 9 = (4.99 + 6.9) + 9 + 8 =$ (einem Vielfachen von 9) $+ 8$; also ist $284 \times 467 = [$(Vielf. von 9)$ + 5] \times [$(Vielf. von 9)$ + 8] =$ (Vielf. von 9) (Vielf. von 9) $+$ (Vielf. von 9) $\times 8 + 5 \times$ (Vielf. von 9) $+ 40$. Jedes der 3 ersten Produkte ist ein Vielfaches von 9, also auch ihre Summe; daher ist $284 \times 467 =$ einem Vielfachen von $9 + 40$. Die Quersumme des Produkts ist $1 + 3 + 2 + 6 + 2 + 8 = 22$, dividirt durch 9, giebt 4 zum Reste; 40 dividirt durch 9, giebt 4 zum Reste; also ist die Multiplikation richtig.

In diesem Beispiele war 40 das Produkt der Divisionsreste der Quersummen von den Faktoren; daher hat man zur Prüfung der Multiplikation folgendes Verfahren. Man sucht die Divisionsreste der Quersummen jedes Faktors, bildet das Produkt dieser Reste, und sucht wieder den Divisionsrest dieses Produkts, welcher dem Divisionsreste der Quersumme des Produkts der Zahlen gleich sein muß. Noch ein Beispiel.

625 Quersumme = 13 : 9, Divisionsrest = 4
487 " = 19 : 9, " = 1

4375 Produkt = 4 : 9, Rest 4.
5000
2500

304375 Quersumme = 22 : 9, Rest 4; also die Multiplikation richtig.

Digitized by Google

Der Dividendus ist entweder ein Vielfaches vom Divisor, oder nicht; im ersten Falle bleibt kein Rest der Division, im andern bleibt ein Rest.

Im ersten Falle ist der Dividendus gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten, und für diesen Fall ist die Probe der Division mit der der Multiplikation übereinstimmend.

Im andern Falle ist der Dividendus gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten nebst dem Reste; daher muß der Divisionsrest der Quersumme des Dividendus gleich sein dem Divisionsreste der Quersumme des genannten Produkts nebst dem Divisionsreste der Quersumme von dem Reste.

Ein Beispiel zur Erläuterung.

Divisor	Dividendus	Quotient.			
4892	3563858	728.			
	34244	Quersumme des Divisors	= 23,	Divisionsrest	5
	13945	» » Quotienten	17,	»	8
	9784	Produkt beider Reste . .	40,	»	4
	41618	Quersumme des Restes .	16,	»	7
	39136		Summe der Reste		11 : 9,
	2482 Rest.				Rest 2.

Quersumme des Dividendus = 38 : 9, Rest 2; also ist die Division richtig, oder um ein Vielfaches von 9 verrechnet, was selten geschehen wird.

4) Vollständige Division.

In der vollständigen Division untersucht man, welches Vielfache und welcher Bruch der Dividendus vom Divisor ist. Das gesuchte Vielfache erhält man nach der bekannten theilweisen Division, und den gesuchten Bruch kann man auf zweifache Weise ermitteln.

Wenn nämlich der Dividendus nicht ein genaues Vielfache vom Divisor ist, so bleibt nach der theilweisen Division ein Rest übrig; diesen Divisionsrest hat man nun noch besonders durch den Divisor zu dividiren, oder zu untersuchen, welcher Bruch dieser Rest von dem Divisor ist.

Angenommen der Rest sei 324 und der Divisor 695. Man hat also den Divisor 695 als ein Ganzes zu betrachten, und da dieses 695 gleiche Theile (nämlich jeden Theil = der Einheit) hat, so sind die Theile 695stel; der Rest 324 hat aber 324 eben solcher Theile; also ist $324 = \frac{324}{695}$ von 695.

Oder Eins, d. h. 1 Ganzes, dividirt durch 695, d. h. in 695 gleiche Theile getheilt, giebt $\frac{1}{695}$ eines Ganzen; also jedes von 324 Ganzen durch 695 dividirt, giebt $\frac{1}{695}$, also von 324 Ganzen den 695sten Theil genommen, muß $\frac{324}{695}$ geben.

Das kurze Verfahren besteht also darin, daß man den Rest der Division zum Zähler und den Divisor zum Nenner des gesuchten Bruches macht, so hat man den Bruch gefunden.

Digitized by Google

$$
\begin{array}{r|l|l}
476 & 827846 & 1739\frac{82}{476}\left|\frac{41}{238}\right. \\
 & 476 & \\
\hline
 & 3518 & \\
 & 3332 & \\
\hline
 & 1864 & \\
 & 1428 & \\
\hline
 & 4366 & \\
 & 4284 & \\
\hline
 & 82 &
\end{array}
$$

Der Lehrer hat strenge darauf zu halten, daß jeder Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht, d. h. gehoben werde, wozu die Schüler die Mittel bereits kennen.

5) Einige Vortheile der Division.

Sind zwei Zahlen gegeben, und man soll 1) die Summe, 2) die Differenz, 3) das Produkt, 4) den Quotienten derselben durch eine dritte Zahl dividiren, so kann man in manchen Fällen die Rechnung abkürzen, und zwar in denjenigen, in welchen der Divisor ein Maß jener Zahlen ist.

a. Addition. Man soll die Summe von 872 und 3529 durch 2, 4, 8 dividiren. Man dividire jede Zahl durch den gegebenen Divisor.

$$
\begin{aligned}
(872+3529):2 &= 436+1764\tfrac{1}{2} = 2200\tfrac{1}{2};\\
(872+3529):4 &= 218+882\tfrac{1}{4} = 1100\tfrac{1}{4};\\
(872+3529):8 &= 109+441\tfrac{1}{8} = 550\tfrac{1}{8};\\
(4575+729):15 &= 305+48\tfrac{3}{5} = 353\tfrac{3}{5};\\
(3672+468):18 &= 204+26 = 230;\\
(8127+512):27 &= 301+18\tfrac{8}{27} = 319\tfrac{26}{27};\ \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

b. Subtraktion. Man dividire wieder jede Zahl durch den gegebenen Divisor.

$(13\,829-585):5 = 2765\frac{4}{5}-117 = 2648\frac{4}{5}$. ꝛc.

c. Multiplikation. Man dividire nur die eine Zahl durch den gegebenen Divisor, und multiplicire den erhaltenen Quotienten durch die andere Zahl. Z. B. $8.17:4 = 2.17 = 34$; $24.97:6 = 4.97 = 388$; $45.376:15 = 3.376 = 1128$; $144.4698:72 = 2.4698 = 9396$; $96.7864:12 = 8.7864 = 62\,912$; $68.754:17 = 4.754 = 3016$; $95.869:19 = 5.869 = 4345$. ꝛc.

Bemerkt man ein gemeines Maß zwischen dem Divisor und einer oder beiden Zahlen des Dividendus, so schaffe man dasselbe durch Division fort. Z. B. $75.839:125$; hier ist zwischen 75 und 125 das größte gemeine Maß 25; daher verwandelt sich die Aufgabe in folgende:

$3.839:5 = 2517:5 = 503\frac{2}{5}$.

$64.2879:48 = 4.2879:3 = 11\,516:3 = 3838\frac{2}{3}$.

$98.769:84 = 7.769:6 = 5383:6 = 897\frac{1}{6}$.

$4327.144:288 = 4327:2 = 2163\frac{1}{2}$. ꝛc.

d. Division. Wenn man zwischen Divisor und Dividendus ein gemeines Maß bemerkt, so schaffe man dasselbe vor der Division weg.

Digitized by Google

$83\,900 : 470 = 8390 : 47 = 178\frac{4}{47}$;
$459\,075 : 105 = 30\,605 : 7 = 4372\frac{1}{7}$;
$3\,297\,872 : 64 = 412\,234 : 8 = 51\,529\frac{1}{4}$; ꝛc.

Wenn man eine Zahl durch das Produkt zweier andern dividiren soll, und der Dividendus ein Vielfaches von einem Faktor des Divisors ist; so dividire man zuerst den Dividendus und den Divisor durch den erwähnten Faktor, und diesen Quotienten durch den andern Faktor des Divisors.

$7855 : 5 . 39 = 1571 : 39 = 40\frac{11}{39}$;
$86\,306 : 11 . 59 = 7846 : 59 = 132\frac{58}{59}$; ꝛc.

B. Addition gebrochener Zahlen.

Das Wesentliche über Addition der Brüche ist bereits II. K. Seite 89 ff. dieses Kapitels angezeigt, und es wäre daher hier eine unnütze Wiederholung, dasselbe noch einmal weitläufig vorzutragen; was dort in kleinen Zahlen geschah, wird hier in großen Zahlen ausgeführt.

Man stelle die gegebenen Brüche in eine senkrechte Kolumne, suche dann den kleinsten Generalnenner der gegebenen; verwandle die gegebenen Brüche in solche, deren Nenner der Generalnenner ist, ꝛc.

	17 640	
$\frac{4}{7}$	2520	10080
$\frac{9}{14}$	1260	11340
$\frac{8}{21}$	840	6720
$\frac{13}{28}$	630	8190
$\frac{17}{35}$	504	8568
$\frac{5}{42}$	420	2100
$\frac{8}{49}$	360	2880
$\frac{11}{56}$	315	3465
$\frac{16}{63}$	280	4480
$3\frac{4903}{17640}$	17640	57823 | 3 52920
		4903

$7) 35 . 42 . 49 . 56 . 63$
$2) 5 . 6 . 7 . 8 . 9$
$3) 5 . 3 . 7 . 4 . 9$
$5 . 1 . 7 . 4 . 3$
$7.2.3.5.7.4.3 = 17640.$

Hat man berechnet, wie viele Theile $\frac{1}{7}$ des G.N. enthält, so kann man die übrigen Theile leicht finden; indem $\frac{1}{14} = \frac{1}{2}$ von $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{21} = \frac{1}{3}$ von $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{28} = \frac{1}{4}$ von $\frac{1}{7}$, ꝛc.

Sind außer den Brüchen auch Ganze gegeben, so wird man zuerst die Brüche und dann die Ganzen summiren.

	144	
$8\frac{7}{9}$	16	112
$15\frac{5}{12}$	12	60
$23\frac{9}{16}$	9	72
$47\frac{13}{16}$	8	104
$95\frac{53}{144}$	144	348 | 2 288
		60

Digitized by Google

C. Subtraktion gebrochener Zahlen.

Vergleiche II. I. Seite 91 u. 92.

$8.5.3.\frac{2}{8}$	Ist im Minuendus kein Bruch vorhanden, so verwandelt
$2\,6\,9\,\frac{7}{8}$	man ein Ganzes in einen Bruch, der gleichnamig mit dem
$5\,8\,3\,\frac{1}{8}$	Bruche des Subtrahendus ist.

	288	Wenn der Bruch des Subtrahendus größer als der
$3.7.5.4.\frac{3}{9}$	105	des Minuendus ist, so nimmt man zu dem Bruche des
	393	letztern ein Ganzes, das man in Theile des G.N. ver-
$1\,8\,9\,6\,\frac{7}{12}$	284	wandelt; ꝛc.
$1\,8\,5\,7\,\frac{109}{288}$	109	

D. Multiplikation gebrochener Zahlen.

Die Erklärung der Multiplikation, welche in diesem Abschnitte, Erstes Kapitel I. A. Seite 43., gegeben ist, ist nur auf ganze Zahlen, nicht aber auf Brüche anwendbar; damit sie auch für diese gelte, hat man sie umzuändern.

Eine Zahl mit einer andern multipliciren heißt: eine dritte so aus der ersten erzeugen, wie die zweite aus einem Ganzen entstanden ist.

Der Multiplikandus ist die Zahl, aus welcher eine andere so entsteht, wie eine dritte aus einem Ganzen hervorgebracht ist.

Der Multiplikator ist die Zahl, welche bestimmt, daß eine Zahl aus einer andern so gebildet werden soll, wie er aus einem Ganzen entstanden ist.

Das Produkt zweier Zahlen ist diejenige, welche so aus der einen, wie die andere aus einem Ganzen entstanden ist.

(Diese vier Erklärungen sind aus dem mehrmals erwähnten «Grundrisse der Elementar-Arithmetik ꝛc.»)

Man hat nun folgende Multiplikationen zu machen: 1) gebrochene Zahlen zu multipliciren durch ganze, 2) ganze Zahlen zu multipliciren durch gebrochene und 3) gebrochene Zahlen durch gebrochene zu multipliciren.

1) Gebrochene Zahlen durch ganze zu multipliciren.

Welches Produkt erhält man, wenn man $\frac{3}{4}$ durch 5 multiplicirt?

Aufl. 1. Aus dem Multiplikandus $\frac{3}{4}$ muß so eine Zahl erzeugt werden, wie der Multiplikator 5 aus einem Ganzen entstanden ist. Nun ist der Multiplikator eine ganze Zahl, also ein Vielfaches von einem Ganzen; daher muß man ein Vielfaches von dem Multiplikandus nehmen. Das 5fache von $\frac{3}{4}$ ist aber $= \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$, also eine Summe gleichnamiger Brüche; diese ist aber gleich einem Bruche, der zum Zähler die Summe der Zähler und zum Nenner einen der gleichnamigen Nenner hat. Daher ist $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3+3+3+3+3}{4}=\frac{5\cdot3}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$; also $5\times\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{4}$.

Digitized by Google

Hieraus folgt der Satz: Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt wird, so erhält man einen Bruch, der zum Zähler das Produkt aus der ganzen Zahl und dem Zähler und zum Nenner den Nenner des gegebenen Bruches hat.

Die Verwandlung eines unechten Bruches in eine gemischte Zahl wird aus dem Früheren als bekannt vorausgesetzt. Hier hat man vor der Multiplikation des Zählers mit der ganzen Zahl vorzüglich auf das gemeine Maß zwischen dieser und dem Nenner Rücksicht zu nehmen. Z. B.

$\frac{17}{24} \times 32 = \frac{17 \cdot 32}{24} = \frac{17 \cdot 4}{3} = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}$;

$\frac{95}{96} \times 108 = \frac{95 \cdot 108}{96} = \frac{95 \cdot 9}{8} = 106\frac{7}{8}$;

$\frac{137}{156} \times 195 = \frac{137 \cdot 13 \cdot 15}{13 \cdot 12} = \frac{137 \cdot 5}{4} = 171\frac{1}{4}$; ꝛc.

Soll man eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl multipliciren, so richtet man die gemischte Zahl ein, d. h. man verwandelt sie in einen unechten Bruch, und dadurch ist die Aufgabe auf die vorstehende zurückgebracht; oder man multiplicirt die ganze Zahl der gemischten durch die ganze, und auch den Bruch der gemischten durch die ganze Zahl. Z. B.

$27\frac{8}{9} \times 17 = 27 \cdot 17 + \frac{8}{9} \cdot 17 = 459 + \frac{136}{9} = 474\frac{1}{9}$;

$356\frac{1}{2}\frac{3}{5} \times 64 = 356 \cdot 64 + \frac{1}{2}\frac{3}{5} \times 64 = 22\,817\frac{7}{2\,5}$; ꝛc.

2) Ganze Zahlen durch gebrochene zu multipliciren.

Wenn man 7 mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt, so erhält man welches Produkt?

Aufl. 2. Aus dem Multiplikandus 7 muß man so eine Zahl erzeugen, wie der Multiplikator $\frac{4}{5}$ aus einem Ganzen entstanden ist. Der Multiplikator ist ein Bruch; ein Bruch ist aber ein Vielfaches von einem Theile eines Ganzen; also muß man ein Vielfaches von einem Theile des Multiplikandus nehmen. Der 5te Theil von 1 ist $\frac{1}{5}$, also der 5te Theil von 7 sind $\frac{7}{5}$ und dieses 4 mal genommen, giebt $4 \times \frac{7}{5} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$. Daher ist $\frac{4}{5} \times 7 = \frac{4 \cdot 7}{5} = 5\frac{3}{5}$.

Allgemeiner Satz. Wenn man eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt, so erhält man zum Produkte einen Bruch, der zum Zähler das Produkt aus dem Zähler und der ganzen Zahl und zum Nenner den Nenner des gegebenen Bruches hat.

Aus diesem und dem vorstehenden Satze ergiebt sich, daß eine ganze Zahl mal einem Bruch gleich ist dem Bruche mal der ganzen Zahl; denn in jedem Falle ist das Produkt ein Bruch, dessen Zähler das Produkt aus dem Zähler und der ganzen Zahl, und dessen Nenner der des gegebenen Bruches ist. Nun ist aber eine erste Zahl mal einer zweiten gleich der zweiten mal der ersten, wenn es ganze Zahlen sind; also sind die Zähler dieser Brüche und auch ihre Nenner einander gleich; daher sind die Brüche d. h. die Produkte auch einander gleich. Z. B. $5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3}$ (nach Aufl. 1.); $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \cdot 5}{3}$ (nach Aufl. 2.); aber $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$; also $\frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3}$; daher $5 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 5$.

Digitized by Google

Auch hier wird man nicht unbeachtet lassen, das gemeine Maß zwischen dem Nenner und der ganzen Zahl wegzuschaffen.

$\frac{3}{64} \times 48 = \frac{48 \cdot 63}{64} = \frac{189}{4} = 47\frac{1}{4}$;

$81 \cdot \frac{25}{7} = 3 \cdot 28 = 84$. ꝛc.

3) Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.

Wenn man $\frac{4}{7}$ mit $\frac{5}{9}$ multiplicirt, so erhält man welches Produkt?

Aufl. 3. Aus dem Multiplikandus $\frac{4}{7}$ muß man so eine Zahl hervorbringen, wie der Multiplikator $\frac{5}{9}$ aus einem Ganzen entsteht. Nun ist der Multiplikator ein Bruch, also ein Vielfaches von einem Theile eines Ganzen; daher muß man ein Vielfaches von einem Theile des Multiplikandus nehmen. Der Multiplikandus ist aber gleichfalls ein Bruch; also hat man ein Vielfaches von einem Theile von einem Vielfachen von einem Theile eines Ganzen zu nehmen.

Man nehme zunächst einen Theil von einem Theile eines Ganzen; also in diesem Beispiele den 9ten Theil vom 7ten Theile eines Ganzen. Um den 9ten Theil von einem 7tel zu erhalten, muß man ein 7tel in 9 gleiche Theile theilen, also hat $\frac{1}{7}$ 9 gleiche Theile; das Ganze hat $7 \times \frac{1}{7}$; daher hat das Ganze 7×9 jener Theile oder 63 eben solcher Theile. Wenn aber das Ganze 63 gleiche Theile hat, so ist einer dieser Theile $\frac{1}{63}$ des Ganzen; daher ist der 9te vom 7ten Theile eines Ganzen $= \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{1}{63}$ des Ganzen. Der 9te Theil von $\frac{4}{7}$ ist daher $\frac{4}{63}$, und 8 mal den 9ten Theil von $\frac{4}{7} = 8$ mal $\frac{4}{63} = \frac{8 \cdot 4}{63} = \frac{32}{63}$. Folglich ist $\frac{5}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{8 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \frac{32}{63}$.

Viele Beispiele haben die Kinder in ähnlicher Weise aufzulösen, bis ihnen diese Schlußfolgen zur völligen Geläufigkeit geworden sind.

Folgerungen. Ein Theil von einem Theile eines Ganzen ist ein solcher Theil desselben, der zum Zähler die Einheit und zum Nenner das Produkt der Nenner der gegebenen Theile hat.

Das Produkt aus zwei Brüchen ist gleich einem Bruche, der zum Zähler das Produkt der Zähler und zum Nenner das Produkt der Nenner der gegebenen Brüche hat.

Die Beispiele, welche man hier rechnen läßt, müssen sich vorzüglich auf das gemeine Maß zwischen Zähler und Nenner beziehen.

$\frac{14}{15} \times \frac{25}{28} = \frac{14 \cdot 25}{15 \cdot 28} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{5}{6}$; $\frac{26}{27} \times \frac{36}{65} = \frac{26 \cdot 36}{27 \cdot 65} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5} = \frac{8}{15}$;

$\frac{49}{51} \times \frac{85}{91} = \frac{49 \cdot 85}{51 \cdot 91} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 13} = \frac{35}{39}$; ꝛc.

E. Division gebrochener Zahlen.

Nur dadurch kann diese Rechnungsart ausgeführt werden, daß man die Erklärung der Division auf dieselbe anwendet, wie solches vorher in der Multiplikation geschah. Die Erklärung bedingt die Art der Auflösung. Die passendste Erklärung zu diesem Zwecke ist die letzte, welche Seite 98. gegeben ist.

Digitized by Google

1) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Wenn man $\frac{5}{8}$ durch 9 dividirt, so erhält man welchen Quotienten?

Aufl. 1. Aus dem Dividendus $\frac{5}{8}$ muß man so eine Zahl hervorbringen, wie ein Ganzes aus dem Divisor 9 entsteht. Der Divisor ist eine ganze Zahl, also ein Vielfaches von einem Ganzen; also ist das Ganze ein Theil des Divisors; daher bringt man aus dem Dividendus so den Quotienten hervor, daß man einen Theil von dem Dividendus nimmt. Ein Ganzes ist der 9te Theil von 9 Ganzen; also muß man den 9ten Theil von $\frac{5}{8}$ nehmen. Der 9te Theil von $\frac{1}{8}$ ist $\frac{1}{8.9} = \frac{1}{72}$ (s. vorher Aufl. 3.) und der 9te Theil von $\frac{5}{8}$ ist also $\frac{5}{8.9} = \frac{5}{72}$; also ist $\frac{5}{8} : 9 = \frac{5}{8.9} = \frac{5}{72}$.

Allgemeiner Satz. Einen Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, giebt zum Quotienten einen Bruch, der zum Zähler den Zähler des gegebenen Bruches und zum Nenner das Produkt aus dem Nenner und der ganzen Zahl hat.

$\frac{1}{16} : 5 = \frac{1}{16.5} = \frac{1}{80}$; $\frac{2}{25} : 3 = \frac{2}{25.3} = \frac{2}{75}$; $\frac{48}{49} : 32 = \frac{48}{49.32} = \frac{3}{49.2} = \frac{3}{98}$; $\frac{68}{69} : 85 = \frac{68}{69.85} = \frac{4}{69.5} = \frac{4}{345}$. ꝛc.

$7\frac{1}{2} : 2 = \frac{15}{2} : 2 = \frac{15}{2.2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

$8\frac{4}{5} : 11 = \frac{44}{5} : 11 = \frac{44}{5.11} = \frac{4}{5}$. ꝛc.

2) Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

Was ist ein Ganzes von $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ꝛc., kurz von einem Bruche?

Aufl. 2. In dieser Aufgabe muß man den Bruch als ein Ganzes betrachten, und die Zahl seiner gleichen Theile untersuchen, dann bestimmen, welcher Theil einer der Theile des Bruches von demselben ist, und hierauf das Vielfache angeben, welches ein Ganzes von einem der genannten Theile des Bruches ist. Also die als das Ganze zu betrachtende Zahl ist $\frac{2}{3}$, und hat 2 gleiche Theile, deren jeder $\frac{1}{3}$ ist, also ist einer dieser Theile $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$; nun hat aber ein Ganzes $\frac{3}{3}$ oder 3 mal $\frac{1}{3}$; also ist ein Ganzes $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$. Ist die als das Ganze zu betrachtende Zahl $\frac{3}{4}$, so hat sie 3 gleiche Theile, daher ist jeder $\frac{1}{4}$ derselben; ein Ganzes hat aber $\frac{4}{4}$, also 4 eben solcher Theile; folglich ist ein Ganzes $= \frac{4}{3}$ von $\frac{3}{4}$.

Aus denselben Gründen ist ein Ganzes $= \frac{5}{4}$ von $\frac{4}{5}$. ꝛc.

Man kehrt einen Bruch um, wenn man seinen Nenner zum Zähler und seinen Zähler zum Nenner eines neuen Bruches macht, und dieser so gebildete Bruch heißt der umgekehrte Werth des gegebenen Bruches.

Folgerung. Ein Ganzes ist der umgekehrte Werth eines Bruches mal diesem Bruche. (Wer den allgemeinen Beweis dieses Satzes wissen will, der lese ihn Seite 100 des Grundrisses der Elementar-Arithmetik ꝛc.)

Wenn man 13 durch $\frac{7}{12}$ dividirt, so erhält man welchen Quotienten?

Aufl. 3. Aus dem Dividendus 13 muß man so den Quotienten bilden, wie ein Ganzes aus dem Divisor $\frac{7}{12}$ entsteht. Nun ist der Divisor ein

Digitized by Google

Bruch; also ist ein Ganzes der umgekehrte Werth des Bruches mal demselben Bruche (Aufl. 2.); daher 1 Ganzes gleich $\frac{12}{7}$ von $\frac{7}{12}$; also muß man den Dividendus $\frac{12}{7}$ mal, also einen Bruch mal nehmen. Eine ganze Zahl mal einem Bruche, giebt einen Bruch, der zum Zähler das Produkt aus der ganzen Zahl und dem Zähler, und zum Nenner den Nenner des Bruches hat. Folglich ist 13 durch $\frac{7}{12}$ dividirt gleich $13 \cdot \frac{12}{7} = \frac{13 \cdot 12}{7}$.

Allgemeiner Satz. Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, so erhält man zum Quotienten das Produkt aus der ganzen Zahl und dem umgekehrten Werthe des Bruches.

$25 : \frac{5}{8} = 25 \cdot \frac{8}{5} = \frac{25 \cdot 8}{5} = 5 \cdot 8 = 40;$

$52 : \frac{40}{40} = 52 \cdot \frac{40}{39} = \frac{52 \cdot 40}{39} = \frac{4 \cdot 40}{3} = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3}$. ꝛc.

3) Division eines Bruches durch einen Bruch.

Wenn man $\frac{7}{9}$ durch $\frac{8}{13}$ dividirt, so erhält man welchen Quotienten?

Aufl. 4. Aus dem Dividendus $\frac{7}{9}$ muß man so den Quotienten bilden, wie ein Ganzes aus dem Divisor $\frac{8}{13}$ entsteht. Nun ist ein Ganzes gleich dem umgekehrten Werthe eines Bruches mal demselben Bruche; also ein Ganzes $= \frac{13}{8}$ mal $\frac{8}{13}$; folglich muß man $\frac{7}{9}$ $\frac{13}{8}$ mal nehmen; aber $\frac{7}{9} \times \frac{13}{8} = \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 8}$; also ist $\frac{7}{9} : \frac{8}{13} = \frac{7}{9} \cdot \frac{13}{8} = \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 8}$.

Allgemeiner Satz. Wenn man einen Bruch durch einen Bruch dividirt, so erhält man zum Quotienten das Produkt aus dem Dividendus und dem umgekehrten Werthe des Divisors.

Dieser Satz ist ganz allgemein, und gilt nicht allein für Brüche, sondern auch für ganze Zahlen. Denn der umgekehrte Werth einer Zahl, oder das Umgekehrte einer Zahl ist stets die Einheit dividirt durch dieselbe Zahl, oder immer ein Bruch, der zum Zähler Eins und zum Nenner dieselbe Zahl hat. Also $7 : 8 = 7 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; $5 : 3\frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{3\frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{7}$; $\frac{8}{9} : \frac{6}{13} = \frac{8}{9} \cdot \frac{13}{6} = \frac{8 \cdot 13}{9 \cdot 6} = \frac{52}{27} = 1\frac{25}{27}$; $3\frac{5}{6} : 2\frac{1}{3} = \frac{23}{6} \cdot \frac{1}{2\frac{1}{3}} = \frac{23}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{23}{14} = 1\frac{9}{14}$.

IV. Ueber Decimalbrüche und die vier Species mit denselben.

Die vier Species (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) in Decimalbrüchen sind eben dieselben, welche man mit ganzen Zahlen zu machen hat; daher sind sie zu gewöhnlichen Rechnungen geeigneter, als die gemeinen Brüche; und dennoch werden sie in Rechnungen des bürgerlichen Verkehrs selten angewandt, von Manchen sogar gemieden oder wie gemeine Brüche behandelt, und als ein Eigenthum der Rechenmeister betrachtet. Der Grund davon kann kein anderer als die geringe Kenntniß der Decimalbrüche und die wenige Uebung oder der gänzliche Mangel der Uebung in denselben sein; daher hat der Lehrer darauf hinzuwirken, daß die Schüler eine deutliche Kenntniß der Decimalbrüche und eine genügende Fertigkeit in den Rechnungen mit denselben erlangen.

Digitized by Google

Das lateinische decem heißt zehn; daher der Ausdruck Decimalbruch.

Der Decimalbruch ist ein solcher Bruch, der zum Zähler eine ganze Zahl und zum Nenner eine von den Einheiten verschiedener Ordnungen hat; also entweder 1 Z. = 10, oder 1 H. = 100, oder 1 T. = 1000, oder 1 Z.T. = 10 000 ꝛc.

A. Bildung und Bezeichnung der Decimalbrüche.

Die Nenner der Decimalbrüche werden nicht, sondern nur ihre Zähler geschrieben, und zwar in derselben horizontalen Reihe der Ganzen; um aber die Decimalbrüche nicht mit den Ganzen, welche dabeistehen, zu verwechseln, bedient man sich des Komma, welches Decimalstrich heißt, und zwischen die Stellen der Ganzen und die Stellen der Decimaltheile gesetzt wird.

Der 10te Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{10} = 0{,}1$ d. h. 0 Ganze und ein 10tel.
" 10te " " 2 " " $\frac{2}{10} = 0{,}2$ " 0 " " 2 10tel.
" 10te " " 3 " " $\frac{3}{10} = 0{,}3$ " 0 " " 3 10tel.
" 10te " " 4 " " $\frac{4}{10} = 0{,}4$ " 0 " " 4 10tel.
" 10te " " 5 " " $\frac{5}{10} = 0{,}5$ " 0 " " 5 10tel.
" 10te " " 6 " " $\frac{6}{10} = 0{,}6$ " 0 " " 6 10tel.
" 10te " " 7 " " $\frac{7}{10} = 0{,}7$ " 0 " " 7 10tel.
" 10te " " 8 " " $\frac{8}{10} = 0{,}8$ " 0 " " 8 10tel.
" 10te " " 9 " " $\frac{9}{10} = 0{,}9$ " 0 " " 9 10tel.
" 10te " " 10 " " $\frac{10}{10} = 1{,}0$ " 1 Ganzes " 0 10tel.
" 10te " " 11 " " $\frac{11}{10} = 1{,}1$ " 1 " " 1 10tel.
" 10te " " 23 " " $\frac{23}{10} = 2{,}3$ " 2 " " 3 10tel.
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Der 10te Theil von $\frac{1}{10}$ ist $\frac{1}{100} = 0{,}01$; d. h. 0 Ganze, 0 Zehntel, 1 Hundertstel.
" 10te " " $\frac{1}{100}$ ist $\frac{1}{1000} = 0{,}001$; d. h. 0 Ganze, 0 Zehntel, 0 Hundertstel und 1 Tausendstel, ꝛc.
" 10te " " $\frac{1}{1000}$ ist $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$;
" 10te " " $\frac{1}{10000}$ ist $\frac{1}{100000} = 0{,}00001$;
" 10te " " $\frac{1}{100000}$ ist $\frac{1}{1000000} = 0{,}000001$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Welches ist der 10te Theil 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ꝛc., 24, 25 ꝛc., 31, 36 ꝛc., 10tel, 100stel, 1000stel ꝛc.?

Der 100ste Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{100} = 0{,}01$;
" 100ste " " $\frac{1}{10}$ " $\frac{1}{1000} = 0{,}001$;
" 100ste " " $\frac{1}{100}$ " $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$;
" 100ste " " $\frac{1}{1000}$ " $\frac{1}{100000} = 0{,}00001$;
" 100ste " " $\frac{1}{10000}$ " $\frac{1}{1000000} = 0{,}000001$;
" 100ste " " $\frac{1}{100000}$ " $\frac{1}{10000000} = 0{,}0000001$;
" 100ste " " $\frac{1}{1000000}$ ist $\frac{1}{100000000} = 0{,}00000001$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Digitized by Google

Der 1000ste Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{1000} = 0{,}001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{10}$ " $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{100}$ " $\frac{1}{100000} = 0{,}00001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{1000}$ " $\frac{1}{1000000} = 0{,}000001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{10000}$ " $\frac{1}{10000000} = 0{,}0000001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{100000}$ " $\frac{1}{100000000} = 0{,}00000001$;
" 1000ste " " $\frac{1}{1000000}$ " $\frac{1}{1000000000} = 0{,}000000001$;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Welches ist der 10 000ste, der 100 000ste, der 1 000 000ste ꝛc. Theil von 1 Ganzen, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, $\frac{1}{1000000}$, ꝛc.?

Die Kinder haben diese Fragen wie das Vorstehende auszusprechen und darzustellen.

Welches ist der 100ste Theil von 3, 17, 21, 34, 46, 58, 69, 72, 87, 96, 108, 225, 356 ꝛc.? Antw.: $0{,}03$; $0{,}17$; $0{,}21$; $0{,}34$; $0{,}46$; $0{,}58$; $0{,}69$; $0{,}72$; $0{,}87$; $0{,}96$; $1{,}08$; $2{,}25$; $3{,}56$; ꝛc.

Die Ordnung der Decimaltheile ist also folgende: Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel, Hunderttausendstel, Millionstel, Zehnmillionstel, Hundertmillionstel ꝛc.

An der 1sten Decimalstelle stehen Zehntel, und zwar 1, 2, 3, 4, bis 9 Zehntel.
" " 2ten " " Hundertstel, und zwar 1, 2, 3, 4 ꝛc. Hundertstel.
" " 3ten " " Tausendstel, " " 1, 2, 3 ꝛc. Tausendstel.
" " 4ten " " Zehntausendstel, u. zwar 1, 2, 3 ꝛc. Zehntausendstel.
" " 5ten " " Hunderttausendstel, und zwar 1, 2, 3 ꝛc. Hunderttausendstel.
" " 6ten " " Millionstel, und zwar 1, 2, 3 ꝛc. Millionstel.

Was stehen an der 2ten, 4ten, 6ten, 8ten, 10ten ꝛc., 3ten, 5ten, 7ten, 9ten ꝛc. Decimalstelle? Antw.: An der 2ten Decimalstelle stehen Hundertstel; ꝛc. ꝛc.

Nun schreibt der Lehrer Decimalbrüche an die Tafel und läßt sie die Schüler aussprechen. Z. B. $0{,}3$; $0{,}07$; $8{,}07$; $0{,}009$; $3{,}009$; $0{,}23$; $0{,}078$; $0{,}459$; $7{,}2583$; $26{,}21567$ ꝛc.

Man kann einen Decimalbruch entweder so aussprechen, daß man jeden Bruch an den Decimalstellen einzeln, oder den ganzen Zähler als eine Zahl und den Nenner desselben nennt; z. B. $0{,}37$ ist Null Ganze, 3 Zehntel und 7 Hundertstel, oder 37 Hundertstel; $7{,}84$ ist 7 Ganze, 8 Zehntel und 4 Hundertstel, oder 7 Ganze und 84 Hundertstel, oder 784 Hundertstel; $2{,}659 =$ 2 Ganzen + 6 Zehntel + 5 Hundertstel + 9 Tausendstel = 2 Ganzen + 659 Tausendstel = 2659 Tausendstel. Gewöhnlich spricht man eine Zahl mit Decimalstellen nach der ersten und am häufigsten nach der 2ten Art aus; also $45{,}3654 =$ 45 Ganzen + 3654 Zehntausendstel.

Es ist auch nothwendig, daß der Lehrer Decimalbrüche diktire, und selbige von den Schülern schreiben lasse.

Digitized by Google

B. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

$\frac{7}{8}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Aufl. 1. $\frac{7}{8}$ sind 7 Ganze dividirt durch 8, oder der 8te Theil von 7 Ganzen; 1 Ganzes = 10 Zehntel, also 7 Ganze = 7 . 10 Zehntel = 70 Zehntel; der 8te Theil von 70 Zehntel sind $8\frac{6}{8}$ oder $8\frac{3}{4}$ Zehntel. Nun sind $\frac{3}{4}$ Zehntel der 4te Theil von 3 Zehnteln; 1 Zehntel = 10 Hundertstel, 3 Zehntel = 30 Hundertstel; der 4te Theil von 30 Hundertstel = $7\frac{1}{2}$ Hundertstel. Aber $\frac{1}{2}$ Hundertstel = der Hälfte von 1 Hundertstel; 1 Hundertstel = 10 Tausendstel, also die Hälfte von 1 Hundertstel = der Hälfte von 10 Tausendstel = 5 Tausendstel; daher $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

$\frac{13}{16}$ sind gleich welchem Decimalbruche?

Aufl. 2. Man wird aus der vorigen Auflösung entnommen haben, daß man zur Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die theilweise Division anwendet, den Rest in die nächst kleinern Decimaltheile verwandelt, und dann diese verwandelte Zahl wieder durch den gegebenen Nenner dividirt; ꝛc.

130 : 16 = 0,8125.
128
20 also $\frac{13}{16} = 0{,}8125$.
16
40
32
80
80
0

Es sind 16 in 13 Null Ganze mal enthalten; 13 Ganze = 130 Zehntel, dividirt durch 16 giebt 8 Zehntel, 16 × 8 Zehntel = 128 Zehntel von 130 Zehntel, bleiben 2 Zehntel; 2 Zehntel = 20 Hundertstel dividirt durch 16, giebt 1 Hundertstel, 16 × 1 Hundertstel = 16 Hundertstel, von 20 Hundertstel subtrahirt, läßt 4 Hundertstel = 40 Tausendstel, dividirt durch 16, giebt 2 Tausendstel; 16 × 2 Tausendstel = 32 Tausendstel, von 40 Tausendstel subtrahirt, läßt 8 Tausendstel = 80 Zehntausendstel, durch 16 dividirt, giebt 5 Zehntausendstel; 16 × 5 Zehntausendstel = 80 Zehntausendstel, von 80 Zehntausendstel subtrahirt, läßt den Rest Null.

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{17}{64}$, $\frac{47}{128}$ ꝛc. in einen Decimalbruch zu verwandeln.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{7}{16} = 0{,}4375$; $\frac{9}{32} = 0{,}28125$; $\frac{17}{64} = 0{,}265625$; $\frac{47}{128} = 0{,}3671875$; ꝛc.

Folgende Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{29}{80}$, $\frac{74}{125}$, $\frac{153}{160}$ ꝛc. in Decimalbrüche zu verwandeln.

$\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{7}{20} = 0{,}35$; $\frac{13}{25} = 0{,}52$; $\frac{19}{40} = 0{,}475$; $\frac{17}{50} = 0{,}34$; $\frac{29}{80} = 0{,}3625$; $\frac{74}{125} = 0{,}592$; $\frac{163}{160} = 0{,}95625$; ꝛc.

$\frac{5}{7}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Digitized by Google

$50 : 7 = 0,714285\,714285\,714285\ldots.$

49
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
5

Die Rechnung ist eben dieselbe, welche in Aufl. 2. angegeben wurde, nur sie nimmt kein Ende, weil kein Rest Null wird. Etwas Merkwürdiges stellt sich aber doch in dieser Rechnung dar; nämlich nach einer gewissen Reihenfolge von Decimalbrüchen kommen dieselben Decimalbrüche in derselben Ordnung zum Vorschein; es sind eigentlich nicht dieselben Decimalbrüche, sondern dieselben Ziffern in der nämlichen Ordnung. Die Folge von Ziffern an den Decimalstellen, die wiederkehrt, oder die wiederkehrende Folge von Ziffern an den Decimalstellen des vorstehenden Bruches ist: 714 285; diese nennt man eine Periode (*περίοδος* Umgang, das Herumgehen, Umkreis, Periode).

Eine Periode in den Decimalbrüchen ist also eine Folge von Ziffern, die in derselben Ordnung wiederkehren.

Die Erscheinung einer Periode hat ihren Grund darin, daß in der Division ein Rest übrig bleibt, der bereits einmal schon gewesen ist.

Folgende Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{7}{27}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{13}{29}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{14}{31}$, $\frac{15}{34}$ ꝛc. in Decimalbrüche zu verwandeln.

$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots.$

$\frac{5}{6} = 0,83333\ldots.$

$\frac{4}{7} = 0,571428$ Periode.

$\frac{8}{9} = 0,88888\ldots.$

$\frac{7}{11} = 0,636363\ldots.$

$\frac{5}{12} = 0,416666\ldots.$

$\frac{8}{13} = 0,615384$ Periode.

$\frac{9}{14} = 0,6428571\,428571$ Periode.

$\frac{13}{15} = 0,86666\ldots.$

$\frac{10}{17} = 0,588235\,294117\,6470$ Periode.

$\frac{11}{18} = 0,61111\ldots.$

$\frac{19}{21} = 0,904761$ Periode.

$\frac{13}{22} = 0,590909090\ldots.$

$\frac{17}{24} = 0,783333\ldots.$

$\frac{7}{27} = 0,259259\ldots.$

$\frac{9}{28} = 0,32\,142857\,142857\ldots.$

$\frac{19}{30} = 0,633333\ldots.$

$\frac{14}{31} = 0,451612\,90967$ Periode.

$\frac{15}{34} = 0,441176\,470588\,235294\,1176\ldots.$

$\frac{13}{29} = 0,448275\,862068\,965517\,241379\,3103$ Periode.

Alle diese verwandelten Brüche bestehen aus Perioden, und zwar aus einstelligen Perioden der 1ste, 2te, 4te, 6te, 9te, 11te, 14te, 17te; aus 2stelligen Perioden der 5te, 13te; aus 3stelligen Perioden der 15te Bruch ꝛc. Ferner wird man bemerken, daß einige Perioden gleich mit der ersten Ziffer anfangen, andere erst nach einigen Ziffern beginnen.

Diejenigen Decimalbrüche, welche ihre Periode gleich mit der ersten Ziffer anfangen, heißen vollständig periodische Brüche, die andern unvollständig periodische Decimalbrüche.

Es ist nun die Frage, welche Brüche sich genau in Decimalbrüche verwandeln lassen, und welche nicht, also nur näherungsweise?

Digitized by Google

Aus der Verwandlung gegebener Brüche in andere, deren Nenner gegeben sind, II. II. zweiten Kapitels zweiten Abschnittes Seite 84., wird man ersehen haben, daß sich Brüche nur in solche von gegebenem Nenner ohne Doppelbruch verwandeln lassen, deren Nenner Vielfache von den Nennern der gegebenen Brüche sind; daher werden nur solche Brüche genau in Decimalbrüche verwandelt werden können, deren Nenner Maße von den Einheiten verschiedener Ordnungen sind; oder Einheiten von verschiedenen Ordnungen müssen Vielfache von den Nennern der gegebenen Brüche sein.

Nun ist 10 ein Vielfaches von 2 und 5, oder $10 = 2.5$, $100 = 10.10 = 2.5.2.5 = 2.2.5.5$; $1000 = 10.10.10 = 2.2.2.5.5.5$; $10\,000 = 10.10.10.10 = 2.2.2.2.5.5.5.5$, ꝛc.; d. h. die Einheiten der verschiedenen Ordnungen sind Vielfache von solchen Zahlen, die Produkte sind aus den einfachen Faktoren 2 und 5, also keine andern einfachen Faktoren als nur 2 und 5 enthalten. Daher werden sich solche Brüche genau in Decimalbrüchen angeben lassen, deren Nenner sind: 2, $2.2 = 4$; $2.2.2 = 8$; $2.2.2.2 = 16$; $2.2.2.2.2 = 32$ ꝛc., kurz 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ꝛc. ꝛc.; ferner 5, $5.5 = 25$; $5.5.5 = 125$; $5.5.5.5 = 625$ ꝛc.; kurz 5, 25, 125, 625, 3125, 15625 ꝛc. ꝛc. und Produkte aus diesen Zahlen; also $2.5 = 10$, $4.5 = 20$, $4.25 = 100$, $4.125 = 250$ ꝛc. $4.5 = 20$, $8.5 = 40$, $16.5 = 80$ ꝛc. ꝛc.

Alle übrigen Brüche, deren Nenner andere einfache Faktoren als 2 und 5 haben, lassen sich nur näherungsweise in Decimalbrüchen angeben, und diese bilden Perioden.

Jede Periode muß wenigstens eine Stelle weniger haben, als der Nenner des gegebenen Bruches Einheiten hat; oder die Zahl der Ziffern einer Periode ist stets kleiner als der Nenner des gegebenen Bruches.

Die Verwandlung eines Bruches in einen Decimalbruch geschieht durch die theilweise Division; und da der Dividendus (die Einheiten verschiedener Ordnungen) nicht ein Vielfaches des Divisors ist (des Nenners vom gegebenen Bruche), so bleiben Reste der Division, deren jeder kleiner als der Nenner des gegebenen Bruches ist. Ist z. B. der gegebene Bruch $\frac{4}{7}$, so ist sein Nenner 7, und es können daher folgende Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 stattfinden; nach 6 Divisionen, die 6 Stellen im Decimalbruche geben, muß bei der 7ten Division einer der vorher genannten Reste übrig bleiben, und von diesem an müssen bei der fortgesetzten Division dieselben Ziffern in derselben Ordnung in dem Quotienten wiederkehren. Daher geben auch diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt in denselben Perioden. Daher haben 17tel 16ziffrige Perioden in den Decimaltheilen, 29stel haben 28ziffrige Perioden, ꝛc.

Digitized by Google

Hat der Nenner eines Bruches einen oder mehrere der einfachen Faktoren 2 und 5, so wird sein Decimalbruch unvollständig periodisch, was leicht aus obigen Beispielen zu ersehen.

Die umgekehrte Aufgabe: einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, wird später folgen.

C. Addition der Decimalbrüche.

Ein Beispiel wird genügen, die Rechnung zu erläutern.

3,25784
0,683798
25,870687
0,0089999
29,8213249

Man schreibe die Brüche so, daß die gleich hohen Stellen senkrecht unter einander zu stehen kommen, und fange die Addition mit den kleinsten Theilen an.

Der Zehnmillionstel giebt es nur 9; die Summe der Millionstel ist 24, d. h. 4 Millionstel + 20 Millionstel = 2 Hunderttausendstel, diese nimmt man zu der Summe der Hunderttausendstel, das sind zusammen 32 Hunderttausendstel = 2 Hunderttausendstel + 3 Zehntausendstel; die Summe der Zehntausendstel + jenen 3 = 33 Zehntausendstel = 3 Zehntausendstel + 3 Tausendstel; diese 3 Tausendstel und die Summe der Tausendstel sind zusammen 21 Tausendstel = 1 Tausendstel + 2 Hundertsteln; diese 2 Hundertstel und die Summe der Hundertstel beträgt 22 Hundertstel = 2 Hundertsteln + 2 Zehntel; nun addirt man die Zehntel, das sind zusammen 18 Zehntel = 8 Zehnteln + 1 Ganzen; ꝛc.

Die Addition der Decimalbrüche wird also eben so ausgeführt wie die der ganzen Zahlen.

D. Subtraktion der Decimalbrüche.

4,3.7.8.5
0,5896
3,7689

6 Zehntausendstel von 15 Zehntausendsteln (man nimmt zu den 5 Zehntausendsteln 1 Tausendstel = 10 Zehntausendsteln dazu) bleiben 9 Zehntausendstel; 9 Tausendstel von 17 Tausendsteln bleiben 8 Tausendstel; 8 Hundertstel von 16 Hundertsteln bleiben 8 Hundertstel; 5 Zehntel von 12 Zehnteln bleiben 7 Zehntel; 0 Ganze von 3 Ganzen bleiben 3 Ganze.

5,7.2.8.3567
2,3687
3,3596567

Man ergänze die fehlenden Stellen im Subtrahendus durch Nullen und subtrahire wie vorher.

9,0372
0,89897845
8,13822155

Man ergänze die fehlenden Stellen im Minuendus durch Nullen, und subtrahire, als wären beide Zahlen ganze Zahlen, und gebe dem Reste so viele Decimalstellen, als der Subtrahendus oder Minuendus Decimalstellen hat, wenn nämlich beide gleichviele Decimalstellen haben.

Auch die Subtraktion in Decimalbrüchen wird wie mit ganzen Zahlen geführt.

Digitized by Google

E. Multiplikation der Decimalbrüche durch ganze Zahlen.

Man kann zuerst Decimalbrüche durch beliebige ganze Zahlen, dann durch Einheiten verschiedener Ordnungen multipliciren, und im letzten Falle wird man gewisse Vortheile erkennen, welche nicht alle Zahlen gewähren.

$$\begin{array}{r} 3,_{46372} \\ 756 \\ \hline 20,_{78232} \\ 173,_{1860} \\ 2424,_{604} \\ \hline 2618,_{57232} \end{array}$$

Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt, so erhält man einen Bruch, der zum Zähler das Produkt aus der ganzen Zahl und dem Zähler und zum Nenner den Nenner des gegebenen Bruches hat (Zweites Kapitel, III. D. 1. 2., Seite 114. 115.); daher hat das Produkt aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche so viele Decimalstellen als einer der Faktoren solche hat. Hat man also einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, so führt man die Multiplikation wie mit ganzen Zahlen aus, und schneidet von dem Produkte so viele Decimalstellen ab, als einer der Faktoren solche hat.

$10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$ Ganzen, also auch $10 \times 0,_1 = 1$; daher $10 \times 0,_2$; $10 \times 0,_3$; $10 \times 0,_4$ ꝛc. giebt 2, 3, 4 ꝛc. Ganze; folglich giebt 10 mal Zehntel Ganze.

$100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1$ Ganzen; also auch $100 \times 0,_{01} = 1$; folglich giebt $100 \times 0,_{03}$; $0,_{24}$; $0,_{37}$ ꝛc. 3, 24, 37 ꝛc. Ganze.

$1000 \times \frac{1}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1$ Ganzen; daher auch $1000 \times 0,_{001} = 1$; also $1000 \times 0,_{007}$; $0,_{096}$; $0,_{458}$ ꝛc. 7, 96, 458 ꝛc. Ganze.

Man erhält also Ganze, wenn man Zehntel durch 10, Hundertstel durch 100, Tausendstel durch 1000 ꝛc. multiplicirt.

Allgemein: Wenn man einen Bruch durch seinen Nenner multiplicirt, so erhält man eine ganze Zahl, welche gleich dem Zähler des Bruches ist.

Noch besonders an Beispielen zu erklären.

$7 \times (8 + 9) = 7 . 8 + 7 . 9 = 56 + 63 = 119$, d. h. wenn man die Summe zweier Zahlen durch eine Zahl multipliciren soll, so muß man jede Zahl der Summe (d. h. jeden Summandus) durch denselben Multiplikator multipliciren. Dieser Satz gilt auch von der Summe beliebig vieler Zahlen. Anwendung vorstehender Sätze.

$10 \times 34,_{568} = 345,_{68}$; denn die Zehntel durch 10 multiplicirt verwandeln sich in Ganze, also kommt der Decimalstrich zwischen den Ziffern 5 und 6 zu stehen; der Decimalstrich rückt also eine Stelle weiter nach Rechts; dadurch wächst der Werth jeder Ziffer zum 10fachen, und dieses muß in der That geschehen; weil die ganze Zahl durch 10, das heißt jede Zahl an den verschiedenen Stellen durch 10 multiplicirt wird.

Aehnlich verhält es sich, wenn man einen Decimalbruch durch 100, 1000, 10 000 ꝛc. multiplicirt; z. B. $100 \times 24,_{379856} = 2437,_{9856}$; $1000 \times 24,_{379856} = 24\,379,_{856}$; $10\,000 \times 24,_{379856} = 243798,_{56}$ ꝛc.

Diese Beispiele werden wie das obige erklärt.

Digitized by Google

Allgemeiner Satz: Wenn man einen Decimalbruch durch eine Einheit der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten ꝛc. Ordnung multiplicirt, so rücken aus den Decimalstellen 1, 2, 3, 4 ꝛc. Stellen zu den Ganzen hinüber, oder: so verwandeln sich so viele Decimalstellen, welche auf den Decimalstrich unmittelbar folgen, in Stellen der Ganzen, als die Einheit der gewissen Ordnung Nullen hat.

Diesen Satz kann man auch so erklären. Wenn man eine Zahl durch eine Einheit einer gewissen Ordnung multiplicirt, so hängt man der Zahl so viele Nullen an, als diese Einheit solche hat; derselbe Satz von einem Decimalbruche; das Produkt aber aus dem Decimalbruche und der gedachten Einheit muß eben so viele Decimalstellen als der Decimalbruch haben; diese Zahl der Decimalstellen muß man also dem Produkte geben; die Decimalstellen werden aber von der niedrigsten nach den höhern zu, also von Rechts nach Links gezählt; zunächst werden also die angehängten Nullen gerechnet; daher rücken so viele Decimalstellen durch diese Multiplikation zu den Ganzen im Produkte hinüber, als Nullen die Einheit hat. Man prüfe diese Auseinandersetzung an folgenden Beispielen:

$100 \times 7{,}_{359} = 735{,}_{900}$; $1000 \times 1{,}_{6254} = 1625{,}_{4000}$; ꝛc.

Die frühere Erläuterung ist gründlicher als die letzte.

F. Division der Decimalbrüche durch ganze Zahlen.

Wie in der vorigen Rubrik wird man auch in dieser zuerst einen Decimalbruch durch eine beliebige ganze Zahl, dann durch eine Einheit einer gewissen Ordnung dividiren.

Wenn man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt, so hat der Quotient eben so viele Decimalstellen als der Dividendus solche hat. Denn der Dividendus ist gleich dem Produkte aus dem Divisor und Quotienten; also muß das genannte Produkt so viele Decimalstellen als der Dividendus haben; das erwähnte Produkt hat aber so viele Decimalstellen als einer der Faktoren, d. i. der Quotient hat, weil der andere Faktor, d. i. der Divisor, eine ganze Zahl ist (siehe vorher E.); daher hat der Quotient eben so viele Decimalstellen als der Dividendus solche hat. Z. B.

$3{,}_{7856} : 2 = 1{,}_{8928}$; $4{,}_{2591} : 3 = 1{,}_{4197}$; $0{,}_{378} : 5 = 0{,}_{0756}$; $0{,}_{0078261} : 6 = 0{,}_{00130435}$; ꝛc.

Die beiden letzten Beispiele scheinen von dem obigen Satze eine Ausnahme zu machen; erwägt man aber die Sache genauer, so findet man, daß sie solches nicht thun. Denn man führe die Division wirklich aus:

Digitized by Google

$$5 \mid 0,378 \mid 756; \qquad 6 \mid 0,0078261 \mid 130435$$

35
28
25
30

6
18
18
26
24
21
18
30

Zufällig bleibt hier in jeder Division der Rest 3; diesem Reste hat man eine Null angehängt, d. h. man hat die nächstfolgende Zahl des Dividendus zum Reste gezogen, die hier Null, aber zugleich die nächstniedrige Decimalstelle ist; man hat also von dem Dividendus eine Decimalstelle mehr genommen, als er in der Angabe hat; daher Dividendus und Quotient in beiden Beispielen gleich viele Decimalstellen. Dieser Schein tritt häufig ein, wenn man im Quotienten mehr Decimalstellen berechnet, als der gegebene Dividendus hat. Z. B. Man soll den Quotienten auf 7 Decimalstellen berechnen, indem man $9,83$ durch 17 dividirt.

$17 \mid 9,83 \mid 5782352$; also ist der Quotient $0,5782352$.

85
133
119
140
136
40
34
60
51
90
85
50
34
16 ꝛc.

Der Dividendus hat nur 2 gegebene Decimalstellen; zur Division hat man aber 5 Nullen an die verschiedenen Reste angehängt; folglich hat man außer jenen 2 Decimalstellen noch 5 Decimalstellen, also 7 Decimalstellen des Dividendus benutzt; dieser und der Quotient haben daher gleichviele Decimalstellen.

Wenn man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt, so kann man auf zweierlei Weise bestimmen, wo die Ganzen in dem Quotienten aufhören, nämlich sie hören da auf, wo die Ganzen im Dividendus, welche man zur Division gebraucht, ein Ende haben, und mit der ersten Decimalstelle, die man zum Dividiren nimmt, fängt die erste Decimalstelle im Quotienten an. Z. B.

$345 \mid 3168,24 \mid 9,18\ldots.$
3105

63 2
34 5
28 74
27 60
1 14 ꝛc.

Zur ersten theilweisen Division mußte man alle Stellen der Ganzen des Dividendus nehmen, daher hat der Quotient in den Ganzen nur eine Stelle, ꝛc.

Sind im Dividendus Null Ganze vorhanden, so muß auch der Quotient Null Ganze haben, ꝛc. Dieses ist ein anderes Kennzeichen für die Zahl der Decimalstellen des Quotienten.

Digitized by Google

Die andere Bestimmungsart der Ganzen des Quotienten ergiebt sich aus dem Frühern über die Bestimmung seiner Decimalstellen.

Wenn man eine Summe von Zahlen durch eine Zahl dividiren soll, so muß man jeden Summandus durch denselben Divisor dividiren. Z. B. $(6+8):2=3+4=7$; $(9+15):3=3+5=8$; $(4+8+12):4=1+2+3=6$; $(15+20+25+30):5=3+4+5+6=18$; ꝛc.

Soll man daher eine mehrstellige Zahl durch eine Zahl dividiren: so hat man jede Zahl an den verschiedenen Stellen durch denselben Divisor zu dividiren; weil die gegebene Zahl eine Summe der Zahlen ist, welche an den verschiedenen Stellen derselben stehen. Z. B. $85=80+5$; $3,_7=3+0,_7$; $1,_{26}=1+0,_2+0,_{06}$; ꝛc.

Wenn man einen Decimalbruch durch 10 dividirt, so verwandeln sich die Einer in Zehntel; also erhält der Quotient eine Decimalstelle mehr als der Dividendus.

Wenn man einen Decimalbruch durch 100, 1000, 10 000, 100 000 ꝛc. dividirt, so verwandeln sich die Einer in Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel, Hunderttausendstel ꝛc.; also erhält der Quotient 2, 3, 4, 5 ꝛc. Decimalstellen mehr als der Dividendus deren hat. Z. B.

$425,_2:10=42,_{52}$; $425,_2:100=4,_{252}$; $425,_2:1000=0,_{4252}$; $425,_2:10\,000=0,_{04252}$; ꝛc.

Wenn man also einen Decimalbruch durch eine Einheit einer gewissen Ordnung dividirt, so erhält der Quotient so viele Decimalstellen als der Divisor, d. i. die Einheit Nullen hat, mehr als der Dividendus solche hat.

G. Multiplikation der Decimalbrüche durch Decimalbrüche.

Aus der Erklärung der Multiplikation, der eines Decimalbruches und den vorstehenden Uebungen unter E. und F. ergiebt sich die Multiplikation der Decimalbrüche durch Decimalbrüche sehr leicht.

Denn eine Zahl mit einer andern multipliciren heißt: eine dritte so aus der ersten erzeugen, wie die zweite aus einem Ganzen entstanden ist (Zweites Kapitel III. D.). Der Decimalbruch ist ein solcher Bruch, der zum Zähler eine ganze Zahl und zum Nenner eine von den Einheiten verschiedener Ordnungen hat (IV. Seite 118.). Ferner ist ein Bruch ein Vielfaches von einem Theile eines Ganzen. Vermöge dieser Definitionen (Begriffsbestimmungen, Begriffserklärungen, auch kurz Erklärungen) könnte man leicht einen allgemeinen Beweis für nachfolgenden Satz führen; es wird aber dem Zwecke dieser Schrift und der Fassungskraft der Kinder angemessener sein, den Beweis vermittelst einiger Beispiele darzuthun.

Wenn man zwei Decimalbrüche mit einander multipliciren soll, so multiplicirt man die Brüche so mit einander, als wären sie ganze Zahlen, und

Digitized by Google

giebt dem erhaltenen Produkte so viele Decimalstellen, als beide Faktoren zusammen haben. Z. B.

$4,367$
$3,58$
34936
$2,1835$
$13,101$
$15,63386$

Aus dem Multiplikandus $4,367$ muß man so eine neue Zahl (das Produkt) erzeugen, wie der Multiplikator $3,58$ aus einem Ganzen entstanden ist. Nun ist der Multiplikator $3,58 = \frac{358}{100} =$ dem 358fachen von $\frac{1}{100}$ eines Ganzen; also ist das gesuchte Produkt = dem 358fachen von $\frac{1}{100}$ des Multiplikandus $4,367$. Der hundertste Theil von Einern giebt Hundertstel (F.), also ist der hundertste Theil von $4,367 = 0,04367$ und das 358fache davon ist $= 358 \times 0,04367 = 15,63386$; daher ist $3,58 \times 4,367 = 15,63386$.

Hieraus geht hervor, daß man den Multiplikandus durch den Nenner des Multiplikators, also durch eine Einheit einer gewissen Ordnung zu dividiren hat; dadurch erhält der Quotient so viele Decimalstellen, als der gedachte Nenner Nullen hat, mehr als der Multiplikandus solche besitzt (F.). Nun hat aber der Nenner eines Decimalbruches so viele Nullen, als dieser Decimalbruch Decimalstellen zählt; folglich hat erwähnter Quotient so viele Decimalstellen, als Multiplikandus und Multiplikator (beide Faktoren) zusammen haben. Um das gesuchte Produkt zu erlangen, hat man jenen Quotienten mit einer ganzen Zahl (dem Zähler des Decimalbruches, welcher der Multiplikator ist) zu multipliciren. Wenn man aber einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl multiplicirt, so hat das Produkt so viele Decimalstellen, als einer der Faktoren solche besitzt. Daher hat das Produkt zweier Decimalbrüche so viele Decimalstellen, als beide Faktoren zusammen haben.

Dieser Beweis wird an mehrern Beispielen auf ähnliche Weise erläutert.

Es kann der Fall eintreten, daß das Produkt aus den Zählern zweier Decimalbrüche weniger Stellen hat, als beide Faktoren zusammen Decimalstellen besitzen; so hat man die fehlenden Decimalstellen im Produkte durch Nullen zu ersetzen, und diese Ergänzung darf nicht Rechts, sondern muß Links vom Produkte geschehen; weil die Rechts einem Decimalbruche hinzugefügten Nullen den Werth des Decimalbruches nicht ändern; z. B. $3,7 = 3,700$; aber $3,7$ nicht $= 0,037$.

Z. B. $0,583$
$0,0023$
1749
1166
13409

Das Produkt der Zähler hat nur 5 Stellen; beide Faktoren haben zusammen 7 Decimalstellen; das ist das gesuchte Produkt $= 0,0013409$.

H. Division der Decimalbrüche durch Decimalbrüche.

Für die Division der Decimalbrüche durch einander hat man folgenden Satz: Die Zahl der Decimalstellen des Quotienten ist gleich der Zahl der Decimalstellen des Dividendus weniger der des Divisors.

Digitized by Google

Diesen Satz könnte man ähnlicher Weise wie den für die Multiplikation im vorigen Paragraphen erweisen, kürzer geschieht es, wenn man denselben folgender Art darthut.

Da der Dividendus gleich dem Produkte aus Divisor und Quotienten ist, so muß die Zahl der Decimalstellen des Dividendus gleich der Summe der Decimalstellen des Divisors und Quotienten sein; folglich ist die Zahl der Decimalstellen des Quotienten gleich der Zahl der Decimalstellen des Dividendus vermindert um die Zahl der Decimalstellen des Divisors.

Dieser Beweis macht keine Ausnahme für die theilweise Division; denn für die theilweise Division hat man den Satz: Der Dividendus ist gleich dem Produkte aus Divisor und Quotienten nebst dem Reste. Daher ist das Produkt aus Divisor und Quotienten gleich dem Dividendus weniger dem Reste. Die niedrigste Stelle des Restes ist aber gleichnamig mit der niedrigsten Stelle des Dividendus; daher hat das genannte Produkt eben so viele Decimalstellen, als der um den Rest verminderte Dividendus; folglich ist wieder die Zahl der Decimalstellen des Quotienten gleich der Zahl der Decimalstellen des Dividendus weniger der des Divisors. Z. B.

$57{,}_{346458} : 2{,}_{346} = 24{,}_{44435549}.$

46 92

10 426

9 384

1 0424

9384

10405

9384

10218

9384

834

8340

7038

13020

11730

12900

11730

11700

9384

23160

21114

2046

2c.

Der Dividendus hat 6, der Divisor 3 Decimalstellen; daher muß der Quotient 6 — 3 = 3 Decimalstellen haben; setzt man aber die Division weiter fort, nachdem man die letzte Stelle des Dividendus zur Division gebraucht hat, indem man den Resten Nullen anhängt; so sind die angehängten Nullen als eben so viele Stellen des Dividendus zu betrachten; in diesem Beispiele ist die Division fortgesetzt, indem an die nachfolgenden Reste 5 Nullen angehängt wurden; daher muß man dem Dividendus 6 + 5 oder 11 Decimalstellen anrechnen; und folglich muß der Quotient 11 — 3 oder 8 Decimalstellen haben.

Hat der Dividendus wenigere Decimalstellen als der Divisor, so wird man dem Dividendus Rechts so viele Nullen hinzusetzen, bis er mit dem Divisor gleichviele Decimalstellen hat, und die Division bis zu den hinzugefügten Nullen fortgesetzt, giebt im Quotienten Stellen in den Ganzen; die darauf folgenden Stellen sind Decimalstellen. Z. B.

Digitized by Google

$537{,}9 : 0{,}00683 = 78755{,}4.$

478 0000
59 80
54 64
5 160
4 781
3790
3415
3750
3415
3350
2732
618 ꝛc.

Der Dividendus hat eine, der Divisor 5 Decimalstellen, daher hat man an den Dividendus noch 4 Nullen hinzuzusetzen, und bis zur 4ten dieser Nullen bekommt man im Quotienten Stellen in den Ganzen, die folgenden Nullen an die Reste gesetzt, geben Decimalstellen in dem Quotienten.

Die allgemeine Regel für die Division der Decimalbrüche durch einander ist folgende. Man nehme vom Dividendus so viele Decimalstellen als der Divisor solche hat, merke sich durch ein Zeichen, z. B. durch einen senkrechten Strich die vom Dividendus genommene Zahl Decimalstellen, und dividire nun die Ganzen (wenn solche der Dividendus hat) nebst den genommenen Decimalstellen durch den Divisor, als wären beide ganze Zahlen; die letzte Stelle von den bemerkten des Dividendus giebt die letzte Stelle in den Ganzen des Quotienten; jede folgende nach den bemerkten Stellen des Dividendus giebt die auf einander folgenden Decimalstellen des Quotienten. Nach diesem Verfahren sind folgende Beispiele berechnet:

$235{,}7804659 : 4{,}2753 = 55{,}149....$

213 765
22 01544
21 3765
63898
42753
211435
171012
40423 9
384777
19462
ꝛc.

$0{,}00357689 : 5{,}26 = 0{,}000680017....$

3156
4208
4208
900
526
3740
3682
58
ꝛc.

I. Verkürzte Multiplikation und Division der Decimalbrüche.

Es kommt häufig vor, daß ein gegebener Decimalbruch mehr Stellen hat, als man zu einer beabsichtigten Rechnung braucht, weil eine geringere Zahl Decimalstellen, als die gegebenen, der vorhabenden Rechnung völlig genügen; daher läßt man eine oder mehrere der niedrigsten Stellen des gegebenen Decimalbruches weg, und dieses nennt man einen Decimalbruch **abkürzen**. Bei der Abkürzung eines Decimalbruches ist es nützlich zu wissen, wie groß der Fehler ist, den man dadurch begeht, und dieses soll kurz erörtert werden.

Digitized by Google

Eine Einheit irgend einer Ordnung ist größer als die Summe der Zahlen von Einheiten aller niedrigern Ordnungen.

Denn es ist $10 = 9 + 1$

$100 = 90 + 10$ Die Summe aller Zahlen links vom

$1000 = 900 + 100$ Gleichheitszeichen muß gleich der

$10\,000 = 9000 + 1000$ Summe aller Zahlen rechts von

$100\,000 = 90\,000 + 10\,000$ diesem Zeichen sein; also

$100\,000 + 10\,000 + 1000 + 100 + 10 = 90\,000 + 9000 + 900 + 90 + 9 + 10\,000 + 1000 + 100 + 10 + 1.$

Läßt man nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleichen Zahlen hinweg, so wird man noch Gleiches übrig behalten; daher ist $100\,000 = 90\,000 + 9000 + 900 + 90 + 9 + 1$ oder $100\,000 = 99\,999 + 1$; folglich ist $100\,000 > 99\,999$, $10\,000 > 9999$, $1000 > 999$, ꝛc.

Die größte Zahl von Einheiten verschiedener Ordnungen ist 9, und da der Satz von der größten Zahl richtig ist, so muß er auch von allen kleinern Zahlen gelten; also ist $1000 > 879$, ꝛc.

Ein Decimaltheil irgend einer Ordnung (an einer beliebigen Decimalstelle) ist größer als die Summe aller Zahlen an den niedrigern Decimalstellen.

Denn man hat

$0{,}1 = 0{,}10 = 0{,}09 + 0{,}01$

$0{,}01 = 0{,}010 = 0{,}009 + 0{,}001$

$0{,}001 = 0{,}0010 = 0{,}0009 + 0{,}0001$

$0{,}0001 = 0{,}00010 = 0{,}00009 + 0{,}00001$

$0{,}00001 = 0{,}000010 = 0{,}000009 + 0{,}000001$

$0{,}000001 = 0{,}0000010 = 0{,}0000009 + 0{,}0000001$

ꝛc. ꝛc.

Läßt man nun auf beiden Seiten die gleichen Brüche weg, so erhält man, je nachdem man von oben mit der 1sten, 2ten, 3ten ꝛc. Zeile anfängt: $0{,}1 = 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + 0{,}00009 + 0{,}000009 + 0{,}0000009 + 0{,}00000001$ oder kurz $0{,}1 = 0{,}0999999 + 0{,}0000001$; daher ist $0{,}1 > 0{,}0999999\ldots$. Aus demselben Grunde ist $0{,}01 > 0{,}00999999\ldots$ ꝛc.

Diese Schlüsse kann man nach Belieben fortsetzen; daher ist auch $0{,}1 > 0{,}0534678\ldots$; $0{,}001 > 0{,}000837984\ldots$ ꝛc.

Wenn man also einen Bruch abkürzt, so ist 1 Theil an der niedrigsten der behaltenen Stellen größer als der übrige vernachläßigte Bruch.

In der Abkürzung eines Decimalbruches kann man noch einen geringern Fehler begehen, als oben angezeigt wurde. Z. B. man wolle den Bruch $0{,}245678\ldots$ so abkürzen, daß man nur 2 Decimalstellen desselben behalte, so nehme man nicht $0{,}24$, sondern $0{,}25$, d. h. wenn 5 oder mehr Theile, also 6, 7, 8 oder 9 an der nächstniedrigen Stelle nach der behaltenen stehen, so vermehre man die Zahl der Theile an der letzten der behaltenen Stellen um Eins; so hat man einen Fehler begangen, der geringer als ein halber Theil an der niedrigsten der behaltenen Stellen ist. In unserm Beispiele ist

Digitized by Google

also der Fehler geringer als ein halbes Hundertstel oder $0{,}005$. Und in der That, $0{,}25 - 0{,}245978 = 0{,}004322$, also offenbar kleiner als $0{,}005$. Würde man aber $0{,}24$ behalten haben, so hätte man $0{,}005678$, also mehr als $0{,}005$ vernachlässigt.

Diese Abkürzung eines Decimalbruches kann man auch auf die Division anwenden. Will man den Quotienten nur bis auf eine gewisse Decimalstelle, z. B. bis auf 5 Decimalstellen berechnen, so suche man die Zahl, welche an der nächstfolgenden Stelle stehen müßte, also an der 6ten; findet man, daß sie 5 oder größer als 5 ist, so vermehre man die Zahl an der 5ten Stelle um Eins; steht aber an der 6ten Stelle eine Zahl kleiner als 5, so darf man diese Vermehrung nicht machen, weil man in dem Falle einen größern Fehler begehen würde, als man ihn ohne Vermehrung thut.

Aehnliche Abkürzungen nimmt man bei der Multiplikation und Division der Decimalbrüche vor, welche verkürzte Multiplikation und Division heißen.

Die Multiplikation zweier ganzen Zahlen oder Decimalbrüche wird gewöhnlich mit der Zahl an der niedrigsten Stelle des Multiplikators angefangen; man kann aber auch die Multiplikation mit der Zahl an der höchsten Stelle des Multiplikators beginnen, und dann zu den Zahlen bis zur niedrigsten Stelle desselben herabsteigen, und dies letzte Verfahren wird die umgekehrte Multiplikation genannt. Z. B.

3579
248
7158
14316
28632
887592

Man multiplicirt den Multiplikandus von der niedrigsten Stelle an zuerst mit 2 Hundertern, dann mit 4 Zehnern und endlich mit 8 Einern. Daß das zweite Theilprodukt eine Stelle weiter Rechts als das erste, und das dritte wieder eine Stelle weiter Rechts als das zweite rücken muß, ist leicht begreiflich.

Bei der abgekürzten Multiplikation wendet man die umgekehrte an, und sucht in den Theilprodukten stets gleichviele Decimalstellen zu erhalten, vernachlässigt also die niedrigern Decimalstellen. Man habe z. B. folgende zwei Zahlen $6{,}378459$, $4{,}6582$ zu multipliciren, und will nur 6 Decimalstellen im Produkte haben. Die gewöhnliche Multiplikation giebt 10 Decimalstellen im Produkte, und auf deren Berechnung wird man gewiß mehr Zeit als auf die Berechnung der 6 Decimalstellen verwenden; daher wird man durch die umgekehrte Multiplikation Zeitersparniß haben; folglich verdient diese vor jener in solchem Falle den Vorzug.

$6{,}378459$
$4{,}6582$
$25\ 513836$
$3\ 827070$
318920
51024
1274
$29{,}712124$

Den Multiplikandus durch 4 Ganze multiplicirt, giebt im ersten Theilprodukte 6 Decimalstellen, wie verlangt wurde. Will man nun den Multiplikandus durch 6 Zehntel multipliciren, so erhält das 2te Theilprodukt 7 Decimalstellen; um also die 7te Stelle nicht zu erhalten, wird man also nur 5 Decimalstellen des Multiplikandus mit 6 Zehntel multipliciren; so wie man also eine Ziffer in den Decimalstellen des Multiplikators weiter

Digitized by Google

geht, muß man eine Decimalstelle des Multiplikandus vernachlässigen, indem man die Regel befolgt, daß die Summe der Decimalstellen beider Faktoren 6 betrage. Nun vergleiche man aber dieses erhaltene Produkt mit dem wahren, welches ist $29,712137138$, dessen 6 erste Decimalstellen $29,712137$ sind; so findet man, daß man $0,000013$ weniger erhalten hat, als es unser Wunsch sein kann; weil wir doch gewiß die richtigen 6 ersten Decimalstellen des Produktes haben wollten; daher hat man in obiger Rechnung eine Korrektion (Verbesserung) anzubringen, und die soll sogleich eingeführt werden. Nämlich wenn man den Multiplikandus mit 6 Zehntel multiplicirt, so erhält man zunächst 6 Zehntel mal 9 Millionstel = 54 Zehnmillionstel = 5 Millionstel + 4 Zehnmillionstel; die 4 Zehnmillionstel wird man vernachlässigen, weil sie zur 7ten Decimalstelle gehören; die 5 Millionstel gehören aber zur 6ten Decimalstelle und dürfen daher nicht weggelassen werden; daher muß man jedes Produkt mit der zuletzt weggelassenen Stelle im Multiplikandus prüfen, was zur 6ten Decimalstelle im Produkte gehört. In diesem Sinne die umgekehrte Multiplikation ausgeführt, giebt folgendes:

$$
\begin{array}{r}
6,378459 \\
4,6582 \\
\hline
25\,513836 \\
3\,827075 \\
\quad 318922 \\
\quad\quad 51027 \\
\quad\quad\quad 1275 \\
\hline
29,712135
\end{array}
$$

Vergleicht man dieses Resultat mit den richtigen 6 ersten Decimalstellen, so sieht man, daß nur 2 Millionstel fehlen, also dieses Produkt weit genauer als jenes ist; aber auch diesen Fehler hätte man noch vermindern können, wenn man darauf Rücksicht genommen hätte, was oben bei Abkürzung der Decimalbrüche zur Verminderung des dadurch herbeigeführten Fehlers bemerkt wurde. Denn wenn man den Multiplikandus durch 5 Hundertstel multiplicirt, so vernachlässigt man in demselben 5 Hunderttausendstel, dieses Produkt giebt 25 Zehnmillionstel, davon nimmt man nur 2 Millionstel, und läßt 5 Zehnmillionstel gänzlich weg; diese sind ja aber ein halbes Millionstel, und mit dem übrigen Vernachlässigten noch mehr als dieses; daher nehme man anstatt der 2, volle 3 Millionstel. Ferner die Multiplikation mit 2 Zehntausendstel mit 8 Tausendstel giebt 16 Zehnmillionstel; also kann man wieder dafür 2 Millionstel nehmen und durch diese beiden Korrektionen hat man den Fehler von 2 Millionsteln hergestellt.

Will man in jedem Falle ein richtiges Resultat erzielen, so berechne man nach oben angegebener Art eine Decimalstelle mehr als gefordert wird, so hat man nach der verkürzten Multiplikation doch immer weniger Mühe als nach der gewöhnlichen. Viele Beispiele sind zu berechnen.

Die verkürzte Division besteht darin, daß man eine Decimalstelle nach der andern von der niedrigsten angefangen im Divisor wegläßt, während solches in der Multiplikation mit den Stellen des Multiplikandus geschah. Ein Beispiel wird das Verfahren erläutern.

Digitized by Google

$324{,}_{5794000} : 456{,}_{257836} = 0{,}_{711394}$.

319 3804852	
5 1989148	Der Dividendus hat nur 4 Decimalstellen, der Divi-
4 5625784	sor 6, also ersetze man die 2 fehlenden Stellen durch
6363364	Nullen, und man erhält im Quotienten 0 Ganze; man
4562578	gebe also dem Dividendus noch eine Null, so bekommt
1800786	man im Quotienten 7 Zehntel, mit diesen multiplicire man
1368773	den Divisor und subtrahire das Produkt von dem Divi-
432013	dendus; anstatt nun dem Reste eine Null anzuhängen,
410632	streiche man von dem Divisor die niedrigste Decimalstelle
21381	weg, und dividire mit den übrigen in den Rest der Di-
13250	vision; dieses giebt im Quotienten 1 Zehntel; bei der Mul-
3131	tiplikation des Divisors, welcher jetzt eine Stelle weniger
2737	als vorher hat, beobachte man die Regeln, welche bei der verkürzten Multi-
394	plikation vorkommen; darauf streiche man wieder eine Stelle und zwar die

niedrigste des Divisors weg, und dividire mit den übrigen in den zweiten Rest der Division, und so fahre man fort, bis man im Quotienten die verlangten Decimalstellen erreicht hat. Der obige Quotient ist genau mit dem durch gewöhnliche Division gefundenen übereinstimmend. Immer wird dieses nicht der Fall sein, wenn die Verminderungen des Divisors auf den Rest der Division anfangen bedeutenden Einfluß auszuüben; doch in den meisten Fällen wird man ein sicheres Resultat erhalten, wenn der Divisor im Verhältnisse zum Dividendus groß, jener viele Decimalstellen und man die Division nicht sehr weit zu treiben hat; aber bei weitem kürzer ist dieses Verfahren als die gewöhnliche Division und verdient daher Beachtung.

K. Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

Ein Decimalbruch ist entweder periodisch oder nicht periodisch. Ein nicht periodischer Decimalbruch ist gleich einem solchen gemeinen Bruche, der zum Zähler den Zähler und zum Nenner den Nenner des Decimalbruches hat. Z. B. $0{,}_{75} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{,}_{68} = \frac{68}{100} = \frac{17}{25}$; $0{,}_{375} = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; ꝛc. In den meisten Fällen wird ein solcher Bruch zwischen Zähler und Nenner ein gemeines Maß haben, das man stets wegzuschaffen hat.

Der periodische Decimalbruch ist entweder vollständig oder unvollständig periodisch.

Der vollständig periodische Decimalbruch ist gleich einem solchen gemeinen Bruche, der zum Zähler den Zähler des Decimalbruches und zum Nenner den um Eins verminderten Nenner des Decimalbruches hat.

Der vollständig periodische Bruch sei:

1) $0{,}_{8888\ldots}$, der gemeine jenem gleiche sei $B = 0{,}_{8888\ldots}$; man multiplicire beide durch den Nenner einer Periode, hier also durch 10, und subtrahire von diesem Produkte den gegebenen Bruch; also

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} 10\,B = 8{,}8888\ldots. \\ B = 0{,}8888\ldots. \end{array}\right\} \text{ also } 9\,B = 8;\ \text{daher } B = \tfrac{8}{9}.$$

$$\left.\begin{array}{l} B = 0{,}6666\ldots. \\ 10\,B = 6{,}6666\ldots. \end{array}\right\} \text{ also } 9\,B = 6;\ \text{daher } B = \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}.$$

3) $B = 0{,}636363\ldots.$; also $100\,B = 63{,}636363\ldots.$

$$\underline{B = 0{,}636363\ldots.}$$

$$99\,B = 63;\ \text{daher } B = \tfrac{63}{99} = \tfrac{7}{11}.$$

4) $B = 0{,}571428571428571428\ldots.$ In diesem Beispiele ist die Periode 571428, die ohne Ende im Decimalbruche wiederkehrt, und man mag den Decimalbruch durch eine beliebige ganze Zahl multipliciren, so muß stets eine Periode wiederkehren, welche ein Vielfaches der gegebenen sein würde; da aber die unendliche Reihe der Periode aus der Rechnung geschafft werden soll, so muß man den gegebenen Decimalbruch durch eine solche ganze Zahl multipliciren, daß im Produkte die unendliche Reihe der Periode wieder zum Vorschein komme, und dieser ganze Multiplikator ist der Nenner einer Periode, also eine Einheit einer bestimmten Ordnung, die durch die Stellenzahl der Periode gegeben ist; sie ist nämlich stets Eins mit so vielen Nullen, als die Periode Stellen hat. In diesem Beispiele ist also der Nenner einer Periode 1 000 000; mit dieser Zahl den gegebenen Bruch multiplicirt, giebt das 1 000 000fache des gemeinen Bruches $B\ldots = 571428{,}571428\ldots.$ davon den gemeinen Bruch B subtrahirt; $B = 0{,}571428\ldots.$ Das Einfache von dem 1 000 000fachen derselben Zahl hinweggenommen, läßt das 999 999fache $B = 571428$. Nun ist aber das Einfache $\frac{1}{999999}$ des 999 999fachen derselben Zahl; daher $B = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$.

Wie dieses Beispiel, so wird jedes andere berechnet: z. B. $0{,}162162162162\ldots. = \frac{6}{37}$; $0{,}049504950495\ldots. = \frac{5}{101}$.

Man kann den obigen Satz auch so aussprechen: Jeder vollständig periodische Decimalbruch ist gleich einem solchen gemeinen Bruche, der zum Zähler die Periode hat, und zum Nenner eine eben so vielstellige Zahl, als die Periode ist, deren jede Ziffer aber 9 beträgt.

Die Nenner der 1-, 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8- ꝛc. stelligen Perioden sind daher 9, 99, 999, 9999, 99 999, 999 999, 9 999 999, ꝛc.

Wenn daher die gemeinen Brüche mit vorstehenden Nennern sich durch Brüche darstellen lassen, deren Nenner kleiner als die genannten sind; so müssen die kleinern Nenner Maße oder Faktoren der größern sein; um daher im Voraus das Maß solcher Brüche zu kennen, und durch diese Kenntniß der weitläuftigen Division zur Auffindung des größten gemeinen Maßes überhoben zu sein, zerlege man obige Nenner in ihre einfachen Faktoren.

$9 = 3.3$; $99 = 9.11 = 3.3.11$; $999 = 3.3.3.37$; $9999 = 3.3.11.101$; $99\,999 = 3.3.41.271$; $999\,999 = 3.3.3.7.11.13.37$; ꝛc.

Digitized by Google

Wenn der Decimalbruch unvollständig periodisch ist, so weiß man von früher, aus der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche (IV. B. Seite 121.), daß der Nenner des gemeinen Bruches einen oder mehrere der einfachen Faktoren 2 oder 5 haben muß; die Verwandlung der unvollständig periodischen Decimalbrüche ist übrigens ähnlich der vorigen. Z. B.

$0,8444\ldots$.; die Periode ist einstellig und 4; man multiplicire den gegebenen Bruch zuerst durch den Nenner des Bruches, welcher nicht zur Periode gehört, also hier durch 10, dieses giebt $10\,B = 8,4444\ldots$.; nun suche man, durch welche Zahl man den gegebenen Decimalbruch zu multipliciren habe, damit der Decimalbruch im Produkte vollständig periodisch werde, dieses Produkt aber doch größer als jenes sei, hier durch 100; daher ist $100\,B = 84,4444$, davon obiges Produkt subtrahirt, giebt $90\,B = 76$; also $B = \frac{76}{90} = \frac{38}{45}$.

Nach dieser Angabe sind folgende Beispiele berechnet:

1) $B = 0,768686868\ldots$	2) $B = 0,34656565\ldots$
$10\,B = 7,6868\ldots$	$100\,B = 34,6565\ldots$
$1000\,B = 768,6868\ldots$	$10\,000\,B = 3465,6565\ldots$
$990\,B = 761$	$9900\,B = 3431$
$B = \frac{761}{990}$	$B = \frac{3431}{9900}$
3) $B = 0,731231231\ldots$	4) $B = 0,587246924691\ldots$
$100\,B = 73,123123\ldots$	$1000\,B = 587,246924691\ldots$
$100000\,B = 73123,123123\ldots$	$10000000\,B = 5872469,246924691\ldots$
$99900\,B = 73050$	$9999000\,B = 5871882$
$B = \frac{73050}{99900} = \frac{487}{666}$	$B = \frac{5871882}{9999000} = \frac{2935941}{4999500}$

Aus diesen Beispielen ergiebt sich folgende Regel. Zuerst nimmt man die Stellen, welche nicht zur Periode gehören, und betrachtet sie als eine ganze Zahl; dann nimmt man die Stellen, welche nicht zur Periode gehören, und die erste Periode zusammen als eine ganze Zahl; so ist die Differenz dieser beiden Zahlen der Zähler des gesuchten gemeinen Bruches; der Nenner dieses Bruches besteht zuerst aus so vielen Ziffern, deren jede 9 ist, als die Periode Stellen hat, und dann hat er noch so viele Nullen hinter sich, als Stellen des Decimalbruches nicht zur Periode gehören.

Drittes Kapitel.

Vergleichung der Zahlen zur Bildung geometrischer Verhältnisse und Proportionen.

Das Wort geometrisch kommt her von Geometrie, und dieses wieder aus dem Griechischen von *γῆ* die Erde, das Land und *μέτρον* das Maß; davon *μετρέω* ich messe; daher *γεωμετρέω* ich messe die Erde; also

γεωμετρία, Geometria oder Geometrie die Erdmessung, die Erdmeßkunst oder kurz die Meßkunst.

In den arithmetischen Verhältnissen sah man auf den Unterschied der Zahlen, also auf diejenige Zahl, um welche die eine Zahl größer als die andere war; in den geometrischen Verhältnissen wird man also die eine Zahl durch die andere messen, oder untersuchen, welches Vielfache oder welcher Bruch die eine Zahl von der andern ist.

Es ist aber nothwendig, dieses Kapitel wie die vorhergehenden in das Kopfrechnen und schriftliche Rechnen einzutheilen, und es ist im Voraus zu erwarten, daß die schriftliche Behandlung dieses Gegenstandes etwas anders ausfallen werde, als die im Kopfe. Das schriftliche Rechnen sieht vorzüglich auf kurze Regeln, die rasch zum Ziele führen; das Kopfrechnen hat mehr die Absicht, das eigentliche Wesen des Rechnens zu durchdringen und zu erfassen. Jenes begnügt sich mit den richtigen Resultaten der Rechnung; dieses will durch sinnreiche Verbindungen, durch feine Verkettungen von Schlüssen zugleich das Denkvermögen üben; jenes scheut die Rechnungen mit großen Zahlen nicht, wenn sie nur nach bekannten und allgemeinen Regeln geführt werden können; dieses sucht theils durch Zerlegung der Rechnung mit großen Zahlen in mehrere Rechnungen mit kleinen Zahlen, theils durch eine Reihe scharfsinniger Schlüsse zu denselben Resultaten zu gelangen; so daß man beinahe sagen könnte, das schriftliche Rechnen scheue das Nachdenken, das Kopfrechnen liebe es und suche es überall anzuwenden.

Wenn also die Erklärungen geometrischer Verhältnisse und der Gleichheit derselben im Kopfrechnen anders als im schriftlichen Rechnen gegeben werden, so ist dadurch nicht auf die Verschiedenheit der Verhältnisse, sondern auf die Verschiedenheit der Behandlungsart derselben zu schließen, weil die eine Art mehr für die eine Rechnungsweise, die andere mehr für die andere sich eignet, und um die Identität des erklärten Gegenstandes außer allen Zweifel zu setzen, sollen später die Erklärungen mit einander verglichen und die eine aus der andern abgeleitet werden.

I. Kopfrechnen.

Ein Verhältniß zweier Zahlen ist die Beziehung der einen auf die andere in Rücksicht einer Zahl.

Zwei Zahlen stehen in geometrischem Verhältnisse, wenn sie als Vielfache ihres gemeinen Maßes auf einander bezogen werden, oder: das geometrische Verhältniß zweier Zahlen ist die Beziehung derselben auf einander als Vielfache ihres gemeinen Maßes.

In einer Wissenschaft müssen Erklärungen des zu behandelnden Gegenstandes an der Spitze stehen, weil sie das Fundament der Wissenschaft ausmachen; anders ist es, wenn derselbe Gegenstand der Jugend vorgetragen

Digitized by Google

wird; die Wissenschaft setzt einen Leser voraus, dessen Verstand bereits gebildet und reif ist, der Unterricht für Kinder muß so eingerichtet sein, daß er durch den Vortrag seines Gegenstandes den jugendlichen Verstand bilde und die junge Urtheilskraft schärfe; er muß die allgemeinen Begriffe in ihre Merkmale zerlegen, und zwar in solche, die den Kindern bereits bekannt sind, und durch Zusammensetzung derselben gleichsam vor den Augen der Kinder sie zur Erkenntniß der allgemeinen Begriffe führen. Daher können obige Erklärungen auch erst dann den Kindern gegeben werden, wenn sie bereits die Verhältnisse völlig begriffen haben.

A. Aufsuchung des geometrischen Verhältnisses zweier Zahlen.

Aus dem Frühern ist zwar den Kindern das Aufsuchen des größten gemeinen Maßes bekannt, doch könnte es mancher Knabe zum Theil vergessen haben; daher kann es theils als Wiederholung, theils als Vorbereitung zum Nachfolgenden dienen.

Welches ist das größte gemeine Maß folgender zwei Zahlen 18, 24, 27, 28, 30, 32, 36, 39, 40, 42, 45, 48, 51, 54, 56, 60 ꝛc., und welches Vielfache ist jede derselben von ihrem größten gemeinen Maße?

Das größte gemeine Maß zwischen 18 u. 24 ist 6; 18 ist das 3fache, 24 das 4fache von 6.
" " " " 18 " 27 " 9; 18 " " 2fache, 27 " 3fache " 9.
" " " " 18 " 28 " 2; 18 " " 9fache, 28 " 14fache " 2.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
" " " " 24 u. 27 ist 3; 24 ist das 8fache, 27 das 9fache von 3.
" " " " 24 " 28 " 4; 24 " " 6fache, 28 " 7fache " 4.
" " " " 24 " 30 " 6; 24 " " 4fache, 30 " 5fache " 6.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
" " " " 27 u. 28 ist 1; 27 ist das 27fache, 28 das 28fache v. 1.
" " " " 27 " 30 " 3; 27 " " 9fache, 30 " 10fache " 3.
" " " " 27 " 32 " 1; 27 " " 27fache, 32 " 32fache " 1.
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Das Aufsuchen des Verhältnisses zweier Zahlen kann nun folgen, und der Lehrer kann es ihnen auf folgende Weise erklären.

Das größte gemeine Maß zwischen 8 und 12 ist 4; 8 ist das 2fache von 4, 12 das 3fache von 4, und man sagt: 8 verhält sich so zu 12, daß 8 das 2fache von 4 und 12 das 3fache von 4 ist; oder 8 verhält sich so zu 12, wie sich das 2fache von 4 zum 3fachen von 4 verhält; oder kürzer 8 verhält sich so zu 12, wie sich das 2fache zum 3fachen von 4 verhält. Mehrere Beispiele werden erklärt.

Wie verhält sich 6 zu 9, 7 zu 14, 8 zu 16, 9 zu 12, 10 zu 15, 11 zu 33, 12 zu 16, 13 zu 26, 14 zu 21, 15 zu 20, 16 zu 24, 17 zu 34, 18 zu 27, 19 zu 57, 20 zu 25, 21 zu 35, 22 zu 55, 23 zu 92, 24 zu 36, ꝛc.?

Digitized by Google

6 verhält sich so zu 9, wie sich das 2fache zum 3fachen von 3 verhält.
7 " " " 14, " " " 1fache " 2fachen " 7 "
8 " " " 16, " " " 1fache " 2fachen " 8 "
9 " " " 12, " " " 3fache " 4fachen " 3 "
10 " " " 15, " " " 2fache " 3fachen " 5 "
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Auflösung der letzten Frage. Das größte gemeine Maß zwischen 24 und 36 ist 12, 24 ist das 2fache von 12, 36 ist das 3fache von 12; daher verhält sich 24 zu 36, wie sich das 2fache zum 3fachen von 12 verhält.

Diese Auflösungen dieser Art haben die Schüler zu machen, damit sie sich eine Geläufigkeit in der neuen Verbindung der Ausdrücke erwerben und die neue Beziehung der Zahlen auf einander erfassen.

Erklärung eines Verhältnisses. Werden zwei Zahlen so mit einander verglichen oder auf einander bezogen, daß man untersucht, welches Vielfache jede von ihrem größten gemeinen Maße ist, so nennt man diese Vergleichung zweier Zahlen mit einander, oder diese Beziehung zweier Zahlen auf einander ein Verhältniß. Daher kann man auch sagen: Ein Verhältniß ist die Beziehung zweier Zahlen auf einander in Rücksicht der Vielfachen ihres größten gemeinen Maßes.

Die Zahlen, welche in einem Verhältnisse mit einander verglichen werden, nennt man Glieder des Verhältnisses; das Glied, welches zuerst genannt oder gesetzt wird, heißt das Vorderglied, dasjenige, welches dann folgt, heißt das Hinterglied.

Um diese Verhältnisse von den frühern Verhältnissen, in welchen man den Unterschied der Glieder untersuchte, zu unterscheiden, nennt man diese geometrische Verhältnisse. Das Wort geometrisch kommt von dem fremden Worte Geometrie her, welches bedeutet, die Kunst zu messen, oder die Meßkunst. Denn in den geometrischen Verhältnissen werden die Zahlen durch ihr größtes gemeine Maß gemessen.

Wollte man ein Verhältniß schreiben und zugleich alle die Worte, welche dasselbe angeben, so würde man viele Zeit und vielen Platz brauchen, wie wir bisher gesehen haben; deswegen hat man zur Bezeichnung eines geometrischen Verhältnisses ein einfaches Zeichen, nämlich das Kolon, zwei senkrecht über einander stehende Punkte, eingeführt; also anstatt zu schreiben: 5 verhält sich zu 10, setzt man kurz 5 : 10; diese Bezeichnung wird aber immer ausgesprochen wie früher, nämlich 5 verhält sich zu 10.

Da jede Zahl gleich sich selbst ist, wie $5 = 5$, $10 = 10$ ꝛc., so muß auch jedes Verhältniß gleich sich selbst sein; also $5 : 10 = 5 : 10$. Nun ist aber 5 das 1fache und 10 das 2fache von 5; daher kann man auch setzen, 5 : 10 = 1fachen : 2fachen von 5, und es wird wie früher ausgesprochen: 5 verhält sich zu 10 wie sich das 1fache zum 2fachen von 5 verhält.

Digitized by Google

Nach dieser kurzen Bezeichnung eines Verhältnisses sind folgende Aufgaben zu berechnen und zu schreiben.

Wie verhält sich jede folgender Zahlen 38, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 60, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 98, 99, 100 ꝛc. zu jeder nachfolgenden?

Diese Aufgabe mit den gegebenen Zahlen schließt $\frac{39 \cdot 38}{2} = 39 \cdot 19 = 741$ einzelne Aufgaben in sich. Die Berechnung der Zahl solcher Aufgaben ist folgende. Im Ganzen sind 39 Zahlen gegeben; die erste Zahl bildet mit allen übrigen 38 Aufgaben; eben so bildet die zweite Zahl mit allen übrigen, nämlich die erste mitgerechnet, 38 Aufgaben; die 3te Zahl bildet mit allen übrigen, wieder die beiden ersten Zahlen mitgerechnet, 38 Aufgaben; ꝛc. jede von den 39 Zahlen bildet also mit allen übrigen Zahlen 38 Aufgaben; daher bilden alle 39 Zahlen mit allen übrigen $39 \cdot 38$ Aufgaben. Man wird aber bemerkt haben, daß in dieser Berechnung jede Aufgabe doppelt genommen worden ist; z. B. 38 : 39, dann 39 : 38, 38 : 40, dann 40 : 38 ꝛc.; daher ist die Zahl verschiedener Aufgaben nur $\frac{39 \cdot 38}{2}$.

Der Lehrer erläutere diese Berechnungsweise den Kindern an kürzern Zahlenreihen.

38 : 39 = 38fachen : 39fachen von 1; 39 : 40 = 39fachen : 40fachen von 1;
38 : 40 = 19fachen : 20fachen » 2; 39 : 42 = 13fachen : 14fachen » 3;
38 : 42 = 19fachen : 21fachen » 2; 39 : 44 = 39fachen : 44fachen » 1;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.
40 : 42 = 20fachen : 21fachen von 2; 42 : 44 = 21fachen : 22fachen von 2;
40 : 44 = 10fachen : 11fachen » 4; 42 : 45 = 14fachen : 15fachen » 3;
40 : 45 = 8fachen : 9fachen » 5; 42 : 48 = 7fachen : 8fachen » 6;
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wenn das größte gemeine Maß zweier Zahlen Eins ist, so sind sie also relative Primzahlen, oder Primzahlen zu einander. Sind die Multiplikatoren der Vielfachen nicht relative Primzahlen, so ist das angegebene Maß der Zahlen nicht das größte derselben. Diese Bemerkung kann als Prüfung dienen, ob man das größte gemeine Maß der Glieder gefunden hat oder nicht.

Es ist klar, daß diese Uebungen von großem Nutzen für die Kinder sind; deswegen haben sie recht viele Beispiele dieser Art zu rechnen; dann geht der Lehrer wieder einen Schritt weiter, wie folgt.

Die Zahl, welche anzeigt, welches Vielfache eine Zahl von ihrem Maße ist, heißt die Zahl des Maßes oder die Maßzahl. Auch diese Erklärung ist bereits früher gewesen, zur Wiederholung für die Kinder ist die Angabe derselben von neuem nothwendig.

Digitized by Google

Wenn man das Verhältniß zweier Zahlen sucht, so will man eigentlich nicht das größte gemeine Maß derselben wissen, sondern vorzüglich die Vielfachen, welche die Zahlen von ihrem größten gemeinen Maße sind; oder die Maßzahlen des größten gemeinen Maßes. Aus diesem Grunde giebt man in dem Verhältnisse zweier Zahlen nicht mit das größte gemeine Maß derselben an, sondern nur die Maßzahlen. Also anstatt zu sagen und zu schreiben: 9 verhält sich zu 18 wie das Einfache zum 2fachen von 9, oder 9 : 18 = 1fachen : 2fachen von 9, schreibt und spricht man 9 : 18 = 1 : 2, 9 verhält sich zu 18, wie sich 1 zu 2 verhält.

In dieser Art werden nun folgende Aufgaben berechnet.

Welches ist das Verhältniß je zweier von folgenden Zahlen 104, 108, 112, 114, 117, 119, 120, 121, 126, 128, 130, 132, 133, ꝛc.?

104 : 108 = 26 : 27; 108 : 112 = 27 : 28; 112 : 114 = 56 : 57;
104 : 112 = 13 : 14; 108 : 114 = 18 : 19; 112 : 117 = 112 : 117;
104 : 117 = 8 : 9; 108 : 117 = 12 : 13; 112 : 119 = 16 : 17;
ꝛc. ꝛc. ꝛc.

B. Das Verhältniß zweier Zahlen und eine derselben sind gegeben, die andere zu finden.

Die letzten Aufgaben des vorigen Abschnittes bildeten eigentlich Proportionen, und in ihnen lag auch die Gleichheit der Verhältnisse; die Erklärung dieser Gleichheit wurde den Kindern durch die Identität des Verhältnisses gegeben, weil diese Art der Erklärung dem jugendlichen Verstande begreiflicher als die wissenschaftliche ist, später wird aber auch die letztere vorkommen; dann lernen zwar die Kinder keinen neuen Gegenstand mehr, sondern denselben nur unter einem andern Namen und einer etwas abweichenden Behandlungsweise, und diese Art den Unterricht zu betreiben ist sehr geeignet, die Theilnahme der Kinder für den behandelten Gegenstand rege zu erhalten, welches ein Hauptzweck der Pädagogik (Erziehungs-, Unterrichtskunst) sein muß. Die Aufgaben dieses Paragraph's sind gleichfalls Proportionsrechnungen, doch werden sie als solche hier nicht betrachtet und behandelt.

Welche zwei Zahlen verhalten sich wie 1 : 2? Antw. 1.2 : 2.2 oder 2 : 4; 1.3 : 2.3 oder 3 : 6; 1.4 : 2.4 oder 4 : 8; ꝛc.

Welche zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3? Antw. 2.2 : 3.2 oder 4 : 6; 2.3 : 3.3 oder 6 : 9; 2.4 : 3.4 oder 8 : 12; ꝛc.

Welche zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 5? Antw. 3.5 : 5.5 oder 15 : 25; 3.6 : 5.6 oder 18 : 30; 3.7 : 5.7 oder 21 : 35; ꝛc.

Da die Maßzahlen der gesuchten Zahlen gegeben sind, so nimmt man eine beliebige Zahl als das gemeine Maß der gesuchten Zahlen, bildet die Vielfachen von diesem Maße, so hat man zwei der verlangten Zahlen.

Zur eigentlichen Aufgabe noch eine Vorübung.

Digitized by Google

Das Einfache einer Zahl ist welcher Theil vom 2=, 3=, 4=, 5=, 6fachen ꝛc. derselben Zahl? Antw. 1 ist die Hälfte von 2, daher ist das Einfache die Hälfte vom 2fachen derselben Zahl. 1 ist $\frac{1}{3}$ von 3, so ist das Einfache einer Zahl $\frac{1}{3}$ vom 3fachen derselben. 1 ist $\frac{1}{4}$ von 4, so ist das Einfache einer Zahl $\frac{1}{4}$ vom 4fachen derselben ꝛc.

Das 2fache welcher Zahl beträgt 6, 10, 14, 18, ꝛc.?

Aufl. Die gesuchte Zahl ist das Einfache derselben; das Einfache einer Zahl ist $\frac{1}{2}$ vom 2fachen derselben; das 2fache der Zahl ist 6, also ist das Einfache der Zahl $\frac{1}{2}$ von 6 oder 3, daher ist die gesuchte Zahl 3.

Das 3=, 4=, 6=, 8=, 12=, 18fache ꝛc. welcher Zahl beträgt 72, 144, 216, ꝛc.?

Aufl. Die einfache Zahl ist $\frac{1}{3}$ vom 3fachen derselben; da das 3fache der Zahl 72 beträgt, so ist die einfache Zahl $\frac{1}{3}$ von 72. Nun ist der 3te Theil von $72 = 24$; also ist die gesuchte Zahl $= 24$.

Wenn sich zwei Zahlen wie 1 : 2, 3 : 5, 4 : 7, 5 : 9, 6 : 11 ꝛc. verhalten, so ist jede welches Vielfache einer und derselben Zahl?

Wenn sich zwei Zahlen wie 1 : 2 verhalten, so ist die erste das Einfache und die andere das 2fache einer und derselben Zahl.

Wenn sich zwei Zahlen wie 3 : 5 verhalten, so ist die erste das 3fache einer gewissen Zahl und die 2te das 5fache derselben. ꝛc.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 1 : 2, die erste ist 5, 7, 9, 13 ꝛc., welche ist die zweite Zahl?

Aufl. Wenn sich zwei Zahlen wie 1 : 2 verhalten, so hat die erste das Einfache einer gewissen Zahl und die andere das 2fache derselben. Nun ist die erste Zahl 5, daher ist das Einfache $= 5$, die andere Zahl ist das 2fache derselben, also ist sie $2 . 5$ oder 10.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3, die erste ist 12, 22, 34, 46 ꝛc., welche ist die zweite Zahl?

Aufl. Wenn sich zwei Zahlen wie 2 : 3 verhalten, so ist die erste das 2fache einer gewissen Zahl und die andere das 3fache derselben. Da nun die erste Zahl 12 ist, so ist das 2fache einer Zahl $= 12$; die einfache Zahl ist $\frac{1}{2}$ der 2fachen; daher ist das Einfache $= \frac{1}{2}$ von 12 oder 6; die zweite Zahl ist das 3fache, also ist sie $3 . 6$ oder 18.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 4 : 9, die erste ist 24, 32, 48, 56 ꝛc., welche ist die zweite Zahl?

Aufl. Wenn sich zwei Zahlen wie 4 : 9 verhalten, so ist die erste das 4fache einer Zahl und die 2te das 9fache derselben. Weil die erste 24 ist, so ist das 4fache einer Zahl $= 24$; das Einfache ist $\frac{1}{4}$ vom 4fachen derselben Zahl, also ist das Einfache $\frac{1}{4}$ von 24 oder 6; die zweite Zahl ist das 9fache jener Zahl, daher ist sie $9 . 6$ oder 54.

Wenn das Verhältniß zweier Zahlen 5 : 7 und die erste 15, 30, 45,

Digitized by Google

65, 75, ꝛc. ist, so ist welche Zahl die zweite? 21, 42, 63, 91, 105, ꝛc. Die Auflösung wie vorher.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 6 : 13, die zweite ist 39, 91, 104, 143, 156, 160 ꝛc., welche ist die erste Zahl? 18, 42, 48, 66, 72, 78 ꝛc. Die Auflösung wie oben.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 21 : 24, die erste ist 28, 70, 84 ꝛc., welche ist die zweite Zahl?

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 21 und 24 ist 3, 21 ist das 7fache, 24 das 8fache von 3; die erste Zahl muß also das 7fache einer Zahl und die zweite das 8fache derselben sein. Nun ist die erste Zahl 28; daher ist das 7fache einer gewissen Zahl 28, so ist das Einfache dieser Zahl als $\frac{1}{7}$ der 7fachen, $\frac{1}{7}$ von 28 oder 4; die zweite Zahl hat das 8fache derselben, also ist sie 8 . 4 oder 32.

Das Verhältniß zweier Zahlen ist 81 : 126, die zweite Zahl ist 84, 112, 154, 182 ꝛc., welche ist die erste Zahl?

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 81 und 126 ist 9, 81 ist das 9fache, 126 das 14fache von 9; die erste Zahl hat also das 9fache einer Zahl, die andere das 14fache derselben. Nun soll die zweite Zahl 84 sein; also ist das 14fache einer Zahl $= 84$. Das Einfache einer Zahl ist $\frac{1}{14}$ der 14fachen, daher ist die einfache Zahl $= \frac{1}{14}$ von 84 oder 6; die erste Zahl ist das 9fache dieser, folglich ist sie $9 . 6 = 54$.

Viele Aufgaben dieser Art mit Auflösungen.

C. Das Verhältniß zweier Zahlen und ihre Summe oder Differenz sind gegeben, die Zahlen selbst zu finden.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3, ihre Summe ist 20, 35, 65, 85, 100, 150 ꝛc., welches sind die Zahlen?

Aufl. Verhalten sich zwei Zahlen wie 2 : 3, so ist die erste das 2fache und die andere das 3fache derselben Zahl, und ihre Summe hat daher das 2fache und 3fache oder das 5fache derselben Zahl. Die Summe der Zahlen soll nun 20 sein, folglich ist das 5fache einer Zahl $= 20$; also ist die einfache Zahl, als der 5te Theil der 5fachen, $= \frac{1}{5}$ von 20 oder 4; die erste Zahl ist nun das 2fache und die andere das 3fache dieser letztern; daher ist die erste Zahl 2 . 4 oder 8 und die andere 3 . 4 oder 12.

Das Verhältniß zweier Zahlen ist 5 : 7, ihre Summe ist 36, 60, 84, 108, 144, 156 ꝛc., welche Zahlen sind es? Antw. 15 und 21, 25 und 35, 35 und 49, 45 und 63, 60 und 84, 65 und 91 ꝛc.

Wenn sich zwei Zahlen wie 16 : 20 verhalten und ihre Summe 18, 63, 90, 135, 144, 162 ist, so müssen es welche Zahlen sein?

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 16 und 20 ist 4; 16 ist das 4fache von 4, 20 ist das 5fache von 4; die erste Zahl muß also das 4fache, die andere das 5fache einer Zahl sein; ihre Summe hat daher das

Digitized by Google

4fache und 5fache oder das 9fache derselben Zahl; die Summe der gesuchten Zahlen soll aber auch zugleich 18 sein, folglich ist das 9fache einer gewissen Zahl = 18; daher ist die einfache Zahl gleich dem 9ten Theile von 18 oder 2; die erste der gesuchten Zahlen ist das 4fache der letztern, also ist sie 4 . 2 oder 8 und folglich ist die andere 18 — 8 oder 10.

Anstatt zu sagen: die Summe zweier Zahlen ist gegeben, kann man auch sagen: eine Zahl in zwei andere Zahlen, oder in zwei ungleiche Theile zu theilen; denn die Summe der ungleichen Theile muß gleich der zu theilenden Zahl sein.

12, 27, 42, 51, 63, 75, 96 ꝛc. so in 2 ungleiche Theile zu theilen, daß sich die Theile wie 1 : 2 verhalten; welches sind die Theile?

Aufl. Sollen sich die Theile einer Zahl wie 1 : 2 verhalten, so muß der erste Theil das Einfache und der andere das 2fache einer gewissen Zahl sein; da nun die Summe der Theile die getheilte Zahl ausmacht, so muß man auch die Summe der Vielfachen nehmen, welche den Theilen gleich sind. Nun ist die Summe der Vielfachen das Einfache und 2fache oder das 3fache einer Zahl gleich der Summe der Theile, und die Summe der Theile gleich der zu theilenden Zahl 12; also ist das 3fache eine Zahl = 12, daher ist das Einfache derselben = $\frac{1}{3}$ von 12 oder 4. Der erste Theil hat das Einfache, also ist er 4, der andere Theil hat das 2fache von 4, also ist er 2.4 oder 8. Daher sind die gesuchten Theile 4 und 8.

Die Theile von 27 sind 9 und 18, von 42 sind 14 und 28, von 51 sind 17 und 34, von 63 sind 21 und 42, von 75 sind 25 und 50, von 96 sind 32 und 64, ꝛc.

Jede der Zahlen 32, 48, 72, 88, 112, 128, 144, 168, 192, 200 ꝛc. so in 2 ungleiche Theile zu theilen, daß sich dieselben wie 3 : 5 verhalten; diese Theile sind?

Aufl. Wenn sich die Theile einer Zahl wie 3 : 5 verhalten, so hat der eine Theil das 3fache und der andere das 5fache einer gewissen Zahl; daher haben beide zusammen das 3 + 5fache oder das 8fache einer gewissen Zahl. Beide Theile zusammen betragen aber auch 32; also ist das 8fache einer Zahl = 32, daher ist die einfache Zahl der 8te Theil von 32 oder 4. Der erste Theil ist also das 3fache von 4 oder 12 und der andere 32 — 12 = 20. Daher sind die Theile 12 und 20.

Die Theile von 48 sind 18 und 30, von 72 sind 27 und 45, von 88 sind 33 und 55, von 112 sind 42 und 70, von 128 sind 48 und 80, von 144 sind 54 und 90, von 168 sind 63 und 105, von 192 sind 72 und 120, von 200 sind 75 und 125, ꝛc.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 zu 8, ihr Unterschied ist 27, 33, 57, 78, 93, 111, 117 ꝛc., welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn sich zwei Zahlen wie 5 zu 8 verhalten, so hat die erste das 5fache und die andere das 8fache einer Zahl; daher ist ihr Unterschied

Digitized by Google

das 8fache weniger dem 5fachen oder = dem 3fachen derselben Zahl. Zugleich soll der Unterschied der Zahlen 27 betragen; daher ist das 3fache einer gewissen Zahl = 27; folglich ist das Einfache der letzten = ⅓ von 27 = 9; die erste ist daher das 5fache von 9 oder 45 und die andere das 8fache von 9 oder 72.

Je zwei der übrigen Zahlen sind 55 und 88, 95 und 152, 130 und 208, 155 und 248, 185 und 296, 195 und 312 ꝛc.

Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 7, die eine ist um 24, 28, 52, 64, 72 ꝛc. kleiner als die andere, welche sind die Zahlen?

Aufl. Da das Verhältniß der Zahlen 3 : 7 ist, so hat die erste das 3- und die andere das 7fache einer gewissen Zahl, und die erste ist um 7- — 3fache oder um das 4fache derselben Zahl kleiner als die zweite; auch ist die erste um 24 kleiner als die zweite; daher ist das 4fache einer gewissen Zahl = 24; folglich ist die einfache Zahl = ¼ von 24 oder 6; daher ist die erste Zahl 3 . 6 oder 18, und die zweite 7 . 6 oder 42.

Die übrigen Zahlen sind 21 und 49, 39 und 91, 48 und 112, 54 und 126 ꝛc.

D. Theilung einer Zahl in Theile, deren Verhältniß gegeben ist.

Das Verhältniß der Theile kann entweder arithmetisch, geometrisch oder beides in Verbindung sein.

1) Das Verhältniß der Theile ist arithmetisch.

Man soll 56, 64, 72, 88, 116, 144, 236 ꝛc. so in zwei Theile theilen, daß der eine Theil um 2, 4, 8, 16, 24 ꝛc. kleiner als der andere sei, welches sind die Theile?

Aufl. Da der erste Theil um 2 kleiner als der andere sein soll, so ist dieser um 2 größer als jener; also ist der zweite Theil gleich dem ersten um 2; beide Theile zusammen betragen daher den 2fachen ersten Theil und 2, beide Theile zusammen sind aber auch gleich 56; daher ist der 2fache erste Theil und 2 = 56. Dem 2fachen ersten Theile muß man also noch 2 hinzusetzen, um 56 zu erhalten, daher ist der 2fache erste Theil um 2 kleiner als 56, also ist der 2fache erste Theil 56 weniger 2 oder 54; folglich ist der erste Theil als die Hälfte von seinem 2fachen die Hälfte von 54 oder 27; der andere Theil ist um 2 größer als der erste, daher ist er 27 und 2 oder 29.

Die Auflösungen der übrigen Aufgaben sind dieser ganz ähnlich.

Ist ein Theil um 2 kleiner als der andere, so sind die Theile von 64: 31 und 33, von 72: 35 und 37, von 88: 43 und 45, von 116: 57 und 59, von 144: 71 und 73, von 236: 117 und 119.

Wenn ein Theil um 4 kleiner als der andere ist, so sind die Theile von 56: 26 und 30, von 64: 30 und 34, von 72: 34 und 38, von 88: 42 und 46, von 116: 56 und 60, von 144: 70 und 74, von 236: 116 u. 120.

Digitized by Google

Ist ein Theil um 8 kleiner als der andere, so sind die Theile von 56: 24 und 32, von 64: 28 und 36, von 72: 32 und 40, von 88: 40 und 48, von 116: 54 und 62, von 144: 68 und 76, von 236: 114 und 122.

Ist ein Theil um 16 kleiner als der andere, so sind die Theile von 56: 20 und 36, von 64: 24 und 40, von 72: 28 und 44, von 88: 36 und 52, von 116: 50 und 66, von 144: 64 und 80, von 236: 110 und 126.

Ist ein Theil um 24 kleiner als der andere, so sind die Theile von 56: 16 und 40, von 64: 20 und 44, von 72: 24 und 48, von 88: 32 und 56, von 116: 46 und 70, von 144: 60 und 84, von 236: 106 und 130. ꝛc.

Man soll 77, 93, 115, 121, 163, 199, 201, 357 ꝛc. so in zwei Theile theilen, daß der eine um 5, 13, 27, 39, 41 ꝛc. größer als der andere sei, welches sind die Theile?

Aufl. Ist der erste Theil um 5 größer als der andere, so ist der erste gleich dem zweiten und 5; also sind beide Theile zusammen = dem 2fachen zweiten Theile + 5; beide Theile betragen aber auch zusammen 77; folglich ist das 2fache des zweiten Theils und 5 = 77; daher ist das 2fache vom 2ten Theile = 72; also ist der 2te Theil = ½ von 72 = 36, und der erste = 36 + 5 = 41.

Ist ein Theil um 5 größer als der andere, so sind die Theile von 93: 44 und 49, von 115: 55 und 60, von 121: 58 und 63, von 163: 79 und 84, von 199: 97 und 102, von 201: 98 und 103, von 357: 176 und 181.

Ist ein Theil um 13 größer als der andere, so sind die Theile von 77: 32 und 45, von 93: 40 und 53, von 115: 51 und 64, von 121: 54 und 67, von 163: 75 und 88, von 199: 93 und 106, von 201: 94 und 107, von 357: 172 und 185.

Wenn ein Theil um 27 größer als der andere ist, so sind die Theile von 77: 25 und 52, von 93: 33 und 60, von 115: 44 und 71, von 121: 47 und 74, von 163: 68 und 95, von 199: 86 und 113, von 201: 87 und 114, von 357: 165 und 192.

Ist ein Theil um 39 größer als der andere, so sind die Theile von 77: 19 und 58, von 93: 27 und 66, von 115: 38 und 77, von 121: 41 und 80, von 163: 62 und 101, von 199: 80 und 119, von 201: 81 und 120, von 357: 159 und 198.

Ist ein Theil um 41 größer als der andere, so sind die Theile von 77: 18 und 59, von 93: 26 und 67, von 115: 37 und 78, von 121: 40 und 81, von 163: 61 und 102, von 199: 79 und 120, von 201: 80 und 121, von 357: 158 und 199. ꝛc.

Man soll 80 so in 3 Theile theilen, daß der erste um 13 größer als der zweite und dieser um 17 größer als der dritte Theil werde; welches sind die Theile?

Aufl. 1. Da der zweite Theil um 17 größer als der dritte ist, so ist der 2te Theil gleich dem 3ten und 17. Weil ferner der erste Theil um

13 größer als der 2te ist, so ist der erste Theil gleich dem 2ten und 13, daher ist der erste Theil gleich dem 3ten und 17 und 13 oder gleich dem 3ten Theile und 30; folglich ist die Summe der 3 Theile = dem ersten Theile (d. h. dem 3ten Theile und 30) und dem 2ten Theile (d. h. dem 3ten Theile und 17) und dem 3ten Theile oder gleich dem 3fachen vom 3ten Theile und 30 und 17 oder gleich dem 3fachen vom 3ten Theile und 47; und da die Summe der 3 Theile die zu theilende Zahl 80 ausmachen, so ist das 3fache des 3ten Theiles und 47 = 80; also ist das 3fache des 3ten Theiles = 80 — 47 = 33; daher ist der 3te Theil = $\frac{1}{3}$ von 33 = 11, der 2te ist um 17 größer, also ist er 11 + 17 = 28, und der erste ist wieder um 13 größer als der 2te, daher ist der erste 28 + 13 = 41.

Aufl. 2. Man mache jeden der beiden andern Theile dem ersten gleich. Dem 2ten Theile fehlen 13 bis er dem ersten gleich werde; dem 3ten fehlen 17 bis er dem 2ten gleich werde, also fehlen dem 3ten 17 + 13 oder 30 bis er gleich dem ersten. Setzt man also zu 80, als der Summe der drei Theile, die an dem 2ten fehlenden 13, und die am 3ten Theile fehlenden 30, so muß 80 + 13 + 30 oder 123 das 3fache des ersten Theiles sein; folglich der erste Theil $\frac{1}{3}$ von 123 oder 41; da nun 41 um 13 größer als der 2te Theil ist, so ist dieser 41 — 13 oder 28; und weil 28 um 17 größer als der 3te Theil ist, so ist er 28 — 17 oder 11.

Aufl. 3. Man mache jeden, nämlich den 1sten und 3ten Theil, dem 2ten Theile gleich. Der erste Theil hat einen Ueberschuß von 13 über den 2ten, dem 3ten Theile mangeln 17 bis zum 2ten Theile; der Ueberschuß von 13 kann einen Mangel von 13 ersetzen; daher mangeln dem ersten und 3ten Theile 4 bis zum 2fachen des 2ten Theiles; setzt man diesen Mangel von 4 der Summe der 3 Theile oder 80 hinzu, so erhält man 84 = dem 3fachen des 2ten Theils; daher ist der 2te Theil $\frac{1}{3}$ von 84 oder 28; der erste ist um 13 größer als 28, also ist er 28 + 13 = 41; der 3te ist um 17 kleiner als 28, also ist er 28 — 17 = 11.

Aehnlich kann man auch die Theilung einer Zahl in 2 Theile auflösen.

Man soll 162, 171, 225, 324, 468, 525, 684, 729 ꝛc. so in 3 Theile theilen, daß der erste um 26 größer als der zweite, und dieser um 35, 38, 41, 47, 56 ꝛc. größer als der dritte sei; welches sind die Theile?

Jede dieser 40 Aufgaben wird nach einer der 3 vorstehenden Auflösungen gerechnet, und man findet die Resultate in nachfolgender Tabelle.

Digitized by Google

	26 35			26 38			26 41			26 47			26 56		
162	83	57	22	84	58	20	85	59	18	87	61	14	90	64	8
171	86	60	25	87	61	23	88	62	21	90	64	17	93	67	11
225	104	78	43	105	79	41	106	80	39	108	82	35	111	85	29
324	137	111	76	138	112	74	139	113	72	141	115	68	144	118	62
468	185	159	124	186	160	122	187	161	120	189	163	116	192	166	110
525	204	178	143	205	179	141	206	180	139	208	182	135	211	185	129
684	257	231	196	258	232	194	259	233	192	261	235	188	264	238	182
729	272	246	211	273	247	209	274	248	207	276	250	203	279	253	197

Man soll 950 so in 3 Theile theilen, daß der erste Theil um 49 größer als der zweite, und dieser um 64 kleiner als der dritte sei; welches sind die Theile?

Aufl. Man suche wie oben zwei der Theile dem einen derselben gleich zu machen; also entweder den ersten und zweiten dem dritten, oder den ersten und dritten dem zweiten, oder den zweiten und dritten dem ersten. Hier werde der letzte Fall behandelt.

Dem zweiten Theile fehlen 49 bis er dem ersten gleich wird. Der dritte ist um 64 größer als der zweite, daher ist er um $64 - 49$ oder um 15 größer als der erste; daher fehlen dem 2ten und 3ten Theile $49 - 15$ oder 34 bis zum Doppelten des ersten Theils; den 3 Theilen zusammen oder 950 fehlen also 34 bis zum 3fachen des ersten Theils; folglich ist das 3fache des ersten Theils $= 950 + 34 = 984$; also ist der erste Theil $= \frac{1}{3}$ von $984 = 328$. Der zweite Theil ist um 49 kleiner als 328, also ist er $328 - 49 = 279$, und der dritte $= 279 + 64 = 343$.

Man soll 50, 65, 74, 83, 98 ꝛc. so in 2 Theile theilen, daß der erste um 2 größer als das Doppelte des andern Theiles sei; welches sind die Theile?

Aufl. Würde der erste Theil nur das Doppelte des zweiten sein, so hätte ihre Summe oder die zu theilende Zahl 50 das 3fache des zweiten Theils; da aber der erste Theil um 2 mehr als das Doppelte des zweiten Theiles ist, so muß auch ihre Summe oder die zu theilende Zahl 50 um 2 mehr als das 3fache des zweiten Theiles sein; folglich ist das 3fache des zweiten Theils $= 50 - 2$ oder 48; also ist der zweite Theil $= \frac{1}{3}$ von 48 oder 16, und der erste $= 50 - 16 = 34$.

Die Theile von 65 sind 44 und 21, von 74 sind 50 und 24, von 83 sind 56 und 27, von 98 sind 66 und 32, ꝛc.

Wenn man 81, 145, 205 ꝛc. so in 2 Theile theilt, daß der erste um 3, 7, 15, 19 ꝛc. kleiner als das 3fache des zweiten Theiles wird, so erhält man welche Theile?

Aufl. Sollte der erste Theil nur das 3fache des zweiten sein, so könnte auch ihre Summe oder die zu theilende Zahl 81 nur das 4fache vom

Digitized by Google

zweiten Theile sein. Weil aber dem ersten Theile 3 fehlen bis zum 3fachen des zweiten, so muß auch ihrer Summe oder der zu theilenden Zahl 81 bis zum 4fachen des zweiten Theils 3 fehlen. Daher ist der 4fache zweite Theil $= 81 + 3 = 84$; also der zweite Theil $= \frac{1}{4}$ von $84 = 21$; folglich der erste Theil $= 81 - 21 = 60$.

Die übrigen Theile von 81 sind 59 und 22, 57 und 24, 56 und 25, ꝛc.

Die Theile von 145 sind 108 und 37, 107 und 38, 105 und 40, ꝛc.

Die Theile von 205 sind 153 und 52, 152 und 53, 150 und 55, ꝛc.

2) Theilung einer Zahl nach geometrischem Verhältnisse.

Jede der Zahlen 72, 96, 126, 168 ꝛc. so in 3 Theile zu theilen, daß sich die Theile wie die 3 Zahlen 1, 2, 3 verhalten, welches sind die Theile?

Aufl. Eins ist das Einfache, 2 das 2fache und 3 das 3fache von 1; daher muß der erste Theil das Einfache, der 2te das 2fache und der 3te das 3fache einer gewissen Zahl sein; ihre Summe oder die zu theilende Zahl 72 ist daher das 6fache einer gewissen Zahl, daher ist das Einfache derselben $\frac{1}{6}$ von 72 oder 12; folglich sind die gesuchten 3 Theile $1 . 12 = 12$, $2 . 12 = 24$ und $3 . 12 = 36$.

Die Theile von 96 sind 16, 32 und 48, von 126 sind 21, 42 und 63, ꝛc.

Jede folgender Zahlen 60, 105, 135, 165, 195, 225 ꝛc. so in drei Theile zu theilen, daß sich dieselben wie die 3 Zahlen 3, 5, 7 verhalten; diese Theile sind?

Antw. 12, 20, 28; 21, 35, 49; 27, 45, 63; 33, 55, 77; 39, 65, 91; 45, 75, 105; ꝛc.

Satz. Wenn eine Zahl das 2fache einer und das 3fache einer andern ist: so muß sie das 2×3= oder 6fache einer dritten sein.

Denn weil die gegebene Zahl das 2fache einer Zahl ist, so hat die gegebene Zahl den Faktor 2, und weil sie auch das 3fache einer andern ist, so hat sie auch den Faktor 3; also hat die gegebene Zahl die beiden einfachen Faktoren 2 und 3, daher muß sie 2×3 mal eine gewisse Zahl oder 6 mal diese Zahl sein; also ist die gegebene Zahl das 6fache einer Zahl.

Aus demselben Grunde muß eine Zahl das 3×5= oder 15fache einer Zahl sein, wenn sie das 3fache einer und zugleich das 5fache einer andern ist.

Ist ferner eine Zahl das 5fache einer und das 7fache einer andern, so ist sie das 5×7= oder 35fache einer dritten Zahl. ꝛc.

Wenn eine Zahl das 12fache einer und das 16fache einer andern ist, so muß sie das $2 . 2 . 2 . 2 . 3$= oder 48fache einer dritten sein.

Denn weil sie das 16fache einer Zahl ist, so muß sie die einfachen Faktoren 2, 2, 2, 2 haben, und weil sie auch das 12fache einer Zahl ist, so hat sie die einfachen Faktoren 2, 2, 3; nun sind die beiden Faktoren 2, 2 schon in 16 vorgekommen, daher hat sie außer jenen noch den einfachen Faktor 3, also ist sie $2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 48$ mal eine gewisse Zahl.

Digitized by Google

Der Gegenstand dieses Satzes ist das, was früher von dem kleinsten allgemeinen oder General-Nenner gesagt wurde.

Man soll 51, 85, 119, 221, 255, 289 ꝛc. so in 3 Theile theilen, daß sich der erste Theil zum zweiten wie 1 : 2, und der zweite zum dritten sich wie 3 : 4 verhalte; welches sind die Theile?

Aufl. Da der zweite Theil im ersten Verhältnisse das 2fache einer Zahl, und im andern Verhältnisse das 3fache einer andern sein soll, so muß er das 6fache einer gewissen Zahl sein. Nun verhält sich der erste zum zweiten Theile wie 1 : 2, also ist der erste das Einfache, der zweite das 2fache einer und derselben Zahl; daher ist der erste Theil die Hälfte des zweiten, der zweite ist das 6fache einer gewissen Zahl; also ist der erste Theil $\frac{1}{2}$ vom 6fachen oder das 3fache derselben Zahl. Der zweite Theil verhält sich zum dritten wie 3 : 4, also ist der zweite Theil das 3fache und der 3te das 4fache einer und derselben Zahl; zugleich ist der zweite Theil das 3fache vom 2fachen einer gewissen Zahl; daher ist der dritte Theil das 4fache vom 2fachen oder das 8fache derselben Zahl. Folglich ist der erste Theil das 3fache, der zweite das 6fache und der dritte das 8fache einer gewissen Zahl; also hat ihre Summe oder die zu theilende Zahl 51 das $3 + 6 + 8$fache oder das 17fache einer gewissen Zahl; folglich ist das Einfache derselben $= \frac{1}{17}$ von $51 = 3$; daher ist der erste Theil $= 3 . 3 = 9$, der zweite $= 6 . 3 = 18$, und der dritte $= 8 . 3 = 24$.

Die Theile von 85 sind 15, 30, 40; von 119 sind 21, 42, 56; von 221 sind 39, 78, 104; von 255 sind 45, 90, 120; von 289 sind 51, 102, 136; ꝛc.

In der letzten Aufgabe wird man die Bemerkung gemacht haben, daß es zur Theilung einer Zahl in Theile nach gegebenen Verhältnissen nothwendig ist, die kleinsten Zahlen zu kennen, welche gegebene Verhältnisse zu einander haben. Daher folgende Aufgaben.

Welches sind die 3 kleinsten Zahlen, von denen sich die erste zur 2ten wie 3 : 4, und die 2te zur 3ten wie 5 : 6 verhält?

Aufl. Die Verhältnißzahlen des ersten Verhältnisses sind 3 und 4, die V.Z. des zweiten Verhältnisses sind 5 und 6; daher sind die V.Z. der zweiten von den gesuchten Zahlen 4 und 5. Man suche nun das kleinste Produkt der V.Z. der gesuchten zweiten Zahl; dieses ist $4 . 5 = 20$, weil 4, 5 relative Primzahlen sind. Daher muß die zweite der gesuchten Zahlen 20 sein. Durch diese Zahl und die gegebenen Verhältnisse berechne man nun die erste und dritte der gesuchten Zahlen. Daher hat man folgende zwei Aufgaben. Das Verhältniß zweier Zahlen ist 3 : 4, die zweite ist 20; welches ist die erste? Nach dem Frühern findet man die erste Zahl $= 15$.

Das Verhältniß zweier Zahlen ist 5 : 6, die erste ist 20; welches ist die zweite? Man findet die zweite $= 24$.

Digitized by Google

Die Aufl. dieser beiden Aufgaben werden hier nicht vorgetragen, weil solches bereits früher (3tes Kapitel I. B. Seite 143.) geschehen ist, und hier also eine unnöthige Wiederholung wäre.

Verhält sich die erste Zahl zur 2ten wie 3 : 7, die 2te zur 3ten wie 2 : 5, so sind die kleinsten Zahlen nach diesen Verhältnissen 6, 14, 35.

Ferner I. : II. = 3 : 8, II. : III. = 5 : 9; so sind die kleinsten Zahlen 15, 40, 72. Ist I. : II. = 6 : 7, II. : III. = 4 : 5; so sind die kleinsten Zahlen 24, 28, 35. Wenn I. : II. = 7 : 11, II. : III. = 7 : 15; so sind die 3 kleinsten Zahlen 49, 77, 165. ꝛc.

Welches sind die 3 kleinsten Zahlen, von denen sich die erste zur zweiten wie 11 : 12, und die zweite zur dritten sich wie 15 : 16 verhält?

Aufl. Die Verhältnißzahlen der zweiten sind 12 und 15; ihr größtes gemeine Maß ist 3, ihre Maßzahlen 4, 5; daher ist die kleinste durch 12, 15 meßbare Zahl 3 . 4 . 5 = 60. Weil sich nun die erste zur zweiten Zahl wie 11 : 12 verhält, und die zweite 60 ist, so ist die erste 55. Die zweite Zahl verhält sich ferner zur dritten wie 15 : 16, und da die zweite 60, so ist die dritte 16 . 4 oder 64. Also sind die 3 gesuchten Zahlen 55, 60 und 64.

Ist I : II = 5 : 8, II : III = 12 : 13, so ist I, II, III: 15, 24, 26.

Ist I : II = 7 : 18, II : III = 27 : 28, so ist I, II, III: 21, 54, 56. ꝛc.

Welches sind die 4 kleinsten Zahlen, von denen sich die erste zur 2ten wie 1 : 2, die zweite zur dritten wie 3 : 4, die dritte zur vierten wie 5 : 6 verhält?

Aufl. Man suche zuerst die 3 kleinsten Zahlen nach den 2 ersten Verhältnissen 1 : 2 und 3 : 4, diese sind 3, 6, 8; nun bestimme man die 3 kleinsten Zahlen nach dem zweiten und dritten Verhältnisse 3 : 4 und 5 : 6; so findet man 15, 20, 24.

Es ist nun die zweite Zahl in zwei Beziehungen die kleinste, in der einen soll sie 6, in der andern 15 sein. Diese beiden Bedingungen erfülle man nun dadurch, daß man die kleinste durch 6 und 15 meßbare Zahl suche; so findet man nach der letzten Aufl. die zweite Zahl = 30. Von der gefundenen zweiten Zahl gehe man nun aus, und bestimme die 3 andern Zahlen nach den gegebenen Verhältnissen; also I : II = 1 : 2, II = 30, so ist I = 15; II : III = 3 : 4, II = 30, so ist III = 40; III : IV = 5 : 6, III = 40, so ist IV = 48; also sind die 4 kleinsten Zahlen 15, 30, 40 und 48; und man wird bemerken, daß sie kein gemeines Maß haben. Denn 2 mißt zwar 30, 40, 48, aber nicht 15; 3 mißt 15, 30, 48, aber nicht 40; 5 mißt 15, 30, 40, aber nicht 48; und 2, 3, 5 sind die einfachen Faktoren dieser Zahlen.

Wenn I : II = 2 : 3, II : III = 4 : 5, III : IV = 6 : 7; so sind die 4 kleinsten Zahlen 16, 24, 30 und 35.

Digitized by Google

Ist I : II = 3 : 4, II : III = 5 : 6, III : IV = 7 : 8; so sind die 4 kleinsten Zahlen 105, 140, 168, 192.

Welches sind die 5 kleinsten Zahlen, von denen sich die erste zur 2ten wie 1 : 2, die zweite zur dritten wie 3 : 4, die dritte zur vierten wie 5 : 6 und die vierte zur fünften wie 7 : 8 verhält?

Aufl. Nach den beiden ersten Verhältnissen I : II = 1 : 2, II : III = 3 : 4, sind die 3 kleinsten Zahlen I, II, III: 3, 6, 8. Nach dem 2ten und 3ten Verhältnisse II : III = 3 : 4 und III : IV = 5 : 6, sind die 3 kleinsten II, III, IV: 15, 20, 24. Nach dem 3ten und 4ten Verhältnisse III : IV = 5 : 6, IV : V = 7 : 8, sind die 3 kleinsten III, IV, V: 35, 42, 48. Nun wird man bemerken, daß die 3te Zahl 3 Bedingungen erfüllen soll, nach der ersten soll sie 8, nach der zweiten 20 und nach der dritten 35 sein. Dieses kann sie nur dadurch leisten, daß sie die kleinste durch 8, 20, 35 meßbare Zahl ist. Diese ist aber 2 . 2 . 2 . 5 . 7 = 280, und nun bestimme man nach ihr die übrigen Zahlen, wie früher gezeigt wurde, so findet man für die erste 3 . 5 . 7 = 105, für die zweite 2 . 3 . 5 . 7 = 210, für die dritte 2 . 2 . 2 . 5 . 7 = 280, für die vierte 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 7 = 336, und für die fünfte 2 . 4 . 6 . 8 = 384; also sind die gesuchten Zahlen 105, 210, 280, 336, 384.

Ist I : II = 2 : 3, II : III = 4 : 5, III : IV = 6 : 7, IV : V = 8 : 9; so ist I, II, III, IV, V: 128, 192, 240, 280 und 315. Nach den Verhältnissen 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8, 9 : 10, sind die kleinsten Zahlen 315, 420, 504, 576, 640. Man wird leicht aus dem Vorstehenden ersehen, wie man die kleinsten Zahlen finden könne, wenn mehr als 4 Verhältnisse zwischen denselben gegeben sind.

Die Zahl 504 so in 3 Theile zu theilen, daß sich der erste zum 2ten wie 2 : 5, und der zweite zum dritten wie 3 : 7 verhalte; welches sind die Theile?

Aufl. Die 3 kleinsten Zahlen, welche die gegebenen Verhältnisse zu einander haben, sind 6, 15, 35; also muß der erste Theil das 6-, der zweite das 15- und der dritte das 35fache einer gewissen Zahl sein; ihre Summe oder die zu theilende Zahl hat daher das 6- + 15- + 35fache oder das 56fache einer gewissen Zahl = 504; daher ist das Einfache = $\frac{1}{56}$ von 504 = 9; daher ist der erste Theil = 6 . 9 = 54, der zweite = 15 . 9 = 135, der dritte = 35 . 9 = 315.

Anmerk. Da der Verf. die Absicht hat, dieser Schrift eine möglichst geringe Bogenzahl bei aller der Mannigfaltigkeit zu geben, welche die voluminösen Bücher ähnlicher Art enthalten, so muß er dieser Absicht gemäß sich auf eine geringe Anzahl ähnlicher Aufgaben beschränken; diesen Mangel wird er aber dem Lehrer dadurch entschädigen, daß er ihm die Art und Weise angiebt, ähnliche Aufgaben selbst zu bilden, wenn er nicht schon ein Verfahren dazu haben sollte. Jedem andern Leser wird die vorhandene Zahl der Aufgaben genügen.

Digitized by Google

Will man eine Aufgabe dieser Art bilden, etwa zur Theilung einer Zahl in 3 Theile, so wähle man zwei beliebige Verhältnisse, deren Glieder relative Primzahlen sind, z. B. 7 : 8, 9 : 10; so sind die kleinsten Zahlen in diesem Verh.

7 : 8
9 : 10
63 : 72 : 80

Nun nehme man die Summe dieser 3 Zahlen = 63 + 72 + 80 = 215; diese Summe der kleinsten Zahlen multiplicire man durch eine beliebige ganze Zahl z. B. durch 13, also 13 . 215 = 2795, so ist dieses Produkt die zu theilende Zahl, und die Verhältnisse der Theile hat man bereits vorher angenommen, und nun ist es leicht, diese Zahlen in einer Aufgabe nach obigen Beispielen darzustellen.

Angenommen wir wollten eine Zahl in 4 Theile theilen, so untersuchen wir zunächst wie viele Verhältnisse wir nothwendig haben, und nehmen dieselben willkürlich an, z. B. I : II = 3 : 4, II : III = 6 : 7, III : IV = 8 : 9. Nun suchen wir die kleinsten Zahlen

3 : 4
6 : 7
9 : 12 : 14

6 : 7
8 : 9
48 : 56 : 63

die IIte Zahl ist nach der einen Bedingung 12, nach der andern 48; also ist sie 48, daher sind die 4 kleinsten Zahlen 36, 48, 56, 63. Man hätte die 4 kleinsten Zahlen auch nach der 3ten bestimmen können. Das Uebrige wie vorher ꝛc.

3. Theilung einer Zahl nach geometrischen und arithmetischen Verhältnissen.

Man soll 64 so in 2 Theile theilen, daß der erste Theil um 8 vermehrt zum zweiten das Verhältniß von 1 : 2 habe; welches sind die Theile?

Aufl. Wird ein Theil um 8 vermehrt, so ist dann auch ihre Summe um 8 vermehrt, ihre unvermehrte Summe ist 64, folglich die um 8 vermehrte 72, diese ist also der 3fache erste Theil um 8 vermehrt; daher ist der um 8 vermehrte erste Theil = $\frac{1}{3}$ von 72 = 24; folglich ist der unvermehrte erste Theil = 16, daher der zweite Theil = 64 — 16 = 48.

Die Zahlen 243, 311, 451, 575 ꝛc. so in 2 Theile zu theilen, daß der erste um 13 vermehrte Theil zum zweiten das Verhältniß von 1 : 3 habe, welches sind die Theile? Die Aufl. wie vorher. Die Theile von 243 sind 51 und 192, von 311 sind 68 und 243, von 451 sind 103 und 348, von 575 sind 134 und 441 ꝛc.

Man soll 226 so in 2 Theile theilen, daß der um 19 vermehrte erste Theil zum zweiten das Verhältniß von 2 : 3 habe; welche Theile sind es?

Aufl. Nimmt man an, daß der erste Theil bereits um 19 vermehrt sei, so hat der vermehrte erste Theil das 2fache und der zweite Theil das 3fache einer gewissen Zahl; daher hat die Summe des um 19 vermehrten ersten Theils und des zweiten das 5fache gedachter Zahl; und da die Summe der Theile 226 ist, so giebt diese Summe um 19 vermehrt 226 + 19 = 245 = dem 5fachen einer Zahl, daher die einfache = $\frac{1}{5}$ von 245 = 49; also ist der um 19 vermehrte erste Theil = 2 . 49 = 98, also der erste Theil = 98 — 19 = 79, und der zweite = 3 . 49 = 147.

Digitized by Google

Die Zahlen 388, 570, 647, 766, 1543 ꝛc. so in zwei Theile zu theilen, daß sich der erste Theil zu dem um 25 vermehrten zweiten wie 3 : 4 verhalte; welches sind die Theile? Antwort 177 und 211, 255 und 315, 288 und 359, 339 und 427, 672 und 866, ꝛc.

Verfahren zur Bildung von Aufgaben. Man nehme ein beliebiges Verhältniß, z. B. 5 : 7; die Summe der Verhältnißzahlen = 5 + 7 = 12, vervielfache diese durch eine beliebige Zahl, z. B. durch 29, also 12 . 29 = 338, wähle eine Zahl, um welche einer der Theile vermehrt werden soll, z. B. 34, subtrahire diese vom obigen Produkt, so ist die zu theilende Zahl = 338 — 34 = 304. Also lautet die Aufg. Die Zahl 304 so in 2 Theile zu theilen, daß sich der erste Theil zu dem um 34 vermehrten zweiten Theile, wie 5 : 7 verhalte. Es ist willkürlich, welchen der Theile man vermehre.

Man soll 671 so in 2 Theile theilen, daß der um 47 verminderte erste Theil sich zum zweiten wie 4 : 9 verhalte, welches sind die Theile?

Aufl. Der um 47 verminderte erste Theil hat das 4fache und der zweite Theil das 9fache einer gewissen Zahl; daher muß die Summe des um 47 verminderten ersten und des zweiten Theils das 13fache einer gewissen Zahl sein. Die Summe der um 47 verminderten Theile beträgt 671 — 47 = 624; daher ist das 13fache gedachter Zahl = 624; also die einfache = $\frac{1}{13}$ von 624 = 48; daher ist der zweite Theil = 9 . 48 = 432, und der erste = 671 — 432 = 239. Die Zahlen 824, 1022, 1220, 1418, 1634, ꝛc. so in 2 Theile zu theilen, daß der um 68 verminderte erste Theil sich zum zweiten, wie 5 : 13 verhalte; welches sind die Theile? Antw. Die ersten Theile dieser Zahlen sind 278, 333, 388, 443, 503, ꝛc.

Man soll 176 so in zwei Theile theilen, daß der um 13 vermehrte erste Theil sich zu dem um 6 vermehrten zweiten Theil wie 7 : 8 verhalte; welches sind die Theile?

Aufl. Angenommen, die Theile wären bereits vermehrt, so hat der erste das 7fache und der andere das 8fache einer gewissen Zahl, daher ihre Summe das 15fache derselben Zahl. Da der erste Theil um 13 und der andere um 6 vermehrt ist, so ist ihre Summe um 13 + 6 oder um 19 vermehrt. Ihre unvermehrte Summe ist 176, daher ist ihre um 19 vermehrte Summe = 176 + 19 = 195; dieses ist also das 15fache gedachter Zahl, daher die einfache = $\frac{1}{15}$ von 195 = 13.

Der erste um 13 vermehrte Theil ist also 7 . 13 = 91; also der unvermehrte erste Theil = 78; folglich ist der zweite Theil = 176 — 78 = 98.

Die Zahlen 511, 764, 971, 1155, 1408, ꝛc. so in 2 Theile zu theilen, daß der um 27 vermehrte erste Theil sich zu dem um 14 vermehrten zweiten Theile wie 8 : 15 verhalte; welches sind die Theile?

Antwort. Die ersten Theile dieser Zahlen sind 165, 253, 325, 389, 477, ꝛc.

Digitized by Google

Man soll 286 so in 2 Theile theilen, daß sich der um 13 verminderte erste Theil zu dem um 17 verminderten zweiten Theile wie 7 : 9 verhalte; welches sind die Theile?

Aufl. Angenommen, die Theile wären bereits vermindert, so müßte der erste das 7fache und der andere das 9fache einer gewissen Zahl, also ihre Summe das 16fache derselben Zahl haben. Dadurch aber, daß der erste Theil um 13 und der zweite um 17 vermindert ist, wird ihre Summe $13 + 17$ oder um 30 verringert; daher beträgt die um 30 verkleinerte Summe das 16fache einer gewissen Zahl $= 286 - 30 = 256$; also das Einfache gedachter Zahl $= \frac{1}{16}$ von $256 = 16$. Der erste um 13 verkleinerte Theil ist daher $7 . 16 = 112$, also ist der erste Theil 125 und der andere 161.

Jede folgender Zahlen 393, 526, 583, 540, 773, ꝛc. so in 2 Theile zu theilen, daß sich der um 35 verminderte erste Theil zu dem um 16 verminderten zweiten Theile wie 9 : 10 verhalte; welches sind die Theile?

Antwort. Die ersten Theile dieser Zahlen sind 197, 260, 287, 314, 377, ꝛc.

Man soll 429 so in 2 Theile theilen, daß der um 25 verminderte erste Theil sich zu dem um 28 vermehrten zweiten Theile wie 5 : 11 verhalte; welches sind die Theile?

Aufl. Die Theile seien bereits verändert, so hat der erste das 5fache und der andere das 11fache einer gewissen Zahl: also ihre Summe das 16fache derselben Zahl. Nun muß untersucht werden, welche Veränderung die Summe der Theile erlitten habe. Denn wenn der eine Theil vermehrt, der andere vermindert wird, so können 3 Zustände der Summe stattfinden: 1) die Summe der Theile bleibt unverändert, wenn der eine Theil um dieselbe Zahl vermindert, um welche der andere vermehrt wird; 2) die Summe der Theile wird vermehrt, wenn der eine Theil um eine mehr vermehrt, als der andere vermindert wird; und 3) die Summe der Theile wird vermindert, wenn der eine um weniger vermehrt, als der andere vermindert wird. In vorstehender Aufgabe findet der zweite Fall statt; daher muß man die Summe der Theile 429 um 3 vermehren, dieses ist 432 = dem 16fachen einer Zahl; daher die einfache Zahl $= \frac{1}{16}$ von $432 = 27$.

Der erste um 25 verminderte Theil hat das 5fache, also $5 . 27 = 135$; daher ist der erste Theil $= 135 + 25 = 160$ und der zweite $= 429 - 160 = 269$.

Die Zahl 498 so in 2 Theile zu theilen, daß der um 96 verminderte erste Theil sich zu dem um 78 vermehrten zweiten Theile wie 7 : 13 verhalte; welche Theile sind es? Antw. 264 und 234.

Wie muß man 500 so in 2 Theile theilen, daß der um 84 verminderte erste Theil sich zu dem um 84 vermehrten zweiten Theile wie 8 : 17 verhalte? Antw. In 244 und 256.

Digitized by Google

E. Ueber gleiche Verhältnisse und Proportionen.

In diesem Paragraphen hat man zuerst den Begriff gleicher Verhältnisse zu entwickeln und dann denselben durch eine Definition festzustellen; von demselben gelangt man unmittelbar zu dem Begriffe der Proportion. Darauf wird man gewisse Veränderungen mit den Gliedern gleicher Verhältnisse vornehmen, und die Bedingungen untersuchen, unter welchen man wieder gleiche Verhältnisse bekommt. Dann wird man die Proportionen einer genauern Untersuchung unterwerfen, endlich mehrere derselben verbinden, um neue Proportionen zu erhalten und damit wird dann diese Lehre schließen.

1) Begriffsentwickelung gleicher Verhältnisse.

Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn die Vorderglieder derselben Gleichvielfache und auch die Hinterglieder Gleichvielfache sind. Die Glieder jedes Verhältnisses müssen aber Vielfache ihres gemeinen Maßes sein.

In dieser Erkl. kommt ein neuer Ausdruck vor, nämlich ein Gleichvielfaches, derselbe muß zunächst erklärt werden.

In dem Vielfachen: das 7fache von 8, ist 7 der Multiplicator, 8 der Multiplicandus. Haben nun zwei Vielfache gleiche Multiplicatoren, so heißen sie Gleichvielfache, die Multiplicanden mögen gleich oder ungleich sein. Z. B. das 3fache von 8 und das 3fache von 8 sind Gleichvielfache; das 4fache von 7 und das 4fache von 9 sind Gleichvielfache.

Wie sind Gleichvielfache gleicher Zahlen? Z. B. das 2fache von $5 = 10$ und das 2fache von $5 = 10$; das 3fache von 6 und das 3fache von 6 ꝛc.

Gleichvielfache gleicher Zahlen sind also gleich.

Wie sind Gleichvielfache ungleicher Zahlen? Z. B. das 5fache von $3 = 15$, das 5fache von $7 = 35$; das 6fache von $2 = 12$, das 6fache von $3 = 18$; ꝛc.

Gleichvielfache ungleicher Zahlen sind ungleich, das Gleichvielfache der größern Zahl ist größer als das Gleichvielfache der kleinern Zahl.

Die Verhältnisse folgender Zahlen 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 24, ꝛc. sollen gesucht und ihre Verhältnisse durch Vielfache ihres größten gemeinen Maßes ausgedrückt werden.

1) $8 : 9 =$ 8faches : 9fachen v. 1;
2) $8 : 12 =$ 2faches : 3fachen v. 4;
3) $8 : 15 =$ 8faches : 15fach. v. 1;
4) $8 : 16 =$ 1faches : 2fachen v. 8;
5) $8 : 18 =$ 4faches : 9fachen v. 2;
6) $8 : 20 =$ 2faches : 5fachen v. 4;
7) $8 : 24 =$ 1faches : 3fachen v. 8;
8) $9 : 12 =$ 3faches : 4fachen v. 3;
9) $9 : 15 =$ 3faches : 5fachen v. 3;
10) $9 : 16 =$ 9faches : 16fach. v. 1;
11) $9 : 18 =$ 1faches : 2fachen v. 9;
12) $9 : 20 =$ 9faches : 20fach. v. 1;
13) $9 : 24 =$ 3faches : 8fachen v. 3;
14) $12 : 15 =$ 4faches : 5fachen v. 3;
15) $12 : 16 =$ 3faches : 4fachen v. 4;
16) $12 : 18 =$ 2faches : 3fachen v. 6;

Digitized by Google

17) 12 : 20 = 3faches : 5fachen v. 4;
18) 12 : 24 = 1faches : 2fach. v. 12;
19) 15 : 16 = 15fach. : 16fach. v. 1;
20) 15 : 18 = 5faches : 6fachen v. 3;
21) 15 : 20 = 3faches : 4fachen v. 5;
22) 15 : 24 = 5faches : 8fachen v. 3;
23) 16 : 18 = 8faches : 9fachen v. 2;
24) 16 : 20 = 4faches : 5fachen v. 4;
25) 16 : 24 = 2faches : 3fachen v. 8;
26) 18 : 20 = 9faches : 10fach. v. 2;
27) 18 : 24 = 3faches : 4fachen v. 6;
28) 20 : 24 = 5faches : 6fachen v. 4;
&c. &c.

Nun läßt der Lehrer diejenigen Verhältnisse von den Kindern aufsuchen, deren Vorderglieder Gleichvielfache und Hinterglieder Gleichvielfache sind; solche Verhältnisse sind 1, und 23, ferner 2, 25 und 16, ferner 4, 11 und 18, ferner 8, 15, 21 und 27, ferner 9 und 17, ferner 14 und 24, ferner 20 und 28 &c.

Nun bemerkt der Lehrer, daß diese Verhältnisse gleiche Verhältnisse genannt werden, und giebt ihnen dann die obige Erklärung gleicher Verhältnisse.

Welche zwei Zahlen verhalten sich wie 1 : 2, 2 : 3, 4 : 5, 6 : 7 &c.?

Die Kinder haben viele Paare von Zahlen zu nennen, die in den genannten Verhältnissen stehen.

Welche zwei von folgenden Zahlen 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 60, &c. haben gleiche Verhältnisse zu einander?

Die Kinder haben alle Verhältnisse der Zahlen aufzusuchen, und dann folgende gleiche Verhältnisse anzugeben: 25 : 26 = 50 : 52; 25 : 27 = 50 : 54; 25 : 28 = 50 : 56; 25 : 30 = 30 : 36 = 35 : 42 = 40 : 48 = 45 : 54 = 50 : 60 = 5 : 6; 25 : 35 = 30 : 42 = 35 : 49 = 40 : 56 = 5 : 7; 25 : 40 = 30 : 48 = 35 : 56 = 5 : 8; 5 : 9 = 25 : 45 = 30 : 54; 1 : 2 = 25 : 50 = 26 : 52 = 27 : 54 = 28 : 56 = 30 : 60; 13 : 14 = 26 : 28 = 39 : 42 = 52 : 56; 13 : 15 = 26 : 30 = 39 : 45 = 52 : 60; 13 : 18 = 26 : 36 = 39 : 54; 2 : 3 = 26 : 39 = 28 : 42 = 30 : 45 = 32 : 48; 13 : 20 = 26 : 40 = 39 : 60; 27 : 28 = 54 : 56; 9 : 10 = 27 : 30 = 36 : 40 = 45 : 50 = 54 : 60; 9 : 11 = 27 : 33 = 36 : 44 = 45 : 55; 3 : 4 = 27 : 36 = 30 : 40 = 33 : 44 = 36 : 48 = 39 : 52 = 42 : 56 = 45 : 60; 9 : 13 = 27 : 39 = 36 : 52; 9 : 14 = 27 : 42 = 36 : 56; 3 : 5 = 27 : 45 = 30 : 50 = 33 : 55 = 36 : 60; 14 : 15 = 28 : 30 = 42 : 45 = 56 : 60; 7 : 8 = 28 : 32 = 35 : 40 = 42 : 48 = 49 : 56; 4 : 5 = 28 : 35 = 32 : 40 = 36 : 45 = 40 : 50 = 44 : 55 = 48 : 60; 7 : 9 = 28 : 36 = 35 : 45 = 42 : 54; 7 : 10 = 28 : 40 = 35 : 50 = 42 : 60; 7 : 11 = 28 : 44 = 35 : 55; 7 : 12 = 28 : 48 = 35 : 60; 4 : 7 = 28 : 49 = 32 : 56; 15 : 16 = 30 : 32 = 45 : 48; 10 : 11 = 30 : 33 = 40 : 44 = 50 : 55; 6 : 7 = 30 : 35 = 36 : 42 = 42 : 49 = 48 : 56; 10 : 13 = 30 : 39 = 40 : 52; 8 : 9 = 32 : 36 = 40 : 45 = 48 : 54; 8 : 11 = 32 : 44 = 40 : 55; 11 : 12 = 33 : 36 = 44 : 48 = 55 : 60; 11 : 13 = 33 : 39

Digitized by Google

$= 44 : 52$; $11 : 14 = 33 : 42 = 44 : 56$; $11 : 15 = 33 : 45 = 44 : 60$; $12 : 13 = 36 : 39 = 48 : 52$; ꝛc.

2) Veränderung der Glieder gleicher Verhältnisse.

Diese Veränderung besteht darin, daß man die 4 Species auf die Glieder eines Verhältnisses anwendet, und die Bedingungen untersucht, unter welchen man wieder gleiche Verhältnisse erlangt.

Zu den Zahlen 8 und 16, 12 und 18, 15 und 20, 24 und 30 ꝛc. muß man Zahlen in welchem Verhältnisse hinzusetzen, damit das Verhältniß der Summen gleich dem Verhältnisse der gegebenen Zahlen sei?

$8 : 16 = 1 : 2$, setzt man nun zu 8 z. B. 5, so muß man zu 16 10 hinzusetzen; denn es ist $8 + 5 : 16 + 10 = 13 : 26 = 1 : 2$. Setzt man aber zu 16 mehr oder weniger als 10 hinzu, so ist das Verhältniß der Summen nicht gleich dem Verhältnisse von $1 : 2$; z. B. man setze 11, oder 9 zu 16, so ist $8 + 5 : 16 + 11 = 13 : 27$ nicht $= 1 : 2$, $8 + 5 : 16 + 9 = 13 : 25$ nicht $= 1 : 2$.

Aehnliches wird man bei den andern Verhältnissen finden. Haben sich die Schüler davon gehörig überzeugt, so erhalten sie folgenden Satz:

Setzt man zu zwei gegebenen Zahlen zwei andere hinzu, und sollen die Summen das Verhältniß der gegebenen Zahlen zu einander haben: so müssen die Zusätze im Verhältnisse der gegebenen Zahlen zu einander stehen.

Es ist $8 : 12 = 2 : 3$
$10 : 15 = 2 : 3$
$4 : 6 = 2 : 3$
} also $(8 + 10 + 4) : (12 + 15 + 6) = 2 : 3$
$= 22 : 33$.

Satz. **Wenn man die gleichnamigen Glieder gegebener gleicher Verhältnisse addirt, so erhält man ein Verhältniß, das gleich einem der gegebenen Verhältnisse ist.**

Gleichnamige Glieder sind alle Vorderglieder, so wie alle Hinterglieder. Denselben Satz spricht man auch so aus: **Die Summe der Vorderglieder gleicher Verhältnisse hat zur Summe der Hinterglieder derselben das Verhältniß von einem der gleichen Verhältnisse.**

Ueber diesen wichtigen Satz müssen viele Aufgaben gegeben werden, und solcher Art sind nachfolgende.

Welche Zahl muß man zu der zweiten von den Zahlen 17 und 18 hinzusetzen, damit die erste Zahl zur Summe sich wie $1 : 2$ verhalte?

Aufl. Würden die Zahlen bereits das Verhältniß von $1 : 2$ haben, so müßte die zweite $2 . 17 = 34$ sein, weil die erste 17 ist. Nun ist aber die zweite nur 18, also fehlt ihr $34 - 18 = 16$; also muß man 16 zur zweiten hinzusetzen; ꝛc.

Wie oft muß man 12 zu 100 und eben so oft 4 zu 500 hinzusetzen, bis beide Summen einander gleich werden?

Digitized by Google

Aufl. Würden die Zahlen einander gleich sein, so müßte man auch Gleiches zu ihnen hinzusetzen, damit man gleiche Summen erhielte. Nun ist aber die zweite Zahl 500 um 400 größer als die erste; daher muß auch zu dieser mehr als zu jener hinzukommen. Zur ersten setzt man 12, zur andern 4, zur ersten also jedes Mal 8 mehr als zur zweiten hinzu; und so oft man das Hinzusetzen wiederholt, so oft mal 8 kommt zur ersten mehr als zur zweiten hinzu. Damit die erste gleich der zweiten werde, muß zu jener 400 mehr als zu dieser hinzukommen; daher muß das Hinzusetzen so oft geschehen, als 8 in 400 enthalten ist, d. i. 50 mal; also hat man 50.12 zu 100 und 50 mal 4 zu 500 hinzuzusetzen, bis beide Summen einander gleich werden.

Wie oft muß man 10 zu 14 und eben so oft 8 zu 150, 17 zu 36 und eben so oft 14 zu 726, 25 zu 32 und eben so oft 21 zu 864, 18 zu 45 und eben so oft 13 zu 1000, 28 zu 54 und eben so oft 22 zu 1272, 33 zu 56 und eben so oft 26 zu 2044 ꝛc. hinzusetzen, bis beide Summen einander gleich werden?

Antw. 68, 230, 208, 191, 203, 284 mal, ꝛc.

Man soll gleichzeitig 18 zu 24 und 12 zu 1296 hinzusetzen, bis beide Summen sich wie 1 : 2 verhalten; wie oft muß das Hinzusetzen geschehen?

Aufl. 1. Hätten die Zahlen bereits das Verhältniß von 1 : 2 zu einander, so müßte die zweite Zahl 2 . 24 oder 48 sein, weil die erste 24 ist; die zweite ist aber 1296, also um 1296 — 48 oder 1248 zu groß nach dem Verh. Wären aber die Zahlen im verlangten Verh., so müßten auch die Zusätze in demselben Verh. stehen, und der zweite Zusatz müßte 36 sein, weil der erste 18 ist; der zweite ist aber nur 12, also um 36 — 12 oder um 24 zu klein nach dem Verh. Was daher zur zweiten Zahl nach Verh. zu wenig hinzukommt, muß den oben genannten Ueberschuß aufheben; daher muß das Hinzusetzen so oft geschehen, als 1248 24 enthält. Nun ist 1248:24 = 52, also muß das erwähnte Hinzusetzen 52 mal geschehen.

Aufl. 2. Nach dem gegebenen Verh. müßte die erste Zahl 648 sein; da die zweite 1296 ist; nun ist die erste nur 24, also fehlen ihr 624 zum Verh. 1 : 2. In dem Falle, daß die Zahlen das gegebene Verh. zu einander haben, müssen auch die Zusätze in demselben Verh. stehen, und es müßte der erste 6 sein, weil der zweite 12 ist. Der erste ist aber 18, also um 12 mehr als er nach dem Verh. sein soll. Dieser Ueberschuß des Zusatzes muß also den Mangel der ersten Zahl ersetzen; daher geschieht das Hinzusetzen 624 : 12 = 52 mal.

Man soll gleichzeitig 26 zu 48 und 7 zu 1896 hinzusetzen, bis die erste Summe zur zweiten das Verhältniß von 2 : 3 habe, wie oft muß das Hinzusetzen geschehen?

Aufl. 1. Ständen die gegebenen Zahlen im Verhältnisse wie 2 : 3, so müßten sich auch die Zusätze in demselben Verhältnisse befinden. Da die

Digitized by Google

erste Zahl 48 und ihr Zusatz 26 ist, so müßte die zweite Zahl 72 und ihr Zusatz 39 sein. Nun ist die zweite Zahl 1896, also um 1824 zu groß, und ihr Zusatz ist 7, also um 32 zu klein nach dem gegebenen Verhältnisse; der Mangel muß also den Ueberschuß vernichten; daher geschieht das Hinzusetzen 1824 : 32 = 57 mal.

Aufl. 2. Die zweite Zahl ist 1896, ihr Zusatz 7, also müßte nach dem Verhältnisse die erste Zahl 1264 und ihr Zusatz $4\frac{2}{3}$ sein; die erste Zahl ist aber 48 und ihr Zusatz 26; also fehlen ihr 1216 und der Zusatz ist um $21\frac{1}{3}$ zu groß nach dem Verhältnisse. Der Ueberschuß des Zusatzes muß also den Mangel der Zahl ersetzen; also wird das Hinzusetzen $1216 : 21\frac{1}{3} =$ 57 mal wiederholt.

Nach diesen Auflösungen sind nachfolgende Aufgaben zu berechnen.

Man soll gleichzeitig 14 zu 58 und 8 zu 2520 hinzusetzen, bis die zweite Summe das 3fache der ersten werde; 27 zu 51 und 5 zu 3044 hinzusetzen, bis die erste Summe zur zweiten das Verhältniß von 3 : 4 habe; 35 zu 75 und 12 zu 3250 hinzusetzen, bis die erste Summe sich zur 2ten wie 5 : 7 verhalte ꝛc.; wie oft muß das Hinzusetzen geschehen?

Antw. 69, 96, 85 mal ꝛc.

In Hinsicht der Subtraktion hat man ähnliche Sätze wie bei der Addition.

Es ist	6 : 12 = 1 : 2	48 : 56 = 6 : 7	45 : 72 = 5 : 8
subtrahirt	2 : 4 = 1 : 2	36 : 42 = 6 : 7	15 : 24 = 5 : 8
so ist	4 : 8 = 1 : 2	so ist 12 : 14 = 6 : 7	so ist 30 : 48 = 5 : 8

Satz. Wenn man die Glieder eines Verhältnisses von den gleichnamigen Gliedern eines gleichen Verhältnisses hinwegnimmt, so erhält man ein den gegebenen gleiches Verhältniß. Oder: Das Verhältniß der Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder gleicher Verhältnisse ist gleich einem der gleichen Verhältnisse.

Aufgaben über diesen Satz.

Man hat die beiden Zahlen 39 und 221 und nimmt von der ersten 6 hinweg, so muß man welche Zahl von der zweiten hinwegnehmen, damit das Verhältniß der Reste gleich dem der gegebenen sei? Antw. 34.

Wie oft muß man 32 von 4596 hinwegnehmen, während man 13 von 2164 hinwegnimmt, bis beide Reste einander gleich werden?

Aufl. Wären die Zahlen einander gleich, so müßte man auch gleiche Zahlen hinwegnehmen, damit gleiche Reste blieben. Da nun die erste Zahl um 2432 größer als die andere, und die erste Wegnahme um 19 größer als die andere ist, so muß den Ueberschuß der Zahlen der Ueberschuß der Abnahmen vernichten; daher muß das Hinwegnehmen so oft geschehen, als 19 in 2432 enthalten ist, d. i. 128 mal.

Digitized by Google

Wie oft muß man 7 von 613 hinwegnehmen, eben so oft man 18 von 1262 hinweggenommt, bis beide Reste einander gleich werden?

Antw. 59 mal.

Man soll gleichzeitig 16 von 1172 und 80 von 5491 hinwegnehmen, bis die Reste in dem Verhältnisse von 4 : 11 stehen; wie oft muß das Hinwegnehmen geschehen?

Aufl. Ständen die gegebenen Zahlen im gegebenen Verhältnisse, so müßten auch ihre Abnahmen in demselben Verhältnisse sein, damit die Reste das gegebene Verhältniß zu einander hätten. Da nun die erste Zahl 1172 und ihre Abnahme 16 ist, so müßte die zweite Zahl 3223 und ihre Abnahme 44 sein. Nun ist die zweite Zahl 5491, und ihre Abnahme 80; daher ist die zweite Zahl um 2268 zu groß und ihre Abnahme um 36 zu groß nach dem Verhältnisse; daher muß der Ueberschuß der Abnahme den Ueberschuß der Zahl vernichten; folglich muß das Hinwegnehmen 2268 : 36 = 63 mal geschehen.

Man soll gleichzeitig 18 von 846 und 25 von 1195 hinwegnehmen, bis das Verhältniß der Reste gleich dem von 3 : 5 sei; wie oft muß man das Hinwegnehmen wiederholen? Antw. 43 mal.

Wenn man in der Rechnung von der ersten Zahl nach dem gegebenen Verhältnisse auf die zweite Zahl schließt, so wird man finden, daß die gefundene Zahl größer als die gegebene zweite Zahl ist, weil die zweite Abnahme nach dem Verh. 30 sein sollte, und nur 25 ist; daher schließe man von der zweiten auf die erste Zahl.

Nun kann man Hinzusetzen und Hinwegnehmen verbinden.

Welche Zahl muß man zu 36 hinzusetzen und von 144 hinwegnehmen, damit das Verhältniß der Summe zum Reste das Verhältniß von 1 : 2 habe?

Aufl. 1. Wenn man eine Zahl um Etwas vermehrt und die andere um Dasselbe vermindert, so ist die Summe der vermehrten und verminderten Zahl gleich der Summe der unveränderten Zahlen. Die vermehrte Zahl muß das Einfache, die verminderte das 2fache einer gewissen Zahl, also ihre Summe oder 36 + 144 = 180 das 3fache der gedachten Zahl sein; daher ist die einfache Zahl = 60; diese ist die vermehrte erste Zahl, und da die unvermehrte 36 beträgt, so ist der Zusatz 24.

Aufl. 2. Hätten die gegebenen Zahlen das gegebene Verhältniß 1 : 2, so müßte die zweite 72 sein, weil die erste 36 ist; nun ist die zweite 144, also um 72 nach dem Verhältnisse zu groß. Aber wenn das gegebene Verhältniß zwischen den Zahlen obwaltete, so müßte, da zur ersten eine gewisse Zahl hinzugesetzt wird, zur zweiten diese 2fache Zahl hinzukommen; das gedachte 2fache der Zahl kommt nicht allein nicht hinzu, sondern das Einfache derselben wird noch von der zweiten hinweggenommen, daher wird sie um das 3fache gedachter Zahl nach dem Verhältnisse vermindert, und dadurch wird der Ueberschuß von 72 vernichtet; also ist das 3fache gedachter Zahl

Digitized by Google

$= 72$; also die einfache $= 24$. Man muß also 24 zu 36 hinzusetzen und von 144 hinwegnehmen, so hat die Summe zum Reste das Verhältniß von 1 : 2.

Welche Zahl muß man zu 48 hinzusetzen und von 256 hinwegnehmen, damit die Summe sich zum Reste wie 1 : 3 verhalte? Antwort 28.

Welche Zahl muß man zu 20 hinzusetzen und von 100 hinwegnehmen, damit die Summe zum Reste sich wie 2 : 3 verhalte? Antwort 28.

Welche Zahl hat man zu 45 hinzuzusetzen und von 324 hinwegzunehmen, damit die Summe sich zum Reste wie 4 : 5 verhalte?

Aufl. Die Auflösung vermittelst der Summe der Zahlen ist eben so, wie oben gezeigt worden.

Hätten die Zahlen das Verhältniß wie 4 : 5, so müßte man zur ersten Zahl das 4fache und zur zweiten das 5fache derselben Zahl hinzusetzen, damit sie in demselben Verhältnisse beharrten; und da die erste 45 ist, so müßte die zweite $56\frac{1}{4}$ sein; nun ist sie 324, also um $267\frac{3}{4}$ nach Verhältniß zu groß. Nun kommt aber auch nicht das 5fache gedachter Zahl zu ihr hinzu, sondern sie wird noch um dasselbe Vielfache vermindert, um welches die erste vermehrt wird; daher wird sie nach Verhältniß um das 4fache und 5fache oder um das 9fache gedachter Zahl vermindert, und da dieses $267\frac{3}{4}$ verrichtet; so ist das 9fache gedachter Zahl $= 267\frac{3}{4}$; also ihr Einfaches $= 29\frac{3}{4}$; daher das 4fache $= 4 . 29\frac{3}{4} = 119$. Man muß also 119 zu 45 hinzusetzen und von 324 hinwegnehmen, damit die Summe zum Reste das Verhältniß von 4 : 5 habe.

Welche Zahl hat man zu 56 hinzuzusetzen und von 196 hinwegzunehmen, damit sich die Summe zum Reste wie 2 : 5, zu 50 zu addiren und von 210 zu subtrahiren, damit sich die Summe zum Reste wie 3 : 7, zu 92 zu addiren und von 276 zu subtrahiren, damit die Summe sich zum Reste wie 11 : 12, zu 224 zu addiren und von 384 zu subtrahiren, damit die Summe zum Rest sich wie 7 : 9 verhalte? ꝛc. Antwort 16, 28, 84, 42 ꝛc.

Man soll gleichzeitig 24 von 1068 hinwegnehmen und 2 zu 10 hinzusetzen, bis das Verhältniß der Summe zum Reste gleich dem von 3 : 8 werde; wie oft muß das Hinzusetzen und Hinwegnehmen geschehen?

Aufl. 1. Hätten die Zahlen das gegebene Verhältniß 3 : 8 zu einander, so müßte man auch Zahlen in demselben Verhältnisse entweder zu beiden hinzusetzen, oder von beiden hinwegnehmen. Da die erste Zahl 1068 und ihre Abnahme 24 ist, so müßte nach dem Verh. von 3 : 8, die zweite 2848 und ihre Abnahme 64 sein. Nun ist die zweite Zahl 10, also fehlen ihr zu dem Verh. 2838; von ihr wird aber auch nicht 64 subtrahirt, sondern 2 addirt, daher wächst sie stets um 66, während die erste Zahl um 24 abnimmt; dieser jedesmalige Zuwachs von 66 muß also den Mangel von 2838 ersetzen; daher muß obige Vermehrung und Verminderung so oft geschehen, als 66 in 2838 enthalten ist, d. i. 43 mal.

Digitized by Google

Aufl. 2. Ständen die Zahlen bereits in dem Verhältnisse von 3 : 8, so müßte man auch zu beiden Zahlen in demselben Verhältnisse hinzusetzen, damit die neuen Zahlen in demselben Verhältnisse beharrten. Da nun die zweite Zahl 10 und ihr Zusatz 2 ist, so müßte nach dem Verh. 3 : 8 die erste $3\frac{3}{4}$ und ihr Zusatz $\frac{3}{4}$ sein. Nun ist aber die erste Zahl 1068, also hat sie einen Ueberschuß von $1064\frac{1}{4}$, sie wächst aber auch nicht um $\frac{3}{4}$, sondern sie nimmt vielmehr um 24 ab; daher muß durch diese Verminderung der Ueberschuß über das Verhältniß vernichtet werden. Folglich muß das Hinwegnehmen und Hinzusetzen $1064\frac{1}{4} : 24\frac{3}{4} = 43$ mal geschehen.

Man soll gleichzeitig 7 zu 32 hinzusetzen und 5 von 976 hinwegnehmen, 8 zu 48 addiren und 9 von 1496 subtrahiren, 12 zu 84 addiren und 18 von 1302 subtrahiren, bis die Summe zum Reste sich wie 1 : 2 verhalte; wie oft hat man die Operationen zu vollführen?

Antw. 48, 56, 27 mal.

Verfahren zur Bildung von Aufgaben. Man wähle zunächst ein beliebiges Verhältniß, z. B. 3 : 4, und man wolle beide Zahlen vermehren; so nehme man für die erste ein Vielfaches von 3, etwa 24 und ihr Zusatz wieder ein Vielfaches von 3, etwa 15; nun bestimme man die Male des Hinzusetzens, z. B. 48 mal, so muß die erste Summe sein $24 + 48.15$, diese verhält sich zur zweiten Summe wie 3 : 4, daher ist die zweite Summe $4.8 + 4.16.15 = 992$. Nun wähle man eine solche Zahl als Zusatz der zweiten, deren 48faches kleiner als 992 ist; man wird finden, daß die Zahl kleiner als 20 sein muß, etwa 13, so ist $48.13 = 624$; daher ist die zweite Zahl $992 - 624 = 368$. Wollte man nicht ganze Zahlen haben, so könnte man alle nach Belieben wählen. Auf ähnliche Weise verfährt man für das Hinwegnehmen.

Will man hinzusetzen und hinwegnehmen, so wähle man wieder zunächst das Verhältniß, etwa 5 : 7, ferner die erste und ihr Zusatz Vielfache von 5, die erste etwa 50, ihr Zusatz 10, die Zahl der Operationen etwa 17; so wird die erste Summe $50 + 17.10$; daher muß der Rest $70 + 17.14 = 308$ sein. Nun wähle man die Abnahme, etwa 9, also $17.9 = 153$; daher die zweite Zahl $= 153 + 308 = 461$.

In Hinsicht der Multiplikation hat man folgenden Satz: **Wenn man von den Gliedern eines gegebenen Verhältnisses Gleichvielfache nimmt, so ist das Verhältniß der Gleichvielfachen gleich dem gegebenen Verhältnisse.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Erklärung gleicher Verhältnisse. Denn es sei das Verhältniß 15 : 20 gegeben; so ist $15 : 20 = 2.15 : 2.20 = 3.15 : 3.20 = 4.15 : 4.20 = 5.15 : 5.20$ ꝛc.

Denn 15 ist das 15fache von 1; 2.15 das 15fache von 2; 20 ist das 20fache von 1; 2.20 das 20fache von 2 ꝛc.; daher sind die Vorderglieder 15, 2.15 Gleichvielfache, jedes das 15fache, und auch die Hinter-

Digitized by Google

glieder 20, 2.20 Gleichvielfache, jedes das 20fache; folglich sind die Verhältnisse einander gleich.

Wenn man das eine Glied eines gegebenen Verhältnisses mit 7, 8, 9, 13 ꝛc. multiplicirt, mit welcher Zahl hat man das andere Glied zu vervielfachen, damit das Verhältniß der Produkte gleich dem gegebenen sei?

In welche zwei Zahlen muß man 24 theilen, damit die Produkte aus denselben und den Gliedern des Verhältnisses 3 : 5 dasselbe Verhältniß 3 : 5 zu einander haben? Antw. In 12 und 12.

In Rücksicht der Division hat man folgenden Satz: Wenn man die Glieder eines Verhältnisses durch ihr gemeines Maß mißt, so stehen die Maßzahlen im gegebenen Verhältnisse. Es ist $36 : 48 = \frac{36}{2} : \frac{48}{2} = 18 : 24 = \frac{36}{3} : \frac{48}{3} = 12 : 16 = \frac{36}{4} : \frac{48}{4} = 9 : 12 = \frac{36}{6} : \frac{48}{6} = 6 : 8 = \frac{36}{12} : \frac{48}{12} = 3 : 4$.

Man dividirt das eine Glied eines Verhältnisses durch 7, 9, 12, ꝛc. durch welche Zahl hat man das andere Glied zu dividiren, damit das Verhältniß der Quotienten gleich dem gegebenen sei?

Wenn die Vorderglieder gleicher Verhältnisse einander gleich sind, so müssen auch die Hinterglieder derselben einander gleich sein. Z. B. $8 : 12 = 8 : 12$. Sind die Vorderglieder gleicher Verhältnisse ungleich, so müssen auch die Hinterglieder einander ungleich sein, und zwar gehört zum größern Vorderglide ein größeres Hinterglied. Z. B. $3 : 5 = 6 : 10$; $14 : 16 = 21 : 24$; $27 : 30 = 36 : 40$; ꝛc.

F. Ueber Proportionen und deren Eigenschaften.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse. Daher ist $1 : 2 = 4 : 8$ eine Proportion.

Eine Proportion besteht aus wie vielen Verhältnissen? Wie sind die Verhältnisse einer Proportion beschaffen? Aus wie vielen Gliedern besteht eine Proportion? Wie viele Vorder-, wie viele Hinterglieder hat eine Proportion? Welche Glieder sind die äußern, welche die innern Glieder einer Proportion? Das erste und vierte Glied sind die äußern, das zweite und dritte Glied sind die innern oder mittlern Glieder einer Proportion.

1) Aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende Glied zu finden.

Es verhält sich 18 zu 27, wie sich 42 zu welcher Zahl verhält? Oder kurz $18 : 27 = 42 : x$; die gesuchte Zahl wird gewöhnlich mit x bezeichnet.

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 18 und 27 ist 9; 18 ist das 2fache, 27 das 3fache von 9; so muß auch im andern Verhältnisse das

Digitized by Google

Vorderglied das 2fache und das Hinterglied das 3fache einer gewissen Zahl sein. Nun ist das Vorderglied 42, dieses ist also das 2fache einer Zahl; daher ist diese Zahl $\frac{1}{2}$ von 42 oder 21; das Hinterglied ist das 3fache dieser Zahl, also ist es $3 . 21 = 63$. Folglich ist $18 : 27 = 42 : 63$.

1) $16 : 28 = 24 : x$. 6) $24 : 42 = 32 : x$. 11) $29 : 116 = 47 : x$.
2) $20 : 25 = 12 : x$. 7) $25 : 30 = 35 : x$. 12) $30 : 75 = 58 : x$.
3) $21 : 35 = 18 : x$. 8) $26 : 91 = 38 : x$. 13) $31 : 93 = 53 : x$.
4) $22 : 77 = 46 : x$. 9) $27 : 45 = 39 : x$. 14) $32 : 52 = 72 : x$.
5) $23 : 115 = 37 : x$. 10) $28 : 49 = 44 : x$. 15) $33 : 121 = 57 : x$.

x ist 42, 15, 30, 161, 185, 56, 42, 133, 95, 77, 188, 145, 159, 234, 209.

$34 : 85 = x : 125$.

Aufl. Das größte gemeine Maß zwischen 34 und 85 ist 17, 34 ist das 2fache, 85 das 5fache von 17; so muß auch im andern Verhältnisse das Vorderglied das 2fache und das Hinterglied das 5fache einer gewissen Zahl sein; nun ist das Hinterglied 125, dieses ist das 5fache einer Zahl, daher ist diese Zahl $\frac{1}{5}$ von 125 oder 25; das Vorderglied ist das 2fache derselben, daher ist es $2 . 25 = 50$; folglich ist $34 : 85 = 50 : 125$.

1) $35 : 42 = x : 54$. 4) $38 : 133 = x : 119$. 7) $41 : 123 = x : 159$.
2) $36 : 96 = x : 64$. 5) $39 : 65 = x : 120$. 8) $42 : 189 = x : 171$.
3) $37 : 222 = x : 102$. 6) $40 : 104 = x : 169$. 9) $43 : 172 = x : 268$.

x ist 45, 24, 17, 34, 72, 65, 53, 38, 67.

Das zweite Glied soll gesucht werden. Die Aufl. ist der ersten ähnlich.

1) $44 : x = 52 : 65$. 4) $48 : x = 78 : 91$. 7) $51 : x = 57 : 76$.
2) $45 : x = 27 : 39$. 5) $49 : x = 77 : 88$. 8) $52 : x = 84 : 105$.
3) $47 : x = 94 : 98$. 6) $50 : x = 72 : 108$. 9) $53 : x = 106 : 110$.

x ist 55, 65, 49, 56, 56, 75, 68, 65, 55.

Das erste Glied wird gesucht.

1) $x : 48 = 92 : 69$. 4) $x : 55 = 116 : 145$. 7) $x : 60 = 135 : 225$.
2) $x : 49 = 104 : 91$. 5) $x : 57 = 133 : 152$. 8) $x : 61 = 244 : 122$.
3) $x : 54 = 95 : 171$. 6) $x : 59 = 177 : 118$. 9) $x : 62 = 213 : 142$.

x ist 64, 56, 30, 44, $56\frac{7}{8}$, $88\frac{1}{2}$, 36, 122, 93.

2) Eigenschaften der Proportionen.

Man kehrt ein Verhältniß 3 : 4 um, wenn man setzt das Hinterglied zum Vorderliede, also 4 : 3; hat man 7 : 8, so ist umgekehrt 8 : 7.

Kehrt man jedes Verhältniß einer Proportion um, so erhält man wieder eine Proportion; oder durch Umkehrung leitet man eine Proportion aus einer andern ab; ist $7 : 8 = 14 : 16$, so ist auch $8 : 7 = 16 : 14$. Denn die Vorderglieder sind wieder Gleichvielfache, und auch die Hinterglieder sind Gleichvielfache.

Digitized by Google

Die Sätze, welche von gleichen Verhältnissen gelten, müssen auch auf Proportionen Anwendung finden, weil sie aus gleichen Verhältnissen bestehen; daher folgende Sätze.

Wenn man von den Gliedern eines oder beider Verhältnisse einer Proportion beliebige Gleichvielfache nimmt: so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. sei die gegebene Proportion $5:7=15:21$; so ist auch $5:7=30:42$, $25:35=15:21$, $45:63=105:147$, ꝛc.

Wenn man die Glieder eines oder beider Verhältnisse einer Proportion durch gleiche Zahlen mißt; so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. sei die gegebene Proportion $24:32=72:96$; so ist durch 2 gemessen $12:16=72:96$, $24:32=36:48$; durch 8 gemessen $3:4=72:96$, $24:32=9:12$, $3:4=9:12$; ꝛc.

Relative Primzahlen sind die kleinsten in einem Verhältnisse. Z. B. $7:9$; denn gäbe es noch zwei kleinere Zahlen in demselben Verhältnisse, so seien sie $A:B$, daher $7:9=A:B$; 7 und A sind also Gleichvielfache, 9 und B sind Gleichvielfache. Da nun 7 und 9 Primzahlen zu einander sind, so haben sie außer der Einheit kein anderes gemeine Maß; 7 ist das 7fache von 1, 9 ist das 9fache von 1; daher muß A das 7fache und B das 9fache einer gewissen Zahl sein. Diese Zahl ist entweder größer, eben so groß oder kleiner als Eins. Ist das Einfache größer als Eins, so ist das 7fache derselben größer als 7, das 9fache derselben Zahl größer als 9; also wären A, B nicht die kleinsten Zahlen, sondern es gäbe kleinere 7, 9, in demselben Verhältnisse; daher kann das Einfache nicht größer als Eins sein. Wäre das Einfache gleich Eins, so wäre das 7fache derselben $=7$, das 9fache derselben $=9$, also wären A, B wieder nicht kleiner als 7, 9. Endlich kann das Einfache kleiner als Eins sein; daher muß das Einfache ein echter Bruch sein. Weil nun A, B ganze Zahlen sein sollen, und A das 7fache dieses Bruches ist, so muß der Nenner dieses Bruches 7 sein. Aber B ist das 9fache dieses Bruches, und 9 nicht ein Vielfaches von 7, folglich wäre B ein Bruch; da A, B ganze Zahlen sein sollen, so können sie nicht kleiner als die relativen Primzahlen in demselben Verhältnisse sein.

Aus dem vorstehenden Satze folgt also: **Sind zwei Verhältnisse einander gleich und die Glieder des einen Verhältnisses sind Primzahlen zu einander, so sind die Glieder des andern Verhältnisses Gleichvielfache von den gleichnamigen Gliedern des ersten.** Z. B. $3:5=6:10=9:15=12:20$ ꝛc.; die Vorderglieder der andern Verhältnisse sind das 2-, 3-, 4fache ꝛc. von dem Vorderglied des ersten Verhältnisses; eben so sind die Hinterglieder der andern Verhältnisse das 2-, 3-, 4fache ꝛc. von dem Hinterglied des ersten Verhältnisses.

Wenn zwei Verhältnisse einander gleich und die Glieder jedes Verhältnisses Primzahlen zu einander sind, so müssen

Digitized by Google

die Vorderglieder unter einander und die Hinterglieder unter einander gleich sein. Z. B. $6:25=6:25$; $3:8=3:8$; ꝛc.

Wenn man die Glieder jedes zweier gleichen Verhältnisse durch ihr größtes gemeine Maß mißt, so werden die Maßzahlen der Glieder jedes Verhältnisses relative Primzahlen; daher sind dann die Vorder- und Hinterglieder dieser Verhältnisse einander gleich. Z. B. $8:14 = 24:42$; die Glieder des ersten Verhältnisses durch 2 gemessen $8:14=4:7$; die Glieder des andern durch 6 gemessen $24:42=4:7$ und $4=4$, $7=7$, ꝛc.

Wenn das Vorderglied in dem einen Verhältnisse einer Proportion größer, eben so groß, oder kleiner als sein Hinterglied ist, so muß auch im andern Verhältnisse das Vorderglied größer, eben so groß, oder kleiner als sein Hinterglied sein.

In dem Verhältnisse $36:30$ ist das Vorderglied größer als sein Hinterglied, und 36 ist das 6fache, 30 das 5fache von ihrem größten gemeinen Maße; daher muß auch im andern Verhältnisse das Vorderglied das 6fache und das Hinterglied das 5fache von ihrem größten gemeinen Maße sein. Ist nun das letzte Vorderglied 24, so ist es das 6fache von 4, sein Hinterglied ist nun das 5fache von derselben Zahl, daher ist es $5 . 4 = 20$, und $24 > 20$.

Die beiden andern Fälle werden eben so dargethan.

Wenn das Vorderglied des einen Verhältnisses einer Proportion größer, eben so groß, oder kleiner als das Vorderglied des andern Verhältnisses ist; so ist auch das Hinterglied des ersten Verhältnisses größer, eben so groß, oder kleiner als das Hinterglied des andern Verhältnisses.

Das erste Verhältniß einer Proportion sei $18:27$, so ist das größte gemeine Maß der Glieder desselben 9, und das Vorderglied ist das 2fache, das Hinterglied das 3fache von 9.

Da nun die Verhältnisse einer Proportion einander gleich sind, so muß auch das Vorderglied des andern Verhältnisses das 2fache und sein Hinterglied das 3fache von ihrem größten gemeinen Maße sein.

Das größte gemeine Maß der Glieder des zweiten Verhältnisses ist nun entweder eben so groß oder größer oder kleiner als das größte gemeine Maß der Glieder des ersten Verhältnisses.

Wenn das größte gemeine Maß der Glieder des zweiten Verhältnisses gleich dem des ersten ist, so muß es 9 sein, und dann ist das Vorderglied des zweiten Verhältnisses $2 . 9 = 18$, das Hinterglied $3 . 9 = 27$; es ist nun das Vorderglied des zweiten Verhältnisses $= 18 =$ dem Vordergliede des ersten Verhältnisses; und eben so sieht man, daß auch die Hinterglieder dieser Verhältnisse einander gleich sind.

Digitized by Google

Im Falle, daß das größte gemeine Maß der Glieder des andern Verhältnisses größer als das des ersten ist, sei es 10, so ist das Vorderglied $2 . 10 = 20$, das Hinterglied $3 . 10 = 30$; und es ist klar, daß die Glieder des ersten Verhältnisses kleiner als die gleichnamigen Glieder des andern Verhältnisses sind; denn $18 < 20$ und $27 < 30$.

Ist das gemeine Maß der Glieder des zweiten Verhältnisses kleiner als das des ersten, so sei es 8, folglich ist das Vorderglied $2 . 8 = 16$, das Hinterglied $3 . 8 = 24$; und $18 > 16$, $27 > 24$; also sind die Glieder des ersten Verhältnisses größer, als die gleichnamigen Glieder des andern Verhältnisses.

II. Schriftliche Behandlung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

A. Von den geometrischen Verhältnissen.

1) **Ein Verhältniß zweier Zahlen ist die Angabe der Bildung einer aus der andern vermittelst einer dritten Zahl.** Die Bildung geschieht vermöge einer der 4 Species; wird sie durch Addition oder Subtraktion ausgeführt, so heißt das Verhältniß der Zahlen ein arithmetisches, durch Multiplikation oder Division, so heißt es ein geometrisches Verhältniß. Da die Division als Multiplikation angesehen werden kann, so kann man ein geometrisches Verhältniß, wie folgt, definiren: **ein geometrisches Verhältniß zweier Zahlen ist ein solches, in welchem die eine aus der andern vermöge der Multiplikation mit einer dritten Zahl erzeugt wird.**

Die Zahlen, welche in ein Verhältniß zu einander gesetzt werden, heißen die **Glieder** desselben (Vorder- und Hinterglied).

Die Zahl, mit welcher man das eine Glied multiplicirt, um das andere hervorzubringen, heißt der **Verhältniß-Name, Verhältniß-Anzeiger,** auch **Verhältniß-Quotient.**

Da man nun sowohl das Vorderglied aus dem Hinterliede, als auch umgekehrt das Hinterglied aus dem Vördergliede ableiten kann, so muß man bestimmt erklären, welches von Beiden geschehen soll. Gewöhnlich bildet man das Hinterglied aus dem Vorderliede; daher stellen wir den Satz: **Das Hinterglied ist gleich dem Produkte aus dem Vorderliede und dem Verhältniß-Quotienten,** für die Folge als fest auf; und hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz: **Der Verhältniß-Quotient ist gleich dem Hintergliede, dividirt durch das Vorderglied;** und **Das Vorderglied ist gleich dem Hintergliede, dividirt durch den Verhältniß-Quotienten.**

Anmerk. Sind die Glieder eines Verhältnisses gegeben, und will man den Verhältniß-Anzeiger wissen, so findet man ihn durch Division des Hinterliedes mit

dem Vorderglede; daher ist der Verhältniß-Anzeiger eigentlich ein Quotient, und weil er in einem Verhältnisse berechnet wird, so ist er ein Verhältniß-Quotient; aus diesen Ursachen ziehe ich diese Benennung gedachter Zahl den übrigen vor; doch ist bekanntlich der Name eines Begriffes unwesentlich, die richtige Vorstellung von demselben Hauptsache; man wähle also nach Belieben einen der gebräuchlichen Namen; ich werde der Kürze wegen künftig Verhältniß-Quotient mit V.Q. bezeichnen.

2) Aus zwei gegebenen der drei Zahlen Vorderglied, Hinterglied und V.Q. kann man stets die dritte finden.

a) Die Glieder eines Verhältnisses sind gegeben, man sucht den V.Q. desselben.

Welches ist der V.Q. in folgenden Verhältnissen? 3 : 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20 ꝛc.

Da der V.Q. eines Verhältnisses stets gleich dem Hintergliede dividirt durch das Vorderglied ist, so ist der V.Q. in dem Verhältnisse 3 : 4, $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; 3 : 5, $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$; 3 : 6, $\frac{6}{3} = 2$, ꝛc.

In folgenden Verhältnissen 36 : 33, 30, 28, 27, 24, 21, 20, 18 ꝛc., den V.Q. zu berechnen.

Im Verhältnisse 36 : 33 ist der V.Q. $\frac{33}{36} = \frac{11}{12}$; 36 : 30 ist der V.Q. $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$; 36 : 28 ist der V.Q. $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$; ꝛc.

Man soll den V.Q. folgender Verhältnisse $\frac{1}{2}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. finden.

Der V.Q. des Verhältnisses $\frac{1}{2}$: 1 ist $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; $\frac{1}{2}$: 2, $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$, ꝛc.

In den Verhältnissen $\frac{3}{4}$: 9, $1\frac{3}{4}$: 10, 16 : $5\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{2}$: $2\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{5}$: $11\frac{1}{3}$, $9\frac{4}{5}$: $10\frac{8}{9}$, $5\frac{4}{6}$: $7\frac{7}{8}$, ist welches der V.Q.?

In dem Verhältnisse $\frac{3}{4}$: 9 ist der V.Q. $9 : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12$; $1\frac{3}{4}$: 10 ist der V.Q. $10 : \frac{4}{3} = \frac{10 \cdot 3}{4} = 6$; 16 : $5\frac{1}{3}$ ist der V.Q. $\frac{16}{3} : 16 = \frac{1}{3}$, ꝛc.

b) Das Vorderglied eines Verhältnisses und sein Verhältniß-Quotient sind gegeben, und man sucht das Hinterglied.

Wenn das Vorderglied eines Verhältnisses 8, 15, 19, 24, 38 ꝛc., und der V.Q. desselben 2, 3, 4, 5 ꝛc. ist; so ist welches das Hinterglied dieses Verhältnisses? Welches sind die Verhältnisse?

Das Hinterglied ist stets gleich dem Produkte aus dem Vorderglede und dem V.Q.; wenn daher das Vorderglied 8, 15, 19, 24, 38 ꝛc. und der V.Q. 2 ist, so ist das zugehörige Hinterglied $= 2 . 8 = 16$, $2 . 15 = 30$, $2 . 19 = 38$, $2 . 24 = 48$, $2 . 38 = 76$ ꝛc., und die Verhältnisse sind: 8 : 16, 15 : 30, 19 : 38, 24 : 48, 38 : 76, ꝛc.

Eben so bildet man die Hinterglieder und die Verhältnisse für die V.Q. 3, 4, 5 ꝛc.

Das Vorderglied eines Verhältnisses ist 9, $\frac{3}{5}$, $15\frac{4}{7}$ ꝛc., der V.Q. ist 2, $\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$ ꝛc., welches sind die entsprechenden Hinterglieder und die sich dadurch ergebenden Verhältnisse?

Digitized by Google

$9:2.9=9:18$; $\frac{1}{6}:2.\frac{1}{6}=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$; $15\frac{1}{7}:2.15\frac{1}{7}=15\frac{1}{7}:31\frac{1}{7}$; ꝛc.
$9:\frac{1}{4}.9=9:2\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}:\frac{1}{4}.\frac{1}{6}=\frac{1}{6}:\frac{3}{24}$; $15\frac{1}{7}:\frac{1}{4}.15\frac{1}{7}=15\frac{1}{7}:3\frac{13}{14}$; ꝛc.
$9:3\frac{1}{3}.9=9:30$; $\frac{1}{6}:3\frac{1}{3}.\frac{1}{6}=\frac{1}{6}:1\frac{1}{3}$; $15\frac{1}{7}:3\frac{1}{3}.15\frac{1}{7}=15\frac{1}{7}:52\frac{8}{21}$; ꝛc.

c) Das Hinterglied eines Verhältnisses und der Verhältniß-Quotient sind gegeben, man sucht das Vorderglied und das Verhältniß.

Das Hinterglied eines Verhältnisses ist 8, 24, 72, 144 ꝛc., der V.Q. ist 2, 3, 4 ꝛc., welches ist das Vorderglied und das Verhältniß?

Zu dem Hinterglieder 8, 24, 72, 144 ꝛc., nach dem V.Q. 2, gehört das Vorderglied $\frac{8}{2}=4$, $\frac{24}{2}=12$, $\frac{72}{2}=36$, $\frac{144}{2}=72$ ꝛc., und das Verhältniß ist 4:8, 12:24, 36:72, 72:144, ꝛc.

B. Von den geometrischen Proportionen.

Im Vorigen wurde jedes Verhältniß für sich, nicht in Vergleichung mit einander betrachtet, dieses soll nun geschehen. So wie zwei Zahlen, mit einander betrachtet, entweder gleich oder ungleich sein können; so können auch zwei Verhältnisse in Vergleichung mit einander entweder gleich oder ungleich sein.

Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Verhältniß-Quotienten einander gleich sind.

Hieraus ergiebt sich die Erklärung ungleicher Verhältnisse, sie sind nämlich solche, deren Verhältniß-Quotienten einander ungleich sind.

Anmerk. Die ungleichen Verhältnisse sind weder ohne Interesse, noch ohne Anwendung, sondern sie vereinigen Beides in sich, und vermittelst ihrer führt Archimedes, dieser scharfsinnigste Geometer des Alterthums, (Er starb 212 vor Christo, in der Einnahme von Syrakus durch die Römer, durch einen rohen Krieger), die sinnreichsten Beweise in seinen zwei Büchern über Cylinder, Kegel und Kugel. In diesem Buche finden sie aber keine Anwendung, und daher will ich sie übergehen.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse.

Welche von folgenden Verhältnissen 2:4, 3:5, 8:9, 10:11, 12:13, 14:28, 30:33, 24:26, 27:45, 32:36 sind einander gleich und bilden daher eine Proportion?

Es ist $2:4=14:28$, $3:5=27:45$, $8:9=32:36$, $10:11=30:33$, $12:13=24:26$.

Denn zwei Verhältnisse sind nur dann einander gleich, wenn ihre Verhältniß-Quotienten einander gleich sind. Der V.Q. des Verh. 2:4 ist 2, der V.Q. des Verh. 14:28 ist auch 2, da nun $2=2$ ist, so sind ihre V.Q. einander gleich, folglich sind auch die Verhältnisse selbst unter einander gleich.

Eben so wird der Beweis für die Gleichheit der übrigen Verhältnisse geführt.

Die obige Darstellung der gleichen Verhältnisse ist zugleich diejenige der Proportionen.

Digitized by Google

Wenn jedes zweier Verhältnisse einem dritten gleich ist, so sind sie unter einander gleich.

Es ist $15:12=5:4$, auch ist $25:20=5:4$; daher ist $15:12=25:20$.

Jedes der Verhältnisse $27:36$, $21:28$ ist dem Verhältnisse $3:4$ gleich; daher ist $27:36=21:28$.

Wenn man die Glieder eines Verhältnisses durch gleiche Zahlen multiplicirt, so bekommt man ein Verhältniß, das dem gegebenen gleich ist.

Wenn man die Glieder des Verhältnisses $8:9$ z. B. mit 2, oder 3, oder 4 ꝛc. multiplicirt, so erhält man das Verhältniß $16:18$, oder $24:27$, oder $32:36$, ꝛc. Will man nun wissen, ob diese Verhältnisse einander gleich sind, so muß man ihre V.Q. suchen und sie mit einander vergleichen. Der V.Q. des Verhältnisses $8:9$ ist $\frac{8}{9}=1\frac{1}{9}$; der V.Q. des Verh. $16:18$ ist $\frac{16}{18}=1\frac{1}{9}$; da nun diese V.Q. einander gleich sind, so müssen solches auch die Verhältnisse sein; folglich ist $8:9=16:18$.

Eben so kann man jeden besondern Fall erweisen.

Wenn man die Glieder eines Verhältnisses durch gleiche Zahlen dividirt, so ergiebt sich dadurch ein Verhältniß, das dem gegebenen gleich ist.

Wenn man die Glieder des Verhältnisses $18:24$ durch 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. dividirt, so erhält man die Verhältnisse $9:12$, $6:8$, $4\frac{1}{2}:6$, $3\frac{3}{5}:4\frac{4}{5}$, $3:4$, ꝛc.

Sucht man nun die Verhältniß-Quotienten des gegebenen und der abgeleiteten Verhältnisse, so erhält man $\frac{24}{18}=1\frac{1}{3}$, $\frac{12}{9}=1\frac{1}{3}$, $\frac{8}{6}=1\frac{1}{3}$, $\frac{6}{4\frac{1}{2}}=\frac{12}{9}=1\frac{1}{3}$, $\frac{4\frac{4}{5}}{3\frac{3}{5}}=\frac{24}{18}=1\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ ꝛc., welche alle unter einander gleich sind; daher sind auch alle Verhältnisse, das gegebene und die abgeleiteten, unter einander gleich; daher $18:24=9:12=6:8=4\frac{1}{2}:6=3\frac{3}{5}:4\frac{4}{5}=3:4$, ꝛc.

Wenn man mehrere Verhältnisse hat, so heißen die Vorderglieder derselben gleichnamige und auch die Hinterglieder derselben gleichnamige Glieder.

Das Verhältniß der Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder gleicher Verhältnisse ist gleich einem der gleichen Verhältnisse, oder die gleichnamigen Glieder gleicher Verhältnisse addirt, geben ein Verhältniß, das einem der gleichen Verhältnisse gleich ist.

Es ist $5:6=10:12=15:18=20:24=25:30=30:36$, so ist auch $(5+10+15+20+25+30):(6+12+18+24+30+36)=5:6=$ ꝛc. Denn die erste Summe ist 105, die andere 126; daher ist $105:126=5:6$.

Digitized by Google

Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier gleichen Verhältnisse von einander subtrahirt, so erhält man ein Verhältniß, das jedem der gleichen Verhältnisse gleich ist.

Weil $8:13=40:65$, so ist auch $(40-8):(65-13)=8:13$; denn $(40-8):(65-13)=32:52$; nun ist der W.O. dieses Verhältnisses $\frac{32}{52}=1\frac{8}{13}$, derselbe ergiebt sich für die gegebenen gleichen Verhältnisse; daher ist die Gleichheit erwiesen.

Anmerk. Die vorstehenden Sätze sind durch die angeführten Beispiele eigentlich nicht streng mathematisch erwiesen, sondern nur bestätigt und verdeutlicht; auf dieser Stufe der Geistesbildung der Schüler aber ist nicht derjenige Grad des Scharfsinns im Allgemeinen zu erwarten, welcher fähig wäre, einen mathematischen Beweis zu fassen; und der Lehrer muß zufrieden sein, wenn die Schüler nur die Sätze, ihre Erläuterungen und die Anwendung derselben begriffen haben. Die Richtigkeit dieser Sätze gründet sich auf den Satz, daß Zähler und Nenner eines gegebenen Bruches durch gleiche Zahlen dividirt, einen Bruch giebt, der dem gegebenen gleich ist. Die Richtigkeit dieses Satzes gründet sich aber wieder auf welchen? Er gründet sich auf die Lehre von den Vielfachen und besonders der Gleichvielfachen; diese hat den Grund ihrer Richtigkeit in sich selbst, und wer in die Lehre von den Gleichvielfachen nicht eindringen will, dem bleibt das wahre Wesen arithmetischer Beweise über Proportionalitäten verschlossen. Die sogenannten Beweise dieser Sätze durch Buchstaben sind oberflächlich und nur scheinbar gründlich; denn diese setzen wieder die Lehre von den Vielfachen voraus. Man lese das 7te Buch der Euklidischen Elemente, so wird man die Wahrheit erkennen. Es ist merkwürdig, daß in Schulen gerade diejenigen Bücher der Elemente des Euklides, welche über Arithmetik handeln, übergangen, und nur diejenigen, welche über Geometrie sich verbreiten, hervorgehoben werden. Der wahre Grund dieser Erscheinung ist die Buchstabenrechnung, welche die meisten Menschen durch ihre Symbolik verblendet — man kann mit Wahrheit sagen: je mehr Zeichen, je weniger Gedanken — je mehr Schreiberei, je weniger Ideenreichthum und je weniger Scharfsinn; das zeigen uns die Geister des greisen Alterthums.

Wenn man die Produkte der gleichnamigen Glieder mehrerer Verhältnisse zu einander in Verhältniß setzt, so nennt man dieses ein aus jenen zusammengesetztes Verhältniß.

Die gegebenen Verhältnisse seien $2:3$, $5:6$, $8:9$; so ist das aus diesen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß $(2.5.8):(3.6.9)=80:162=40:81$

Proportionen werden zusammengesetzt, wenn man ihre Verhältnisse zusammensetzt.

Gegebene Verhältnisse, welche nicht aus andern Verhältnissen zusammengesetzt sind, heißen einfache Verhältnisse. Eben so sind einfache Proportionen diejenigen, deren Verhältnisse einfache Verhältnisse sind.

Zunächst soll nun über einfache und dann über zusammengesetzte Proportionen gehandelt werden. Das Vorstehende sind nothwendige allgemeine Sätze über gleiche Verhältnisse.

Digitized by Google

1) Einfache Proportionen.

Die Erklärung gleicher Verhältnisse und Sätze über dieselben, wie auch die Erklärung der Proportionen im Allgemeinen, der einfachen und zusammengesetzten im Besondern ist im Vorhergehenden schon enthalten; daher gehe ich gleich zur Berechnung der fehlenden Glieder einer Proportion über.

a) Aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende Glied zu berechnen.

I. Die 3 ersten Glieder einer Proportion sind gegeben und man soll das vierte Glied durch Rechnung finden.

Sei $28 : 42 = 36 : x$. Da eine Proportion die Gleichheit zweier Verhältnisse ist, so sind sie einander gleich; folglich sind auch ihre V.O. einander gleich. Weil nun der V.O. des ersten Verhältnisses $\frac{28}{42} = \frac{2}{3}$ ist, so muß auch der V.O. des andern Verhältnisses $\frac{2}{3}$ sein. In diesem Verhältnisse ist nun das Hinterglied zu berechnen; dieses ist aber stets das Produkt aus seinem Vorderglied und dem Verhältniß-Quotienten; daher ist $x = 36 . \frac{2}{3} = 54$, und daher ist die Proportion $28 : 42 = 36 : 54$.

Durch dieselbe Schlußfolge wird das vierte Glied folgender Proportionen $8 : 9 = 3 : A = 3\frac{3}{8}$; $7 : 13 = 14 : B = 26$; $9 : 15 = 21 : C = 35$ berechnet.

II. Das erste, zweite und vierte Glied einer Proportion sind gegeben, und man sucht das dritte Glied derselben.

$25 : 30 = D : 48$. Da die Verhältnisse einer Proportion einander gleich sind, so müssen solches auch ihre V.O. sein; der V.O. des ersten Verhältnisses ist $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$, also ist der V.O. auch des andern Verhältnisses $\frac{5}{6}$. In diesem Verhältnisse ist das Vorderglied zu berechnen; das Vorderglied ist aber stets gleich seinem Hinterglied dividirt durch den V.O.; also ist $D = 48 : \frac{5}{6} = \frac{48 . 6}{5} = 40$; folglich ist die Proportion $25 : 30 = 40 : 48$.

In gleicher Weise findet man das dritte Glied folgender Proportionen: $32 : 36 = E : 54$; $45 : 49 = F : 147$; $51 : 68 = G : 104$. Es ist $E = 48$; $F = 135$; $G = 78$.

III. In einer Proportion sind das erste, dritte und vierte Glied gegeben, und man soll das zweite berechnen.

$33 : H = 55 : 66$. Die Auflösung dieser Aufgabe ist dieselbe wie in I., daher kann sie verkürzt werden. Der V.O. des zweiten Verhältnisses ist $\frac{66}{55} = \frac{6}{5}$; daher $H = 33 . \frac{6}{5} = 39\frac{3}{5}$; also ist die Proportion $33 : 39\frac{3}{5} = 55 : 66$.

Sei $38 : I = 114 : 84$; $45 : K = 85 : 119$; $56 : L = 91 : 65$. Folglich $I = 28$; $K = 63$; $L = 40$.

IV. Das zweite, dritte und vierte Glied einer Proportion sind gegeben und man sucht das erste Glied derselben.

Digitized by Google

M : 46 = 115 : 207. Die Auflösung dieser Aufgabe ist der unter II. ganz ähnlich und sie kann daher kurz so gegeben werden: der V.Q. des zweiten Verhältnisses ist $\frac{207}{115} = \frac{9}{5}$; daher ist $M = 46 : \frac{9}{5} = \frac{46 \cdot 5}{9} = 25\frac{5}{9}$; also $25\frac{5}{9} : 46 = 115 : 207$.

Sei N : 78 = 98 : 78; 0 : 87 = 35 : 145; P : 117 = 221 : 936. Folglich N = 98; 0 = 21; P = $27\frac{3}{4}$.

Später wird noch ein anderes Verfahren ermittelt werden, aus 3 gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende zu berechnen.

b) Die vorzüglichen Eigenschaften der Proportionen bestehen darin,

I. daß die Proportionalität nicht verletzt wird, wenn man die Glieder eines oder beider Verhältnisse oder die gleichnamigen Glieder derselben mit gleichen Zahlen multiplicirt, oder dividirt.

Dieser Satz dient besonders dazu, Brüche aus den Gliedern und das gemeine Maß derselben wegzuschaffen; jenes um ganze, dieses um kleine Zahlen zur Rechnung zu erhalten. Z. B.

$7\frac{1}{2} : 10 = 36 : 48$. Man multiplicire die Glieder des ersten Verhältnisses durch 2, so erhält man 15 : 20 = 36 : 48.

$5\frac{1}{4} : 6\frac{2}{3} = A : B$; die Glieder des ersten Verhältnisses multiplicire man durch das Produkt der Nenner, also durch 21, so erhält man 112 : 144 = A : B, und dividirt man nun dieselben Glieder durch ihr größtes gemeine Maß 16, so ist 7 : 9 = A : B.

$5\frac{1}{4} : C = 5\frac{1}{7} : D$. Man multiplicire die Vorderglieder durch das Produkt ihrer Nenner 35, so ist 196 : C = 180 : D, und dieselben Glieder durch ihr größtes gemeine Maß 4 dividirt, giebt 49 : C = 45 : D.

II. daß man durch Umkehrung der Verhältnisse einer Proportion die Proportionalität nicht stört. Z. B.

8 : 12 = 16 : 24, umgekehrt 12 : 8 = 24 : 16.

III. daß durch Verwechselung der Glieder einer Proportion die Proportionalität nicht aufgehoben wird.

Glieder einer Proportion verwechseln heißt, die Vorderglieder zu einander und die Hinterglieder zu einander in Verhältniß setzen.

Ist 9 : 15 = 18 : 30, so ist verwechselt 9 : 18 = 15 : 30.

Da das Hinterglied eines Verhältnisses stets gleich dem Produkte aus seinem Vorderglied und dem V.Q. ist, so kann man eine Proportion so schreiben:

Vorderglied : Vorderglied mal V.Q. = Vorderglied : Vorderglied mal V.Q. und diese Proportion durch Verwechselung der Glieder verändert

Vorderglied : Vorderglied = Vorderglied mal V.Q. : Vorderglied mal V.Q.

Nun hat man zu untersuchen, ob die Verhältniß-Quotienten dieser Verhältnisse wirklich einander gleich sind. Der V.Q. des ersten Verhältnisses ist

Digitized by Google

$= \frac{\text{Vorderglied}}{\text{Vorderglied}}$; der Verhältniß-Quotient des andern Verhältnisses ist $=$ $\frac{\text{Vorderglied mal V.Q.}}{\text{Vorderglied mal V.Q.}} = \frac{\text{Vorderglied}}{\text{Vorderglied}}$, weil der V.Q. durch Division des Zählers und Nenners durch den V.Q., verschwindet; hieraus geht die Gleichheit der V.Q. hervor; jeder ist nämlich das zweite durch das erste Vorderglied dividirt; also sind die Verhältnisse einander gleich, und bilden daher eine Proportion.

IV. daß die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu seinem Vorder- oder Hinterglied dasselbe Verhältniß hat, welches die Summe der Glieder des andern Verhältnisses zu seinem Vorder- oder Hinterglied hat.

Wenn $5 : 10 = 7 : 14$, so ist auch $5+10 : \left\{\begin{matrix}5\\10\end{matrix}\right\} = 7+14 : \left\{\begin{matrix}7\\14\end{matrix}\right\}$

oder $15 : 5 = 21 : 7$ und $15 : 10 = 21 : 14$.

In jedem Falle überzeugt man sich von der Wahrheit des Satzes durch den Nachweis der Gleichheit der V.Q.

Dieser Satz bietet ein vortreffliches Mittel zur Berechnung interessanter Aufgaben dar, nämlich aller derjenigen, in welchen eine Zahl oder überhaupt eine Größe nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden soll.

Z. B. Man soll 72 so in zwei Theile theilen, daß sich dieselben wie $5 : 7$ verhalten; welches sind die Theile?

Man bezeichne die Theile der Kürze wegen mit A und B, so ist $5 : 7 = A : B$, und nach Satz IV. ist also

$5+7 : 5 = A+B : A$ und $5+7 : 7 = A+B : B$;

nun ist $5+7 = 12$, $A+B = 72$; diese Werthe in die letzten Proportionen gesetzt, giebt $12 : 5 = 72 : A$ und $12 : 7 = 72 : B$; aus ihnen folgt nun $A = 30$ und $B = 42$.

Theilt man auf eben dieselbe Weise 78, 104, 143, nach dem Verhältnisse von $6 : 7$ in 2 Theile, so erhält man als Theile dieser Zahlen 36 und 42; 48 und 56; 66 und 77.

V. daß die Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zum Vorder- oder Hinterglied dasselbe Verhältniß hat, welches die Differenz der Glieder des andern Verhältnisses zu seinem Vorder- oder Hinterglied hat.

Wenn $8 : 12 = 18 : 27$ ist, so ist auch

$(12-8) : \left\{\begin{matrix}8\\12\end{matrix}\right\} = (27-18) : \left\{\begin{matrix}18\\27\end{matrix}\right\}$ oder $4 : \left\{\begin{matrix}8\\12\end{matrix}\right\} = 9 : \left\{\begin{matrix}18\\27\end{matrix}\right\}$, also

$4 : 8 = 9 : 18$ und $4 : 12 = 9 : 27$.

Z. B. Die Differenz zweier Zahlen ist 63, ihr Verhältniß $5 : 8$, welches sind die Zahlen?

Die gesuchten seien A und B, so ist $5 : 8 = A : B$, daraus folgt $8-5 : 5 = B-A : A$ und $8-5 : 8 = B-A : B$.

Digitized by Google

Weil nun $8 - 5 = 3$ und $B - A = 63$ sein soll, so verwandeln sich vorstehende Proportionen in folgende $3 : 5 = 63 : A$ und $3 : 8 = 63 : B$, daher $A = 105$ und $B = 168$.

Ist die Differenz zweier Zahlen 84, und ihr Verhältniß $7 : 9$, oder $8 : 11$, oder $9 : 13$, oder $11 : 17$, oder $12 : 19$, ꝛc.; so sind die Zahlen nach obigem Verfahren berechnet 294 und 378; 224 und 308; 189 und 273; 154 und 238; 144 und 228; ꝛc.

VI. daß die Summe zur Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses dasselbe Verhältniß, welches die Summe zur Differenz der Glieder des andern Verhältnisses hat.

Es ist $9 : 13 = 18 : 26$, so ist auch $(13 + 9) : (13 - 9) = (26 + 18) : (26 - 18)$ oder $22 : 4 = 44 : 8$.

Anmerk. Den zweiten Satz nennt man eine Proportion aus einer andern durch Umkehrung (invertendo), den IIIten eine Proportion aus einer andern durch Verwechselung (permutando), den IVten eine Proportion aus einer andern durch Verbindung (componendo), den Vten eine Proportion aus einer andern durch Trennung (dividendo) und den VIten eine Proportion durch Verbindung und Trennung (componendo et dividendo) ableiten.

VII. daß das Produkt der äußern Glieder einer Proportion stets gleich dem Produkte der innern ist.

Nach dem Vorhergehenden kann man eine Proportion stets so schreiben: Vorderglied : Vorderglied mal V.D. = Vorderglied : Vorderglied mal V.D. Das Produkt der äußern Glieder ist nun:

Vorderglied mal Vorderglied mal V.D.,

das Produkt der innern Glieder ist:

Vorderglied mal V.D. mal Vorderglied;

nun wird man leicht die Gleichheit beider Produkte bemerken, wenn man sich erinnert, daß man stets gleiche Produkte erhält, wenn man dieselben Zahlen in beliebiger Ordnung mit einander multiplicirt; daher ist die Behauptung des VIIten Satzes wahr. An einzelnen Beispielen wird man den Satz bestätigt finden, und ich will ihn sofort zur Berechnung des fehlenden Gliedes einer Proportion in Anwendung bringen.

a) Es ist $15 : 17 = 45 : A$.

Nach vorstehendem Satze ist $15 . A = 17 . 45$. Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, daß das Produkt zweier Zahlen durch die eine derselben dividirt, zum Quotienten die andere giebt; daher ist $\frac{15 . A}{15} = A$; ferner wenn man Gleiches durch Gleiches dividirt, so erhält man Gleiches; folglich $\frac{15 . A}{15} = \frac{17 . 45}{15}$, und weil der erste Quotient A, der andere 51 ist, so ist $A = 51$.

Digitized by Google

Aus diesem Beweise ergiebt sich der Satz:

das vierte Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden innern dividirt durch das erste Glied.

b) Es sei $16 : 19 = B : 95$;

so folgt daraus $19 . B = 16 . 95$, und wenn man dieselben obigen Schlüsse verfolgt, so gelangt man auf $\frac{19 . B}{19} = \frac{16 . 95}{19}$ und auf $B = 80$.

Daher der Satz: Das dritte Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden äußern dividirt durch das zweite Glied.

c) Wenn ist $14 : C = 22 : 33$;

so ist $22 . C = 14 . 33$, also $C = \frac{14 . 33}{22} = 21$.

Allgemeiner Satz: Das zweite Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden äußern dividirt durch das dritte Glied.

d) Sei $D : 36 = 84 : 96$;

so ist $96 . D = 36 . 84$, also $D = \frac{36 . 84}{96} = 31\frac{1}{2}$.

Allgemeiner Satz: Das erste Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden mittlern dividirt durch das vierte Glied.

Die Sätze unter a) und d) kann man mit folgendem einzigen ausdrücken: Ein äußeres Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden innern dividirt durch das andere äußere Glied.

Die Sätze unter b) und c) lauten in einem: Ein inneres Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden äußern dividirt durch das andere innere Glied.

Anmerk. Der VIIte Satz bildet die Grundlage der sogenannten Regel de tri oder Regeldetri; durch dieselbe wird gewöhnlich nur das 4te Glied einer Proportion zu berechnen gelehrt; es ist aber aus dem Vorstehenden klar, daß man jedes Glied einer Proportion nicht allein berechnen könne, sondern es auch als gleichgültig anzusehen habe, in welchem Gliede die gesuchte Zahl stehe; und Lehrer werden hierin ihren Schülern wohlthun, wenn sie dieselben anhalten, jedes Glied einer Proportion zu berechnen, damit sie mehrseitig und nicht einseitig gebildet werden.

Durch Umkehrung des Satzes VII. gelangt man zu folgendem VIIIten Satze: Wenn zwei Produkte einander gleich sind, so kann man die Faktoren des einen Produkts zu äußeren und die des andern zu inneren Gliedern einer Proportion machen.

Denn es ist $2 . 6 = 3 . 4 = 12$; man mache nun die Faktoren 2 und 6 des ersten Produkts zu äußeren, und die Faktoren des andern Produkts $3 . 4$ zu inneren Gliedern einer Proportion, so ist

$$2 : 3 = 4 : 6 \text{ oder } 2 : 4 = 3 : 6.$$

Digitized by Google

Diesen Satz drückt man auch so aus: Die Faktoren zweier gleichen Produkte stehen in wiederkehrenden Verhältnissen.

Da $3 . 8 = 4 . 6$, so ist $3 : 6 = 4 : 8$.

Dieser Satz findet im praktischen Rechnen häufige Anwendung.

2) Zusammengesetzte Proportionen.

Schon im Vorhergehenden wurde der Zusammensetzung der Verhältnisse und Proportionen erwähnt, und was hier noch darüber gesagt wird, ist als eine genauere Auseinandersetzung jener allgemeinen Definition anzusehen. (Fig. 1.)

Die Gerade AB verhalte sich zur Geraden CD wie $2 : 3$, so muß AB zwei gleiche Theile $Aa = aB$, und CD 3 eben so großer gleicher Theile $Cb = bc = cD$ haben, und daher ist AB das 2fache von einem der Theile Aa und CD das 3fache von einem der 3 gleichen Theile Cb; oder es ist $CD = 1\frac{1}{2}$ mal AB; denn $Cb = Aa$, $bc = aB$, also $Cc = AB$ und $cD = Aa = \frac{1}{2} AB$.

Ferner sei $CD : EF = 4 : 5$, so theile CD in 4 und EF in 5 gleiche Theile; also $Cd = de = ef = fD$ und $Eg = gh = hi = ik = kF$, und einer der Theile von CD, z. B. Cd, muß gleich einem der Theile von EF, z. B. Eg, sein.

Da nun $Cd = \frac{1}{4}$ von CD, und $Cb = \frac{1}{3}$ von CD ist, so ist $db = Cb - Cd = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ von CD; also wird CD in 12 gleiche Theile getheilt; dieses zu erreichen, theile man entweder jeden der 3 gleichen Theile Cb, bc, cD in 4, oder jeden der 4 gleichen Theile Cd, de, ef, fD in 3 gleiche Theile.

Da nun CD 12 Theile hat, so untersuche man jetzt, wie viele eben so großer Theile AB und EF haben müssen.

Es ist $Aa = aB = Cb$, und weil Cb 4 Theile hat, so muß auch Aa wie auch aB 4 eben so großer, also AB 8 solcher Theile haben.

Jeder der 5 gleichen Theile der EF, wie Eg, ist gleich einem der 4 gleichen Theile der CD, z. B. Cd, und da Cd 3 gleiche Theile hat, so muß auch Eg 3 gleiche Theile haben, also hat EF $5 . 3$ oder 15 gleiche Theile.

Daher ist $AB : CD = 2 : 3 = 2 . 4 : 3 . 4 = 8 : 12$; und $CD : EF = 4 : 5 = 4 . 3 : 5 . 3 = 12 : 15$.

Da ferner AB 8 und EF 15 eben solcher Theile hat, so verhält sich $AB : EF = 8 : 15$.

Das Verhältniß von $AB : EF$ ist nun aus dem Verhältnisse von $AB : CD$, und aus dem von $CD : EF$, also aus $2 : 3$ und $4 : 5$, zusammengesetzt; daher $8 : 15 = (2 : 3) + (4 : 5)$ oder $= \left\{\begin{matrix} 2 : 3 \\ 4 : 5 \end{matrix}\right\} = 2 . 4 : 3 . 5$.

Nämlich das Verhältniß von $AB : EF$ zu ermitteln, muß man CD in solche Theile theilen, welche sowohl Maße der AB als auch der EF sind, oder von welchen sowohl AB als auch EF Vielfache sind, und dieses wird

Digitized by Google

durch folgende Zusammenstellung klar veranschaulicht:

es ist $AB : CD = 2 : 3 = 2.4 : 3.4$,

$CD : EF = 4 : 5 = 3.4 : 3.5$.

Daher erhält man das aus beiden gegebenen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß, wenn man das Produkt der Vorderglieder zum Produkte der Hinterglieder der gegebenen Verhältnisse zu einander in Verhältniß setzt.

Ist dem zufolge $P : Q = 4 : 5$ und $Q : R = 6 : 7$, so setzt man

$P : Q = 4 : 5 = 4.6 : 5.6$

$Q : R = 6 : 7 = 6.5 : 7.5$; daher ist

$$P : R = 4.6 : 7.5 = \left\{\begin{matrix}4:5\\6:7\end{matrix}\right\} = 24 : 35.$$

Auf eben die Weise setzt man auch mehr als zwei Verhältnisse zusammen. Wäre $A : B = 2 : 3$;

$B : C = 4 : 5$;

$C : D = 6 : 7$;

$D : E = 8 : 9$;

$E : F = 10 : 11$;

so folgt aus der Zusammensetzung zweier Verhältnisse:

$A : C = 8 : 15$; $B : D = 24 : 35$; $C : E = 48 : 63$;

$D : F = 80 : 99$; dreier Verhältnisse:

$A : D = 2.4.6 : 3.5.7 = 48 : 105$;

$B : E = 4.6.8 : 5.7.9 = 192 : 315$;

$C : F = 6.8.10 : 7.9.11 = 480 : 693$; vierer Verhältnisse:

$A : D = 2.4.6.8 : 3.5.7.9 = 384 : 945$;

$B : F = 4.6.8.10 : 5.7.9.11 = 1920 : 3465$; fünfer Verh.:

$A : F = 2.4.6.8.10 : 3.5.7.9.11 = 3840 : 10395$.

Diese Zusammensetzungen sind aber nicht bloßer Verhältnisse, sondern eigentlicher Proportionen, die so beschaffen sind, daß in ihren ersten Verhältnissen das Hinterglied der einen Proportion gleich dem Vorderglieds der folgenden Proportion ist; und man wird aus der ganzen Darstellung leicht und deutlich einsehen, daß das gemeinschaftliche Glied in der Zusammensetzung zweier Proportionen, die beiden gemeinschaftlichen Glieder in der Zusammensetzung dreier Proportionen ꝛc. aus der Rechnung geht; alle gemeinen Glieder dieser Proportionen werden also in ihrer Zusammensetzung übergangen, und man bildet nur die Produkte der gleichnamigen Glieder in den andern Verhältnissen.

Aber auch in den zweiten Verhältnissen darf man nicht nur nicht, sondern muß zur Erleichterung der Rechnung die gemeinen Faktoren (Maße) aus der Rechnung lassen; denn hat man sie in Rechnung gebracht, so muß man sie wieder durch Division herausschaffen. Um dieses an einem Beispiele deutlich zu machen, nehme ich die letzte Proportion $A : F = 2.4.6.8.10 : 3.5.7.9.11$

Digitized by Google

$= 3840 : 10\,395$. In dem Vorder- und Hintergliede wird man die gemeinen Faktoren 3 und 5 bemerken; die Glieder durch dieselben dividirt, giebt $A : F = 2.4.2.8.2 : 7.9 \cdot 11 = 256 : 693$. Und es ist nicht nothwendig, daß die gemeinen Faktoren in Gliedern sich befinden, die zu einem und demselben Verhältnisse gehören, sondern sie können auch verschiedenen Verhältnissen angehören, wenn die Verhältnisse nur zur Zusammensetzung gebraucht werden, und der eine der gemeinen Faktoren sich in einem Vorder- und der andere, ihm gleiche, sich in einem Hintergliede befindet. Zur Verdeutlichung noch ein Beispiel. Folgende 3 Proportionen sollen zusammengesetzt werden:

$P : Q = 24 : 35$;
$Q : R = 42 : 65$;
$R : S = 91 : 96$.

Man kann hier gleich 24 und 96 durch 24, 42 und 35 durch 7, 91 und 65 durch 13 dividiren, und dann erhält man

$$P : S = \left\{\begin{matrix} 1 : 5 \\ 6 : 5 \\ 7 : 4 \end{matrix}\right\} = 21 : 50;$$

wenn man nämlich 6 und 4 noch durch 2 dividirt. Dieser Satz wird, meiner Meinung nach, klar sein; und ich bemerke nur noch, daß Proportionen solcher Art, in denen nämlich immer ein Hinterglied der einen Proportion gleich einem Vorderglied der folgenden ist, nicht unpassend Kettenproportionen genannt werden könnten.

Nun gehe ich zur Zusammensetzung solcher Proportionen über, in welchen diese Eigenschaft nicht vorkommt. Ist $2 : 3 = 4 : 6$ und $7 : 9 = 35 : 45$ gegeben, so kann man auch diese beiden Proportionen zusammensetzen und zwar auf die Weise, daß man ihre Verhältnisse zusammensetzt, oder was dasselbe ist, daß man die Produkte ihrer gleichvielsten Glieder zu einander in Verhältniß setzt, also $2.7 : 3.9 = 4.35 : 6.45$ oder $14 : 27 = 140 : 270$, und man wird bemerken, daß die durch Zusammensetzung erhaltene Proportion wirklich eine solche ist, weil die V.O. ihrer Verhältnisse einander gleich sind; denn jeder ist $\frac{2}{7}$. Aus diesem und vielen andern Beispielen wird man den Satz ziehen, daß durch Zusammensetzung gegebener Proportionen wieder eine Proportion entsteht; doch fehlt diesem Satze noch die erforderliche Allgemeinheit seiner Richtigkeit, die man auf vielfache Weise geben kann; ich wähle hiezu folgende. Die Vorderglieder der ersten Proportion seien A, B, ihr Verhältniß-Quotient Q, die Vorderglieder der andern seien a, b, ihr Verhältniß-Quotient q, so hat man:

Vorderglied A : Vorderglied $A \times Q$ = Vorderglied B : Vorderglied $B \times Q$,
Vorderglied a : Vorderglied $a \times q$ = Vorderglied b : Vorderglied $b \times q$.

Die ersten Verhältnisse zusammengesetzt, giebt:

Vorderglied $A \times$ Vorderglied a : Vorderglied $A \times Q \times$ Vorderglied $a \times q$

und der Verhältniß-Quotient ist:

$$\frac{\text{Vorderglied } A \times Q \times \text{Vorderglied } a \times q}{\text{Vorderglied } A \times \text{Vorderglied } a} = Q \times q;$$

denn das Produkt der Vorderglieder im Nenner hebt durch Division dasselbe

Digitized by Google

Produkt im Zähler auf, und es bleibt als Quotient das Produkt der Verhältniß-Quotienten übrig.

Die Zusammensetzung der zweiten Verhältnisse giebt:

Vorderglied B × Vorderglied b : Vorderglied B × Q × Vorderglied b × q

und der Verhältniß-Quotient ist:

$$\frac{\text{Vorderglied B} \times \text{Q} \times \text{Vorderglied b} \times \text{q}}{\text{Vorderglied B} \times \text{Vorderglied b}} = \text{Q} \times \text{q};$$

aus den vorher angezeigten Gründen; da die Verhältniß-Quotienten einander gleich sind, so müssen solches auch die Verhältnisse sein, und sie bilden daher eine Proportion.

Da nun der Satz für die Zusammensetzung zweier Proportionen erwiesen ist, so muß er für eine beliebige Zahl Proportionen gelten. Denn habe ich beliebige Proportionen A, B, C, D, E ꝛc., so schließe ich nun so:

Die Proportionen A und B zusammengesetzt, geben mir die neue Proportion P, diese mit der Proportion C zusammengesetzt, muß mir aus demselben Grunde die neue Proportion Q geben; nun kann ich wieder die Proportion Q mit der Proportion D zusammensetzen, und muß wieder eine neue Proportion R erhalten ꝛc., und es ist klar, daß ich die Reihe dieser Schlüsse nach Belieben fortsetzen kann; daher hat der Satz allgemeine Giltigkeit, und ich will ihn nur noch zu manchen Bemerkungen und gewissen Berechnungen gebrauchen.

Sind folgende Proportionen zur Zusammensetzung gegeben, so wird man sich die Berechnung dadurch sehr erleichtern, daß man die gemeinen Maße entweder der Glieder eines Verhältnisses oder verschiedener Verhältnisse, in diesem Falle müssen es aber entweder gleichnamige (also beide entweder Vorder- oder Hinter-) Glieder sein, oder das eine muß ein Vorder-, das andere ein Hinterglied sein, aber entweder in den ersten oder in den letzten Verhältnissen. Die nachfolgenden Beispiele werden dieses näher erläutern.

1	: 2 =	3	: 6
5	: 4 =	15	: 12
7	: 10 =	49	: 70
16	: 17 =	32	: 34
19	: 8 =	76	: 32
27	: 28 =	54	: 56
513	: 544 =	513	: 544

Man soll 136 so in drei Theile theilen, daß sich der erste Theil zum zweiten wie 1 : 2, und dieser sich zum dritten wie 3 : 4 verhalte; welches sind die Theile?

Die Theile seien A, B, C, so hat man folgende Proportionen:

A	: B =	1	: 2
B	: C =	3	: 4
A	: C =	3	: 8

Hieraus folgt durch Zusammensetzung die Proportion, welche unter dem Striche steht.

Es ergiebt sich hieraus ferner, daß $B = 2A$ (nach VII, c.) und aus demselben Grunde ist $C = \frac{4}{3} A$; daher ist die Summe der drei Theile $= A + B + C = A + 2A + 2\frac{2}{3} A = 5\frac{2}{3} A = 136$, und zur Berechnung

der einzelnen Theile hat man folgende Proportionen (weil $5\frac{2}{3}\,A : A = 5\frac{2}{3} : 1$, $5\frac{2}{3}\,A : 2\,A = 5\frac{2}{3} : 2$, ꝛc.),

$5\frac{2}{3} : 1 = 136 : A$ oder $17 : 3 = 136 : A$;
$5\frac{2}{3} : 2 = 136 : B$ oder $17 : 6 = 136 : B$;
$5\frac{2}{3} : \frac{8}{3} = 136 : C$ oder $17 : 8 = 136 : C$; daher
$A = \frac{3 \cdot 136}{17} = 24$; $B = \frac{6 \cdot 136}{17} = 48$; $C = \frac{8 \cdot 136}{17} = 64$.

Ein Sterbender bestimmt in seinem Testamente, daß die Häupter A, B, C, D ihrer Familien nach der Zahl ihrer Glieder, die er aber nicht genau kennt, sein Vermögen von 42 000 Thlr. unter sich theilen sollen. Nun weiset sich aus, daß die Zahlen der Familienglieder von A und B im Verhältnisse von 2 : 3, von B und C im Verhältnisse von 4 : 5, und von C und D im Verhältnisse von 6 : 7 stehen. Wie viel wird jedes Familienhaupt erhalten?

$A : B = 2 : 3$
$B : C = 4 : 5$
$C : D = 6 : 7$
$A : C = 8 : 15$
$A : D = 16 : 35$

Durch Zusammensetzung von 2 und 3 dieser Proportionen erhält man die Verhältnisse von A zu C und D; und nun findet man ferner $B = \frac{3}{2}\,A$, $C = \frac{15}{8}\,A$ und $D = \frac{35}{16}\,A$; daher die Summe aller $4 = A + \frac{3}{2}\,A + \frac{15}{8}\,A + \frac{35}{16}\,A = \frac{105}{16}\,A$. Wie sich nun die Summe $\frac{105}{16}$ der Verhältnißzahlen zur Verhältnißzahl 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{35}{16}$, jedes Erben verhält, so muß sich die ganze Erbschaftssumme zu dem Erbe jedes Einzelnen verhalten; bringt man gleich die Verhältnißzahlen auf gleiche Benennung, so kann man die Nenner weglassen, und dann hat man:

$105 : 16 = 42\,000 : A = 6\,400$
$105 : 24 = 42\,000 : B = 9\,600$
$105 : 30 = 42\,000 : C = 12\,000$
$105 : 35 = 42\,000 : D = 14\,000$.

In einer Rechnung kommen die Zahlen A, B, C, D, E in folgenden Verhältnissen vor, und der Rechner wünscht die kleinste Zahl zu wissen, welche er für A annehmen müsse, damit die übrigen Zahlen nach diesen Verhältnissen als ganze Zahlen berechnet werden können; welches ist also diese kleinste Zahl, und welche Verhältnißzahlen wird man für B, C, D, E erhalten?

$A : B = 3 : 7$
$B : C = 8 : 9$
$C : D = 49 : 48$
$D : E = 63 : 64$

Durch Zusammensetzung von 2 Proportionen erhält man: $A : C = 8 : 21$, von 3 Prop. $A : D = 7 : 18$, von 4 Prop. $A : E = 49 : 128$; daher ist $B = \frac{7}{3}\,A$; $C = \frac{21}{8}\,A$; $D = \frac{18}{7}\,A$; $E = \frac{128}{49}\,A$; die kleinste Zahl, welche man für A annehmen will, muß also durch 3, 8, 7 und 49 ohne Rest dividirbar sein; also suche man den kleinsten General-Nenner dieser Nenner 3, 8, 7, 49, welcher 1176 ist, dann erhält man die Verhältnißzahl für $B = 2744$, für $C = 3087$, für $D = 3024$ und für $E = 3072$.

Digitized by Google

Nach einer Angabe haben die Zahlen A, B, C folgende Verhältnisse $A:B = 16:25$, $B:C = 36:49$; nach einem andern haben die Zahlen a, b, c die Verhältnisse $a:b = 12:13$, $b:c = 21:20$; ferner weiß man, daß $A:a = 8:3$ und daß die Summe aller 6 Zahlen 203 553 beträgt; welches sind die Zahlen?

Man ordne die Zahlen in folgenden Proportionen an:

$A:B = 16:25$
$B:C = 36:49$
$a:A = 3:8$
$b:a = 13:12$
$c:b = 20:21$
$A:C = 16.36:25.49$
$a:C = 6.36:25.49$
$b:C = 18.13:25.49$
$c:C = 24.13:35.49$

C muß also durch 25.49 und 35.49, also durch $7.25.49$ ohne Rest theilbar sein; daher

$A = 7.16.36 = 4032$	36 288	
$B = 7.25.36 = 6300$	56 700	
$C = 7.25.49 = 8575$	77 175	
$a = 7.6.36 = 1512$	13 608	
$b = 5.18.13 = 1638$	14 742	
$c = 5.24.13 = 1560$	14 040	
Summen 23617	203 553	9
	203 553	

Die Summe der Verhältnißzahlen ist in der gegebenen Summe 9 mal enthalten; daher multiplicire man jede Verhältnißzahl mit 9, so erhält man die verlangten Zahlen.

Gewisse 6 Zahlen haben folgende Verhältnisse unter einander: $E:F = 12:13$; $D:C = 6:5$; $A:B = 1:2$; $D:E = 9:10$; $C:B = 4:3$; die Summe der Zahlen B, D, F beträgt 15 886; es wird nach den einzelnen Zahlen gefragt.

Man ordne zunächst die Verhältnisse, wie folgt:

$A:B = 1:2$
$B:C = 3:4$
$C:D = 5:6$
$D:E = 9:10$
$E:F = 12:13$
$A:C = 3:8$
$A:D = 5:16$
$A:E = 9:32$
$A:F = 27:104$
$B = 270$
$D = 432$
$F = 520$

Nun findet man

$B = 2A$; daher setze man $A = 5.27 = 135$,
$D = \frac{16}{5}A$; so wird man die Verhältnißzahlen
$F = \frac{104}{27}A$; der übrigen leicht finden.

es ist nämlich:

$A = 135.13 = 1755$
$B = 270.13 = 3510$
$C = 360.13 = 4680$
$D = 432.13 = 5616$
$E = 480.13 = 6240$
$F = 520.13 = 6760$

1222	15886	13
	1222	
	3666	
	3666	

Die Anordnung der Rechnung zeigt zugleich den Gang der Auflösung.

Digitized by Google

Ein Quadrant verhält sich zu einem Grad = 90 : 1; ein Quadrant verhält sich zu einer Toise = 5 130 740 : 1; eine Toise verhält sich zu einem Preuß. Fuß = 86 400 : 13 913; ein Preuß. Fuß verhält sich zu einer Ruthe = 1 : 12; eine Ruthe verhält sich zu einer Preuß. Meile wie 1 : 2000; wie verhält sich eine Preuß. Meile zu einem Grad?

1 Preuß. Meile	: 1 Preuß. Ruthe	=	2000 : 1
1 Preuß. Ruthe	: 1 Preuß. Fuß	=	12 : 1
1 Preuß. Fuß	: 1 Toise	=	13 913 : 86 400
1 Toise	: 1 Quadranten	=	1 : 5 130 740
1 Quadrant	: 1 Grad	=	90 : 1
1 Preuß. Meile	: 1 Grad	=	5 . 13 913 : 2 . 513 074

daher 1 Grad $= \frac{2 . 513\,074}{5 . 13\,913} = 14{,}_{750\,9236}$ Preuß. Meilen.

Die Länge des Meridian-Quadranten ist nach den Französischen Vermessungen, die Länge des Preuß. Fußes nach gesetzlichen Bestimmungen; daher kann man $14\frac{3}{4}$ Preuß. Meilen auf einen Meridian-Grad rechnen.

Will man die Zahl der Preuß. Ruthen wissen, welche auf einen Grad des Meridians gehen, so darf man nur die 4 letzten obiger 5 Proportionen zusammensetzen, die Zahl der Meilen mit 2000 multipliciren, so erhält man 29 501,$_{6472}$ Preuß. Ruthen = 1 Grad des Meridians.

Nelkenbrecher hat unter dem Artikel Berlin: $14\frac{3}{4}$ Meilen sind beinahe ein mittlerer Meridiangrad, welcher nahe 29 502 Ruthen enthält. Also mit obigen Resultaten der Rechnung übereinstimmend.

Nun verlasse ich das reine Rechnen, das angewandte seinen einzelnen Theilen nach zu zergliedern, und das Nützliche und Wichtige hervorzuheben.

Digitized by Google

Zweite Abtheilung.

Angewandtes Rechnen.

In der einleitenden Ueberſicht über die Theile des Rechnens (Seite 3.) iſt bereits das Verhältniß zwiſchen dem theoretiſchen und praktiſchen Rechnen kurz berührt; in dieſem Abſchnitte muß aber das letztere genauer unterſucht werden, den Stoff anzuzeigen, der in dieſer Abtheilung zu bearbeiten iſt, und die Ordnung zu erforſchen, in welcher es am zweckmäßigſten geſchehen könne.

Da das praktiſche Rechnen nur die Anwendung des reinen Rechnens auf benannte Zahlen iſt, ſo iſt hier zweierlei zu betrachten, nämlich worin dieſe Anwendung beſtehe, und was man ſich unter benannten Zahlen zu denken habe.

Wirft man noch einen Blick auf das reine Rechnen, das Weſen desſelben klar vor Augen zu haben, ſo wird man bemerken, daß der Begriff der Einheit und die Bildung der Zahlen aus derſelben dem geſammten Rechnen zum Grunde liegen.

Nun iſt die Einheit diejenige Vorſtellung von Dingen, welche nur ſolche Merkmale in ſich begreift, die allen Dingen, ohne Ausnahme, zukommen; es iſt aber ſchon zu viel geſagt, die Einheit eine Vorſtellung von Dingen zu nennen; denn unter dem Ausdrucke Ding verſteht man gewöhnlich einen körperlichen Gegenſtand; der Begriff der Einheit iſt aber nicht bloß auf körperliche Gegenſtände beſchränkt, ſondern er umfaßt Alles, was in einer beſtimmten Vorſtellung enthalten iſt. Man ſagt: ein Wort, einige Gedanken, viele Thaten ꝛc.; daher iſt es richtiger geſagt: die Einheit iſt der Begriff von Etwas, welcher ſich dadurch von andern Begriffen unterſcheidet, daß er nur die beiden Merkmale: des Seins von Etwas, und des Fürſichbeſtehens, der Getrenntheit dieſes Etwas von andern Etwas, enthält. Das Getrenntſein führt aber die Vorſtellung mit ſich, daß nicht ein einziges Etwas, ſondern mehrere derſelben vorhanden ſein müſſen, und ferner, weil der Begriff der Einheit nur die beiden Merkmale des Seins und der Getrenntheit des Etwas in ſich vereinigt, müſſen alle Einheiten unter einander gleich ſein; ſind ſie ſolches nicht, ſo wird die Ungleichheit derſelben beſonders ausgedrückt, hörbar

Digitized by Google

durch Eintheilung in verschiedene Ordnungen, sichtbar durch Anweisung verschiedener Stellen oder Plätze.

Aus den vorstehenden Bemerkungen über den Charakter der Einheit geht hervor, daß man zwar von dem Begriffe der Einheit zu den Vorstellungen von den Zahlen, als den Vorstellungen von bestimmten Vielheiten der Einheiten oder bestimmten Vielfachen der Einheit hinauf-, nicht aber von dem Begriffe der Einheit zu den Vorstellungen der Brüche, als Vorstellungen von bestimmten Vielfachen von Theilen der Einheit hinabsteigen könne; denn was können Theile der Einheit anderes als wieder Einheiten sein; weil jeder Theil einer Einheit den Begriff der Einheit vollkommen darstellt; nämlich weil jeder Theil der Einheit die beiden Merkmale des Seins und der Getrenntheit in sich schließt; daher wäre, wenn man einen Bruch als Theile der Einheit definirte, ein Theil der Einheit wieder die Einheit selbst, was der Vorstellung von einem Theile und seinem Ganzen widerstreitet; demnach kann man auch den Begriff von einem Bruche im reinen Rechnen nur als das Verhältniß zweier ganzen Zahlen darstellen, und dem gemäß hat auch Euklid den Bruch definirt. Wenn aber dennoch im reinen Rechnen ein Bruch als ein Vielfaches von einem Theile von Eins (einem Ganzen) erklärt wird, so hat man sich unter diesem Eins stets ein Gewisses, einen Körper, als ein Ganzes zu denken, das in gleiche Theile getheilt wird; und dann stellt jeder Theil des Ganzen die Einheit, das getheilte Ganze aber, als ein Vielfaches von einem seiner Theile, eine Zahl dar.

Die Grundlage des theoretischen Rechnens bilden also die Einheiten mit dem Begriffe der völligen Gleichheit unter einander; Vielfache der Einheit sind die Zahlen, und ihr Verhältniß zur Einheit ist durch das bestimmte Vielfache angezeigt. Man kann eigentlich nicht sagen, daß diese Grundlage die Einheiten und Zahlen bilde; denn diese werden aus jener durch eine Rechnungsoperation (die Addition) erzeugt; und die Bildung der Zahl aus den Einheiten leitet auf die Entwickelung der nachfolgenden Operationen des reinen Rechnens, wie solches in der einleitenden Uebersicht auseinandergesetzt ist. Daher wird das reine Rechnen auch nur insofern eine Anwendung auf wirkliche Dinge erfahren, als diese den Begriffen von den Einheiten und Zahlen entsprechen.

Betrachtet man nun die Dinge der Natur, so wird man leicht bemerken, daß man mit jedem Dinge den Begriff der Einheit verbinden könne, welches dadurch geschieht, daß man das Wort Ein vor den Namen jedes Gegenstandes setzt; z. B. ein Baum, eine Blume, ein Thier, eine Stunde, ein Scheffel ꝛc. Daher die Euklidische Definition der Einheit, nämlich: die Einheit ist das (der Begriff), nach welchem jedes Ding Eins ist; sie ist kurz und charakterisirt das eigentliche Wesen der Einheit vollständig. Wird aber die Einheit mit einem gewissen Dinge, das der Name desselben bezeichnet, in Verbindung gedacht, so hat man nicht mehr die Vorstellung der abstrakten,

Digitized by Google

sondern der konkreten oder benannten Einheit; und hieraus ergiebt sich leicht die Erklärung der konkreten oder benannten Einheit, sie ist nämlich die Vorstellung von dem verbundenen Begriffe der Einheit mit der Vorstellung eines gewissen Dinges. Die Euklidische Definition giebt den Begriff der abstrakten Einheit. Ferner ist die bestimmte Vielheit abstrakter Einheiten die unbenannte Zahl, und die bestimmte Vielheit benannter Einheiten die benannte Zahl. In der Erklärung der benannten Zahl hat man stillschweigend vorausgesetzt, daß alle benannten Einheiten, also alle Dinge, deren Vielheit durch eine Zahl bezeichnet wird, unter einander gleich seien; dieses findet aber in der Wirklichkeit nicht statt; sondern man kann im Gegentheil mit Wahrheit behaupten, daß alle Dinge sowohl in der Natur als auch in der Kunst einander ungleich sind, wie sehr man sich auch in der letztern Mühe geben mag, vollkommene Gleichheit in denselben darzustellen; davon trägt die Schuld die Unvollkommenheit unserer Sinne und Instrumente. Obgleich nun in der Wirklichkeit gleiche Dinge nicht vorhanden sind; so werden dennoch gezählte Dinge als unter einander gleich betrachtet, und in dieser Hinsicht gilt folgender Grundsatz: Dinge, welche denselben Namen führen, sind als unter einander gleich zu betrachten; und umgekehrt: Dinge, welche als gleich unter einander betrachtet werden sollen, müssen mit einem und demselben Namen bezeichnet werden. Zur Erläuterung dieser Grundsätze kann man Folgendes anführen. In der Vorstellung von einem Dinge sind gewisse Merkmale desselben vereinigt, und diese Verbindung von Merkmalen eines gewissen Dinges wird nun mit einem Worte bezeichnet, welches der Name dieses Dinges ist; daher umfaßt der Name irgend eines Gegenstandes eine gewisse Summe von Merkmalen desselben; folglich hat man sich an allen Dingen, welche denselben Namen führen, dieselben Merkmale, oder dieselbe Summe von Merkmalen derselben zu denken, und alle übrigen Merkmale, welche nicht bei allen Gegenständen, die gleiche Namen haben, angetroffen werden, werden auch nicht in die Vorstellung von diesen Dingen aufgenommen; und deswegen werden gleichnamige Dinge als unter einander gleiche Dinge angesehen. Umgekehrt: will man gewisse Gegenstände als unter einander gleiche betrachten; so wird man von jedem Dinge nur die, allen diesen Dingen gemeinschaftlichen, Merkmale in der Vorstellung von denselben behalten, und bezeichnet man diese Summe der Merkmale mit einem Worte, so muß dieses Wort als Name jedem der gedachten Gegenstände zukommen, und daher müssen Dinge, welche als gleich betrachtet werden sollen, mit gleichen Namen benannt werden. Nach dieser Auseinandersetzung wird es klar sein, warum alle Eichen unter einander gleich, alle Häuser unter einander gleich, alle Thaler unter einander gleich ꝛc. betrachtet werden, und dem zufolge kann man 3 Eichen, 7 Häuser, 8 Thaler ꝛc. sagen; allgemein: die bestimmte Vielheit gleichnamiger Dinge mit einer Zahl bezeichnen. Ferner: hat man Eichen und Birken und will man alle diese Dinge als unter einander gleiche betrachten; so muß

Digitized by Google

man ihnen einen ſolchen Namen beilegen, welcher die gemeinſchaftlichen Merkmale der Eichen und Birken bezeichnet, und dieſer könnte Baum, oder noch genauer Laubbaum ſein; daher ſind 4 Eichen und 5 Birken zuſammen 9 Laubbäume. Folglich ſind 3 Linden, 4 Eſchen und 5 Tannen zuſammen 12 Bäume. Aus demſelben Grunde ſind Dinge, welche zum Theil mit demſelben, zum Theil mit einem andern Namen benannt werden, als ungleiche Dinge zu betrachten; z. B. ein Preuß. Thaler und ein Species-Thaler; ein Holländiſcher Dukaten und ein Däniſcher Dukaten; ein Pfund Handelsgewicht und ein Pfund Medicinalgewicht ꝛc.

In dem Vorhergehenden wurde nur die Vielheit der Dinge betrachtet, man kann aber auch die Maſſe der Dinge in Augenſchein nehmen, zu erfahren, wie viel Maſſe ein Ding mehr als ein anderes habe; und dieſes kann auf zweierlei Weiſe geſchehen, entweder durch Unterſuchung des Raumes, den ein Körper einnimmt, und welcher ſein Volumen genannt wird, oder des Druckes, den er vermöge ſeiner Schwere ausübt, und der ſein Gewicht heißt; doch jede Beurtheilung dieſer Art kann nicht anders als durch Meſſen ausgeführt werden. Meſſen iſt nun nichts anderes als die Unterſuchung des Vielfachen, welches eine Größe von einer andern, eben derſelben Art, oder einer gleichartigen Größe iſt. Die Größe, durch welche eine andere gleichartige Größe gemeſſen wird, heißt ein Maß dieſer andern. Daher giebt es Raummaße und Gewichtsmaße. Die genauere Unterſuchung der Maße des Raumes wird ſpäter erfolgen; die Maße des Gewichts eines Körpers müſſen aber ſchon hier etwas näher betrachtet werden.

Die Urſache des Gewichts eines Körpers iſt ſeine Schwere, oder beſſer geſagt: die Schwere überhaupt. Die Schwere iſt aber das ununterbrochene Beſtreben eines Körpers, ſich der Erde zu nähern; ſetzt ſich dieſem Beſtreben ein Widerſtand entgegen, ſo übt der Körper auf den Widerſtand einen Druck aus, und die Größe dieſes Druckes iſt ſein Gewicht. Die Schwere eines Körpers hängt aber nicht immer von der Größe ſeines Volumens ab, ſondern ſtets von der Menge der Materie, die er in ſich begreift; daher kommt es, daß manche Körper von einem kleinern Volumen ſchwerer als andere von einem größern ſind, z. B. ein Bund Stroh wird nicht ſo ſchwer als eine Stange Eiſen von derſelben Länge ſein, obgleich jenes bei weitem dicker als dieſe iſt, alſo jenes ein größeres Volumen als dieſe hat. Daher ſind die Gewichte vorzüglich dazu geeignet, die Menge der Materie eines Körpers im Vergleiche mit der eines andern Körpers zu beſtimmen. Ferner: will man einen Stein von etwas großem Volumen aufheben, ſo muß man eine bedeutende Kraft anwenden, dieſes zu vermögen, und man kann dieſes ſo anſehen, als wenn der Stein eine gewiſſe Kraft beſäße, die er anwendete, ſich an der Erde feſtzuhalten, und Derjenige, welcher den Stein zu heben verſucht, braucht ſeine Kraft, die des Steines zu überwinden; der Stein hat aber ſeine Kraft zum Feſthalten an der Erde von der Schwere, daher wird die Schwere als

Digitized by Google

eine Kraft angesehen. Hieraus geht hervor, daß man die Gewichte auch zum Messen der Kräfte anwenden könne, welches auch wirklich geschieht.

Man kann nun wohl sagen: ein Körper wiege 2, 3, 4 ꝛc. Pfunde, aber man kann nicht behaupten: eine Meile, ein Morgen Landes, der Raum eines Zimmers wiege so viele und so viele Pfunde, weil der Raum, ohne Materie, keine Schwere hat, und nur in der Materie allein die Schwere zum Vorscheine kommt; in dieser Rücksicht nennt man den Raum und die Schwere (Kraft) ungleichartige Größen. Diese Bemerkungen führen auf die Erklärungen gleich- und ungleichartiger Größen.

Gleichartige Größen sind solche, von denen die eine ein Vielfaches der andern sein kann. Z. B. die Höhe eines Thurmes und die Länge eines Fußes; denn die Höhe des Thurmes kann das 80-, 100-, 200fache ꝛc. eines Fußes sein; die Höhe des Thurmes kann also 80, 100, 200 Fuß ꝛc. betragen. Eben so die Schwere eines Buches und ein Loth sind gleichartige Größen; denn das Buch kann 5, 8, 12 ꝛc. Loth schwer sein.

Hieraus folgt sehr leicht die Erklärung ungleichartiger Größen, nämlich: ungleichartige Größen sind solche, von welchen die eine nicht ein Vielfaches der andern sein kann. Z. B. die Kraft eines Pferdes und die Oberfläche eines Teiches sind ungleichartige Größen; aber die Kraft eines Pferdes und die Schwere eines Steines sind gleichartige Größen; denn man kann durch Versuche erfahren, wie viele Pfunde ein Pferd von der Stelle zu ziehen vermag, und nun kann man einen Stein von der Schwere eines Pfundes wählen; so hat man dadurch ermittelt, welches Vielfache die Kraft des Pferdes von der Schwere des gewählten Steines ist.

Es giebt aber noch eine andere Größe, welche in Rücksicht der oben genannten ungleichartig ist, und diese ist die Zeit. Denn kein Vielfaches von einer Minute, einer Stunde, einem Tage ꝛc. kann ein Pfund, einen Centner ꝛc. wiegen, oder einen Fuß lang, eine Quadratruthe groß ꝛc. sein. Aber Sekunden, Minuten, Stunden ꝛc. sind gleichartige Größen.

Endlich giebt es noch eine vierte Größe, welche in Vergleich mit den drei vorhergenannten als ungleichartig betrachtet werden kann, aber nicht immer muß, und dieses ist der Geldwerth der Dinge. Zwar kann man nicht sagen: die Länge eines Fußes, die Schwere eines Pfundes, die Dauer einer Stunde ist das Ein-, Zwei-, Dreifache ꝛc. eines Thalers, aber man kann sagen: die Elle von einem Zeuge, ein Pfund von einer Waare, die Arbeit von einer Stunde wird einen Thaler gerechnet, oder ist an Werth dem eines Thalers gleich.

Raum, Kraft, Zeit, Geldwerth sind die vier ungleichartigen Größen, deren Quantitäten durch Zahlen ausgedrückt werden; und diese Zahlen bezeichnen nichts weiter, als die Vielfachen, welche jede jener Größen von einer mit ihr gleichartigen Größe ist. Diese Zahlen werden, wie früher bemerkt, benannte Zahlen, und die Größe, von der eine andere gleichartige ein Vielfaches

Digitized by Google

ist, ein Maß dieser anderen genannt; so sind benannte Zahlen nichts anderes als Vielfache von den Maßen gleichartiger Dinge.

Außer diesen vier ungleichartigen Größen hat die Naturwissenschaft, und selbst der bürgerliche Verkehr, noch andere im Gebrauche, wie die Grade der Wärme, die Stärke der Elektricität, die Stärke des Lichts ꝛc.; doch diese Größen, außer den Wärmegraden, hat selbst die Wissenschaft noch nicht der Behandlung mit Zahlen vollständig unterworfen, und daher können sie auch nicht ein Gegenstand der niedern Elementar-Arithmetik sein; doch wird das Nöthige über die gegenseitige Verwandlung der Thermometergrade am passenden Orte erläutert werden.

Es giebt also gleichartige und ungleichartige Größen zur Behandlung im praktischen Rechnen; die gleichartigen Größen entsprechen durch ihre Maße den Einheiten, und durch ihre Vielfachen den Zahlen des reinen Rechnens; daher wird dieses auf benannte Zahlen mit Leichtigkeit angewendet werden können; wie aber die ungleichartigen Größen in Rechnung zu bringen sind, das ist hier zwar noch nicht untersucht, doch wird es später einer genauern Betrachtung unterworfen werden, wenigstens kann man hieraus so viel entnehmen, daß die Rechnung mit ungleichartigen Größen schwieriger als die mit gleichartigen sein wird und daher die Rechnung mit diesen der mit jenen vorangehen müsse; aus diesem Grunde zerfällt das angewandte Rechnen in folgende zwei Abschnitte:

Erster Abschnitt. Berechnung solcher Größen, welche durch gleichartige Größen bedingt werden.

Zweiter Abschnitt. Berechnung solcher Größen, welche durch ungleichartige Größen bedingt werden.

Erster Abschnitt.

Berechnung solcher Größen, welche durch gleichartige Größen bedingt werden.

In dem Eingange zu diesem Abschnitte ist auseinandergesetzt, daß gleichnamige Dinge als unter einander gleiche Dinge zu betrachten sind; daher wird man auf sie die Rechnungsarten des reinen Rechnens ohne Schwierigkeit anwenden können; da diese nun in der Addition, Subtraktion, arithmetischen Vergleichung, Multiplikation, Division und geometrischen Verhältnissen bestehen, so hat man auch diese Operationen in derselben Ordnung mit benannten Zahlen vorzunehmen. In den Aufgaben darüber hat man aber vorzüglich darauf zu sehen, daß die im bürgerlichen Verkehre üblichen Aus-

Digitized by Google

drücke in Anwendung gebracht werden; dahin gehören: kaufen, verkaufen, Gewinn, Verlust, einnehmen, ausgeben, theilen, vertheilen, wägen, messen, zählen, leihen ꝛc.

Es ist nicht nothwendig, daß diese Art Aufgaben im Unterrichte erst so spät als hier im Buche erscheinen, wie es jedem Lehrer klar sein wird, sondern sie müssen in der That schon früher am passenden Orte behandelt werden, und zwar die Aufgaben zur Addition unmittelbar nach der Addition mit unbenannten Zahlen, die zur Subtraktion nach derselben mit unbenannten Zahlen ꝛc., allgemein: nach jeder Rechnungsart mit unbenannten muß dieselbe mit benannten Zahlen folgen. Es kann nicht gezweifelt werden, daß nicht jeder Lehrer die erforderliche Umsicht zur Bildung dieser Art Aufgaben haben sollte; daher wird hier denselben kein besonderer Abschnitt angewiesen, und es sollen auch deswegen nur beiläufig einige als Beispiele angeführt werden.

I. Zur Addition. Die Dinge, welche addirt werden können, sind: Münzen, Maße, Gewichte und auch andere, welche mit Zahlen bezeichnet werden.

1. Jemand hat 8 Dielen, die erste ist 24, die andere 28, die dritte 17, die vierte 29, die fünfte 23, die sechste 32, die siebente 35 und die achte 27 Fuß lang; welche Strecke des Weges kann er mit denselben bedecken? 215 Fuß.

2. Ein Kaufmann kauft für 1237 Thlr. Weizen, für 895 Thlr. Roggen, für 469 Thlr. Gerste, für 158 Thlr. Hafer, für 233 Thlr. graue und für 189 Thlr. weiße Erbsen; wie viel hat er zu bezahlen? 3181 Thlr.

3. Auf einem Wagen befinden sich 6 Personen, A ist 152 ℔, B 163 ℔, C 144 ℔, D 198 ℔, E 208 ℔ und F 128 ℔ schwer; mit wie vielen Pfunden belasten sie den Wagen? 993 ℔.

II. Zur Subtraktion.

4. Ein Gutsbesitzer kommt mit Getreide nach der Stadt und verkauft es für 2839 Thlr. Von diesem Gelde giebt er für seinen Hausbedarf aus: 128 Thlr. für Tuch, 48 Thlr. für Eisenwaaren, 4 Thlr. für Zucker, 2 Thlr. für Kaffee, 3 Thlr. für Thee; mit wie vielem Gelde reiset er nach Hause? 2654 Thlr.

5. Ein Tuchhändler hat drei Stücke Tuch von 32, 30 und 29 Ellen; von dem ersten verkauft er 17, vom zweiten 19 und vom dritten Stücke 13 Ellen; wie viele Ellen behält er von jedem Stücke und wie viele von den 3 Stücken? 15; 11; 16; 42 Ellen.

III. Zur arithmetischen Vergleichung.

6. Jemand kauft ein Pferd für 96 Thlr. und verkauft es darauf wieder für 120 Thlr.; hat er bei diesem Handel gewonnen oder verloren und zwar wie viel? 24 Thlr. gewonnen.

Digitized by Google

7. Jemand läßt sich einen Wagen machen und bezahlt für denselben 450 Thlr.; da dieser Wagen einem Andern sehr gefällt, so verkauft er ihn an diesen mit 25 Thlr. Gewinn. Wie viel zahlte der Andere für den Wagen? 475 Thlr.

8. Das Haus des A wird 1840 Thlr., das des B 2350 Thlr. geschätzt; bald darauf verkaufen beide ihre Häuser mit gleichem Gewinn, und A erhielt für das seinige 2093 Thlr.; wie viel erhielt B für sein Haus? 2603 Thlr.

IV. Zur Multiplikation. Der Multiplikator darf nur eine unbenannte Zahl sein; weil nur eine Art gleichnamiger Größen hier vorkommen soll.

9. Wenn man 375 Centner mit 69 multiplicirt, so erhält man wie viele Centner? 25 875 Centner.

V. Zur Division.

10. Eine Preuß. Postmeile hält 23 640 Fuß; wie viele Fuß gehen auf eine Achtelmeile? 2955 Fuß.

11. Ein Scheffel enthält 3072 Kubikzoll, ein Quart 64 Kubikzoll; so enthält ein Scheffel wie viele Quart? 48 Quart.

VI. Zur Bildung geometrischer Verhältnisse.

12. Wie verhalten sich 7 Scheffel Getreide zu 9 Scheffeln von demselben Getreide? Wie 7 : 9.

13. In welchem Verhältnisse stehen 35 Thlr. zu 42 Thlr.? Im Verhältnisse von 5 : 6.

14. Welche 2 Zahlen verhalten sich eben so, wie sich 65 ℔ zu 91 ℔ verhalten? 5 : 7 stehen in demselben Verhältnisse.

15. Welche 2 Zahlen stehen in dem Verhältnisse, in welchem 51 Ruthen zu 85 Ruthen stehen? 3 : 5.

Die gleichartigen Größen sind nicht allein gleichnamige, sondern auch ungleichnamige, wie z. B. 1 Thlr. und 1 Sgr., denn 1 Thlr. ist das 30fache von 1 Sgr.; eben so Pfunde und Lothe ꝛc.; und diese gleichartigen aber ungleichnamigen Größen sind gerade diejenigen, welche in diesem Abschnitte einer genauern Betrachtung unterworfen werden sollen.

Die gleichartigen, aber ungleichnamigen, Größen sind Maße gleichartiger Größen. Dasjenige Maß, nach welchem alle übrigen Maße gleichartiger Größen regulirt werden, heißt die Einheit des Maßes oder die Maßeinheit. Da jede Größe nur durch eine mit ihr gleichartige Größe gemessen werden kann, so wird es so viele Maßeinheiten geben, wie viele ungleichartige Größen vorhanden sind. Nun ist im Eingange zu dieser Abtheilung des Rechnens gezeigt, daß nur 4 verschiedenartige Größen im bürgerlichen Verkehre vorkommen, nämlich der Rauminhalt, die Schwere (Kraft), die Dauer und der Geldwerth der Dinge, also wird man auch 4 verschiedene Maßeinheiten haben, und diese, wie die Eintheilung derselben in kleinere Maße, müssen dem unerfahrenen Schüler auseinandergesetzt werden; die Ordnung, in welcher dieses

Digitized by Google

geschieht, ist gleichgiltig. Es dürfte aber wohl am zweckmäßigsten sein, in dieser Materie mit den Raumgrößen den Anfang zu machen, weil ihre Maße und die Eintheilung dieser durch Anschauung klar gemacht werden kann.

Erstes Kapitel.

Raumgrößen.

Es giebt Raumgrößen, die sich nur nach einer Dimension (Abmessung) erstrecken oder Längengrößen; solche, welche sich nach zwei Dimensionen ausdehnen oder Flächenräume; und endlich solche, welche nach drei Dimensionen bestimmt werden oder Körperräume.

Dem zufolge zerfällt dieses Kapitel in drei Unterabtheilungen nach den drei verschiedenen Raumgrößen.

I. Längengrößen.

Die Längeneinheit im Preuß. Staate ist der Preuß. Fuß, nach diesem werden die Maße sowohl zu größern als auch zu kleinern Längen, als der Fuß ist, bestimmt.

A. Eintheilung der Maße.

Man hat eine doppelte Eintheilung, nämlich eine regelmäßige und eine unregelmäßige; die letztere wird von gewissen Handwerkern befolgt und ist daher nicht allgemein; die erste ist wieder zweifacher Art und besteht in der Duodecimal- und Decimaleintheilung.

1. Nach der Duodecimaleintheilung wird der Fuß in 12 gleiche Theile getheilt, und jeder dieser Theile heißt ein Zoll; so theilt man wieder den Zoll in 12 gleiche Theile, welche Linien heißen; wieder eine Linie in 12 gleiche Theile, die Skrupel genannt werden. Daher ist

1 Fuß = 12 Zoll; 1 Zoll = 12 Linien; 1 Linie = 12 Skrupel.

Fragen. Ein Fuß hat wie viele Linien, wie viele Skrupel? Ein Zoll hat wie viele Skrupel?

Zum Messen größerer Längen, als der Fuß ist, nimmt man Vielfache des Fußes. Eine Länge, welche das 12fache eines Fußes ist, heißt eine Ruthe.

Eine Länge, welche = 24 000 Fuß ist, heißt eine Meile. Von dieser Meile, welche auch Landmeile heißt, unterscheidet sich die Postmeile, die nur 23 640 Fuß halten soll.

Fragen. Eine Ruthe hat wie viele Zoll, wie viele Linien, wie viele Skrupel? Eine Meile hat wie viele Ruthen, wie viele Zoll?

Digitized by Google

Bezeichnung. 1 Ruthe = 1°; 1 Fuß = 1′; 1 Zoll = 1″; 1 Linie = 1‴; 1 Skrupel = 1⁗.

Dem zufolge schreibt man 5 Ruthen 8 Fuß 9 Zoll 7 Linien 10 Skrupel kurz 5° 8′ 9″ 7‴ 10⁗.

2. Die Decimaleintheilung wird auch die geometrische genannt, und ist beim Feldmessen im Gebrauche. Nach dieser wird die oben bestimmte Ruthe in 10 Fuß, der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien und die Linie in 10 Skrupel eingetheilt. Die oben angegebene Bezeichnung wird hier beibehalten.

3. Außer den genannten Maßen hat man noch andere zu verschiedenen Zwecken; dahin gehört zunächst die Elle = 25½ Zoll Duodecimalmaß; sie wird in Halbe, Viertel, Achtel und Sechszehntel getheilt. Die Elle wird zum Vermessen der Zeuge gebraucht.

Ein anderes Längenmaß ist der Faden, auch die Klafter genannt, und ist = 6 Fuß. Der Faden kommt besonders beim Seewesen vor.

Die Bergwerksklafter = 80 Zoll wird in 8 Achtel, 1 Achtel = 10 Lachterzoll, 1 Lachterzoll = 10 Primen, 1 Prime = 10 Lachter-Sekunden getheilt.

B. Rechnungen mit diesen Maßen.

Zwei der vorzüglichern Rechnungen mit den Maßen sind die Resolution und die Reduktion.

Die Resolution (resolvere auflösen, losmachen, resolutio die Auflösung) ist die Verwandlung größerer Maße in kleinere, von denen jene Vielfache sind.

Die Reduktion (reducere zurückführen, reductio die Zurückführung) ist die Verwandlung kleiner Maße in größere, welche Vielfache von jenen sind.

Die Zahl, die das Vielfache anzeigt, welches das eine Maß von einem kleinern ist, heißt die Reduktionszahl. Nach der Duodecimaleintheilung ist also die Reduktionszahl 12, nach der Decimaleintheilung 10.

Nach diesen beiden Rechnungen wird man die 4 Species auf die Längenmaße anwenden und darauf die geometrischen Verhältnisse und Proportionen folgen lassen. Die arithmetischen Verhältnisse können übergangen werden, weil sich hier für sie keine natürliche Aufgabe darstellt.

Diese angezeigten Rechnungen sind auf alle gleichartigen Größen, die durch Maße ausgedrückt sind, anwendbar, und die Proportionen eignen sich vorzüglich zur gegenseitigen Verwandlung der Maße verschiedener Länder, wie sich dieses im Verfolg ergeben wird. Noch ist zu merken, daß man diejenigen Maße, welche Vielfache der kleinern sind, übergeordnete und die andern untergeordnete Größen oder Maße nennt.

Digitized by Google

a) Gegenseitige Verwandlung der unter- und übergeordneten Maße.

1) Resolution, Verwandlung der übergeordneten in untergeordnete Maße.

Wie schon früher an mehrern Orten bemerkt worden ist, so wird hier dasselbe wiederholt, daß dieses Buch keineswegs den Zweck hat, eine Beispielsammlung zu enthalten, sondern es soll klar und leicht übersichtlich den Ideengang im Rechnen und die vernunftgemäße Behandlung desselben darstellen; daher wird man hier nicht sowohl viele Aufgaben als vielmehr die Anzeige des Stoffes zu denselben und die Art der Behandlung desselben antreffen.

Man kann nun zunächst 1) eine ganze Zahl übergeordneter Maße in die darauf folgenden untergeordneten verwandeln; dann 2) wird man eine ganze Zahl übergeordneter und eine ganze Zahl untergeordneter Maße in untergeordnete, darauf 3) einen Bruch übergeordneter in untergeordnete, ferner 4) einen Bruch übergeordneter und eine ganze Zahl untergeordneter in untergeordnete und endlich 5) einen Bruch übergeordneter und einen Bruch untergeordneter Maße in untergeordnete auflösen.

Dabei ist noch zu bemerken, daß der Nenner des Bruches ein Faktor der Reduktionszahl oder nicht ein solcher sein kann. Von jeder Art nun ein Beispiel.

1. 8 Fuß betragen wie viele Zoll nach der Duodecimaleintheilung?

Aufl. Da 1 Fuß = 12 Zoll, so sind 8 Fuß = 8 . 12 Zoll = 96 Zoll. Genau genommen, so ist diese Aufl. nicht ganz vollständig nach den Gesetzen des Denkens, nach diesen geht das Urtheil voran: 8 F. sind 8 . 1 F., und da 1 F. = 12 Z., so sind 8 . 1 F. = 8 . 12 Z. = 96 Z.; daher sind 8 F. = 96 Zoll.

Anmerk. Man halte eine solche genaue Zergliederung einer Auflösung nicht für überflüssig; denn eben dadurch wird der Scharfsinn und das tiefere Nachdenken gefördert. Eine Menge Gedanken fliegen durch den Kopf, die gar nicht zum Bewußtsein gelangen, und eben in diesen liegt der Grund der Verworrenheit und Unklarheit im Denken; daher ist es für das Denken im Allgemeinen eine Sache von hoher Wichtigkeit, im Rechnen, welches die Anwendung der reinen Logik ist, jeden Gedankengang genau zu zergliedern, die einzelnen Urtheile und Schlüsse hervorzuheben und zum Bewußtsein zu bringen.

2. 7 Fuß sind wie viele Linien im Duodecimalmaße?

Aufl. 7 F. sind 7 . 1 F., 1 F. = 12 Z.; also 7 . 1 F. = 7 . 12 Z. = 84 Z.; folglich 7 F. = 84 Z. Nun sind 84 Zoll = 84 . 1 Z., 1 Z. = 12 Linien; daher 84 . 1 Z. = 84 . 12 L. = 1008 L.; demnach sind 84 Z. = 1008 L., und hieraus folgt, daß 7 Fuß = 1008 Linien sind.

3. 13 Ruthen und 8 Fuß im Duodecimalmaße sind wie viele Fuße?

Aufl. 13 Ruthen = 13 . 12 F. = 156 F., also sind 13° 8′ = 156′ und 8′ = 164′.

Anmerk. Es versteht sich wohl von selbst, daß wenn die Schüler die vollständig genaue Aufl. einer Art Aufgaben völlig begriffen haben, und sie mit Fertigkeit vortragen können, die Aufl. verkürzt werden könne und auch müsse, um Zeit für andere Dinge zu gewinnen; eine gelegentliche Wiederholung derselben wird aber immer von Nutzen sein.

4. 15 Ruthen 9 Fuß 5 Zoll im Ddm. sind wie viele Zoll?

Aufl. $15° = 15 . 12' = 180'$; also $15° 9' = 189'$; $189' = 189' . 12'' = 2268''$; daher $15° 9' 5'' = 2273''$.

5. $\frac{3}{4}$ Fuß sind wie viele Zoll im Ddm.?

Aufl. $\frac{3}{4}$ F. $= \frac{3}{4} . 1$ F., 1 F. $= 12$ Z.; also $\frac{3}{4} . 1$ F. $= \frac{3}{4} . 12$ Z. $= 9$ Z.; folglich $\frac{3}{4}$ Fuß $= 9$ Zoll.

6. $\frac{47}{96}$ Ruthen sind wie viele Linien im Ddm.?

Aufl. $\frac{47}{96}$ R. $= \frac{47}{96} . 1° = \frac{47}{96} . 12' = \frac{47}{8} . 1' = \frac{47}{8} . 12'' = \frac{47}{2} . 3'' = \frac{47 . 3}{2} . 1''' = \frac{47 . 3}{2} . 12''' = 47 . 3 . 6''' = 846'''$.

7. $\frac{8}{13}$ Ruthen sind wie viele Fuß, Zoll und Linien im Ddm.?

Aufl. $\frac{8}{13}$ Ruthen $= \frac{8}{13} . 12' = \frac{96'}{13} = 7\frac{5}{13}$ F. Nun sind $\frac{5}{13}$ F. $= \frac{5}{13} . 12'' = \frac{60''}{13} = 4\frac{8}{13}$ Z. Ferner sind $\frac{8}{13}$ Z. $= \frac{8}{13} . 12''' = \frac{96'''}{13} = 7\frac{5}{13}$ L. Daher sind $\frac{8}{13}$ Ruthen $= 7' 4'' 7\frac{5}{13}$ L.

8. $\frac{17}{36}$ Ruthen und 4 Fuß im Ddm. sind wie viele Fuß und Zoll?

Aufl. $\frac{17}{36}° = \frac{17}{36} . 12' = \frac{17}{3}' = 5\frac{2}{3}$ F.; $\frac{2}{3}$ F. $= \frac{2}{3} . 12'' = 8''$; also $\frac{17}{36}° 4' = 9' 8''$.

9. $\frac{53}{64}$ Ruthen und $\frac{7}{8}$ Fuß im Ddm. sind wie viele Fuß, Zoll und Linien?

Aufl. $\frac{53}{64}° = \frac{53}{64} . 12' = \frac{53 . 3}{16}' = \frac{159'}{16} = 9\frac{15}{16}$ F., also $\frac{53}{64}° + \frac{7}{8}' = 9\frac{15}{16}$ F. $+ \frac{7}{8}$ F. $= 10\frac{13}{16}$ F.; $\frac{13}{16} = \frac{13}{16} . 12'' = \frac{13 . 3}{4}'' = \frac{39}{4}'' = 9\frac{3}{4}$ Z.; $\frac{3}{4}'' = \frac{3}{4} . 12''' = 9'''$. Folglich sind $\frac{53}{64}°$ und $\frac{7}{8}' = 10' 9'' 9'''$.

10. $\frac{19}{25}$ Ruthen und $\frac{33}{40}$ Fuß im Ddm. sind wie viele Fuß, Zoll und Linien?

Aufl.
$$\begin{array}{rl} \frac{19}{25}° = & 9' \; 1'' \; 11\frac{1}{25}''' \\ \frac{33}{40}' = & \quad 9'' \; 10\frac{4}{5}''' \\ \hline \frac{19}{25}° + \frac{33}{40}' = & 9' \; 11'' \; 9\frac{21}{25}''' \end{array}$$

2) Reduktion, Verwandlung untergeordneter in übergeordnete Maße.

Man kann 1) eine ganze Zahl untergeordneter Maße, die entweder ein Vielfaches von der Reduktionszahl oder nicht ein solches dieser Zahl ist, und hiebei nach der Zahl eines oder nach den Zahlen mehrerer übergeordneten Maße fragen, oder 2) eine gebrochene Zahl, oder 3) eine gemischte Zahl untergeordneter Maße in übergeordnete verwandeln; 4) können mehrere Zahlen untergeordneter, verschiedener Maße gegeben sein, die auf übergeordnete Maße reducirt werden sollen.

Digitized by Google

1. 888 Zoll Duodecimalmaß betragen wie viele Fuß?

Aufl. Da $12'' = 1'$, so werden $888''$ so viele Fuß enthalten, so vielmal sie $12''$ enthalten; also sind $888'' = \frac{888}{12}$ Fuß $= 76$ F.

2. 10 000 Linien Ddm. sind wie viele Linien, Zoll, Fuß und Ruthen?

Aufl. Da $12''' = 1''$, so sind $10\,000''' = \frac{10000}{12}$ Zoll $= 833'' 4'''$. Nun sind $833''$ so viele Fuß, wie oft sie $12''$ enthalten; daher $833'' = \frac{833}{12}$ F. $= 69' 5''$. Ferner sind $69'$ so viele Ruthen, wie oft sie $12'$ in sich begreifen; also $69' = \frac{69}{12}$ Ruthen $= 5° 9'$. Folglich sind $10\,000''' = 5° 9' 5'' 4'''$.

3. 8 Zoll Ddm. sind wie viele Fuß?

Antw. $8'' = \frac{8}{12}$ F. $= \frac{2}{3}$ F.

4. $\frac{1}{17}$ Linien Ddm. sind wie viele Zoll?

Antw. $\frac{1}{17}$ L. $= \frac{1}{17.12}$ Z. $= \frac{1}{204}$ Zoll.

5. $9\frac{3}{5}$ Zoll Ddm. sind wie viele Fuß?

Antw. $9\frac{3}{5}$ Z. $= \frac{9\frac{3}{5}}{12}$ F. $= \frac{48}{5.12}$ F. $= \frac{4}{5}$ F.

Anmerk. In der Resolution hat man also die Zahl der übergeordneten Maße mit der Reduktionszahl zu multipliciren, um die Zahl der nächsten untergeordneten Maße zu erhalten; bei der Reduktion muß man umgekehrt verfahren; man muß nämlich die Zahl der untergeordneten Maße stets mit der Reduktionszahl dividiren, wenn man die Zahl der nächsten übergeordneten Maße erhalten will.

b) Anwendung der 4 Species auf über- und untergeordnete Maße.

1) Addition.

1. Ein Tischler soll einen Spiegelrahmen mit Mahagoni belegen, deswegen mißt er die Höhe und Breite des Spiegels, und findet für die Höhe $12' 8'' 9'''$, für die Breite $2' 6'' 8'''$. Wie lang muß das dazu erforderliche Holz sein?

12′	8″	9‴
12	8	9
2	6	8
2	6	8
30′	6″	10‴

Die Höhe muß doppelt genommen werden, weil der Rahmen zu beiden Seiten des Spiegels sich befindet; eben so die Breite, ober- und unterhalb des Spiegels.

2. Ein Feldmesser vermißt ein Feld, das 8 Seiten hat, und findet für dieselben folgende Längen: $288° 9' 8''$; $225° 7' 9''$; $436° 4' 6''$; $322° 3' 8''$; $627° 6' 6''$; $108° 7' 3''$; $96° 8' 8''$ und $115° 2' 4''$. Wie groß ist der Umfang dieses Feldes?

288°	9′	8″
225	7	9
436	4	6
322	3	8
627	6	6
108	7	3
96	8	8
115	2	4
2222°	1′	2″

Die Feldmesser rechnen nach dem Decimalmaß.

Der Umfang des Feldes beträgt also 2222 Ruthen 1 Fuß und 2 Zoll, daher über eine Meile.

Digitized by Google

3. Ein Tuchhändler vermißt einige Reste von Tuch, und findet den Rest A $12\frac{3}{4}$, B $8\frac{4}{8}$, C $3\frac{9}{16}$, D $7\frac{1}{4}$, E $4\frac{7}{8}$, F $13\frac{5}{16}$, G $14\frac{7}{16}$ Ellen lang. Wie viele Ellen halten diese 6 Reste? $65\frac{1}{16}$ Ellen.

2) Subtraktion.

1. Ein Weg von 5 Meilen 875 Ruthen 8 Fuß Länge soll in eine Chaussee verwandelt werden; die hierbei angestellten Arbeiter haben in einer gewissen Zeit die Chaussee 2 Meilen 914 Ruthen 9 Fuß weit geführt; welche Strecke ist noch zu bearbeiten? Die Meile = 2000 Ruthen nach dem Decimalmaß.

5 M.	875°	8′
2 „	914°	9′
2 „	1960°	9′

Es bleiben also noch 2 Meilen 1960 Ruthen 9 Fuß zu bearbeiten.

2. Ein Bergwerks-Schacht hat die Tiefe von 53 Lachtern 3 Achteln 5 Lachterzollen 7 Primen; aus demselben zieht man an einem Seile ein Stück Erz in die Höhe; das Seil reißt; man mißt den Theil desselben, der im Schachte war, und findet ihn 17 Lachter 5 Achtel 7 Lachterzoll und 8 Primen. Aus welcher Höhe fiel das Erz auf den Grund zurück?

53 Lachter	3 Achtel	5 Zoll	7 Primen	
17 „	5 „	7 „	8 „	
35 Lachter	5 Achtel	7 L. Z.	9 Primen.	

3) Multiplikation.

1. Jede Seite eines Vierecks mißt 3 Fuß 8 Zoll 9 Linien; wie lang ist der Umfang desselben?

3′	8″	9‴
		4
14′	11″	0‴

Der Umfang des Vierecks beträgt 14 Fuß 11 Zoll.

2. Wenn man die Länge: 69 Ruthen 8 Fuß 7 Zoll 5 Linien im Ddm. mit 75 multiplicirt, so erhält man welche Länge?

	69°	8′	7″	5‴
				75
	345°	600′	525″	375‴
483				
5229°	10′	4″	3‴	

Anmerk. In diesem Abschnitte sollen nur gleichartige Größen vorkommen, also nicht ungleichartige, daher bringe man hier nicht Zeit in Rechnung, sondern lasse den Multiplikator eine unbenannte Zahl sein; der Zweck ist erreicht, wenn der Schüler einsieht, daß er jede Zahl der Maße mit dem Multiplikator multipliciren muß. Es versteht sich von selbst, daß sowohl nach der Addition, wie auch nach der Multiplikation eine Reduktion vorgenommen werden müsse, wenn die Zahl der untergeordneten Maße größer als die Reduktionszahl ist. Bei der Subtraktion und Division hat man die Resolution anzuwenden.

Digitized by Google

4) Division.

1. Ein Uhrmacher mißt sehr genau den Umfang einer Thurmuhrscheibe, die ein Kreis ist, und findet denselben 8 Fuß 7 Zoll 9 Linien 6 Skrupel. Diesen Umfang theilt er in 12 gleiche Theile, den Abstand einer Ziffer von der andern zu finden. Wie groß ist dieser Abstand?

$8' 7'' 9''' 6'''' : 12 = 8'' 7''' 9\frac{1}{2}''''$.

2. Ein Balken von 36 Fuß 9 Zoll 10 Linien Länge soll in 8 gleichlange Klötze zersägt werden; welche Länge erhält ein Klotz?

$36' 9'' 10''' : 8 = 4' 7'' 2\frac{3}{4}'''$. Die Länge eines Klotzes ist also 4 Fuß 7 Zoll $2\frac{3}{4}$ Linien. Den Rest der Fuße resolvirt man in Zoll und nimmt die gegebene Zahl Zolle dazu. Den Rest der Zolle resolvirt man in Linien, und nimmt dazu die gegebene Zahl Linien. ꝛc.

```
32
4.12''
57
56
1.12'''
22
16
6
```

3. Ein in Folio gebundenes Buch, dessen Länge, genau gemessen, 1 Fuß 3 Zoll 8 Linien 9 Skrupel mißt, will man so liniiren, daß eine Linie von der andern in einem Abstande von 7 Linien 8 Skrupel abstehe; wie viele Linien kann man ziehen?

Man wird hier am einfachsten verfahren, wenn man sowohl die Länge des Buches als auch die des Abstandes zweier Linien von einander in Skrupel verwandelt. $2265'''' : 92'''' = 24\frac{57}{92}$.

Der Quotient zeigt die Zahl der Zwischenräume an; diese kann nur eine ganze Zahl sein; also muß der Bruch vernachlässigt werden, und es giebt daher 24 Spatien. Jeder Zwischenraum ist von zwei Linien begrenzt, daher giebt es $24 . 2 = 48$ Linien; davon die beiden, welche die Enden eines Blattes ausmachen, hinweggenommen, so bleiben 46 Linien, jede ist aber doppelt gerechnet, also lassen sich 23 Linien auf jeder Seite eines Blattes ziehen.

c) Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

Die Angaben zur Aufsuchung der Verhältnisse gleichartiger Größen können entweder auf einfache oder zusammengesetzte Verhältnisse führen. Man erlangt durch einfache Verhältnisse das gesuchte, wenn entweder eine Gleichung zwischen den Größen, deren Verhältniß gesucht wird, gegeben ist, oder wenn jede von ihnen durch eine und dieselbe Größe ausgedrückt ist. Dagegen muß man zusammengesetzte Verhältnisse anwenden, das gesuchte Verhältniß zu ermitteln, wenn mehrere Mittelgrößen zwischen ihnen liegen, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind und von denen die äußern Größen zu den beiden Größen, deren Verhältniß gesucht wird, gleichfalls in gegebenen Verhältnissen

Digitized by Google

stehen. Da die Aufsuchung der Verhältnisse schwieriger ist als die vorhergehenden Rechnungen, so müssen hier auch mehrere Aufgaben als dort gegeben werden.

α) Einfache Verhältnisse.

1. Ein Fuß ist gleich 12 Zoll, wie verhält sich ein Fuß zu einem Zoll?

Aufl. Gleiche Größen haben zu gleichen Größen gleiche Verhältnisse; daher ist das Verhältniß von 1 F. zu 1 Z. gleich dem Verhältnisse von 12 Zoll zu 1 Zoll; folglich ist:

$$1\,\text{F.} : 1\,\text{Z.} = 12\,\text{Z.} : 1\,\text{Z.} = 12 : 1.$$

2. 10 Fuß Decimalmaß sind gleich 12 Fuß Duodecimalmaß; wie verhält sich ein geometrischer Fuß zu einem Werkfuß?

Aufl. 1. Man theile jeden geometrischen Fuß in 12 gleiche Theile und nenne jeden Theil a; so ist 1 geom. Fuß $= 12\,a$, und die 10 geom. Fuße sind also $= 10 \cdot 12\,a = 120\,a$.

Ferner theile man jeden Werkfuß in 10 gleiche Theile, und bezeichne jeden dieser Theile mit b; so ist 1 Werkfuß $= 10\,b$; daher sind die 12 Werkfuße $= 12 \cdot 10\,b = 120\,b$.

Da nun 10 geom. Fuße $=$ 12 Werkfußen sind: so sind auch die $120\,a =$ den $120\,b$. Nimmt man nun von diesen gleichen Größen die gleichvielsten Theile, so müssen die auch einander gleich sein; $\frac{1}{120}$ von $120\,a$ ist ein a, und $\frac{1}{120}$ von $120\,b$ ist ein b, daher ist $a = b$; also kann man anstatt b den Theil a setzen; daher sind 10 geom. Fuß $= 120\,a =$ 12 Werkfußen.

Da nun 1 geom. Fuß $\frac{1}{10}$ von 10 dieser Fuße ist; so ist 1 geometr. Fuß $= \frac{1}{10}$ von $120\,a = 12\,a$; und weil 1 Werkfuß $\frac{1}{12}$ von 12 Werkfußen ist; so ist 1 Werkfuß $= \frac{1}{12}$ von $120\,a = 10\,a$.

Da nun gleiche Größen zu gleichen gleiche Verhältnisse haben; so ist 1 geom. Fuß : 1 Werkfuß $= 12\,a : 10\,a = 12 : 10$.

Aufl. 2. 10 geom. Fuße, so wie 12 Werkfuße kann man als zwei Produkte betrachten; nämlich 10 geom. Fuße $=$ 10 mal 1 geom. Fuß, und 12 Werkfuße $=$ 12 mal 1 Werkfuß. Nun ist aber der Satz: Wenn zwei Produkte einander gleich sind: so stehen ihre Faktoren im wiederkehrenden (umgekehrten) Verhältnisse, erwiesen; daher muß sein, weil $10 \cdot 1$ geom. Fuß $= 12 \cdot 1$ Werkfuß ist, 1 geom. Fuß : 1 Werkfuß $= 12 : 10$.

Anmerk. Aus den beiden vorstehenden Aufl. ergiebt sich folgender allgemeiner Satz: „Wenn zwei Vielfache zweier Maße einander gleich sind: so stehen die einzelnen Maße im wiederkehrenden oder umgekehrten Verhältnisse ihrer Multiplikatoren (Vervielfacher oder Anzahlen).“ Diesen Satz hat man sich für das Nachfolgende zu merken; denn bei ähnlicher Gelegenheit wird stets auf denselben zurückgewiesen werden.

Der Lehrer hat in diesen Auflösungen die durch den Druck hervortretenden Sätze besonders hervorzuheben, weil sie die Gründe der Schlüsse enthalten. Die

Digitized by Google

erste der obigen Aufl. verdient wohl vor der zweiten den Vorzug; doch bleibt Jedem überlassen, welche von beiden er zu seinem Zwecke anwenden will.

3. Wenn 14 Englische Meilen gleich 3 Preußischen und 23 Engl. gleich 5 Deutschen oder geographischen sind; wie verhält sich eine Engl. Meile zu einer Preuß. und Deutschen?

1 Engl. Ml. : 1 Preuß. Ml. = 3 : 14.

1 Engl. Ml. : 1 Deutschen Ml. = 5 : 23.

Anmerk. Der Lehrer hat eine Menge Aufgaben ähnlicher Art den Schülern vorzulegen, und diese kann Er sich selbst leicht bilden, wenn Er Folgendes beobachten will. Aus irgend einem Buche über Münzen, Maße und Gewichte nimmt Er zwei gleichartige Größen, hier Längenmaße, z. B. findet man in Reikenbrecher 1 Leipziger Elle = 250$\frac{2}{3}$ Franz. Linien, 1 Preuß. Elle = 295,$_{66}$ Pariser Linien (Franz. und Pariser Linien bedeuten dieselben Linien); hieraus folgt: 1 Leipziger Elle : 1 Preuß. Elle = 250$\frac{2}{3}$: 295,$_{66}$.

Da nun in jeder Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern ist, so folgt aus vorstehender Proportion 295,$_{66}$ Leipz. Ellen = 250$\frac{2}{3}$ Preuß. Ellen, und schafft man die Nenner weg, indem man die gleichen Größen durch den kleinsten Generalnenner, hier durch 100, multiplicirt, so erhält man 29 565 Leipz. Ellen = 25 060 Preuß. Ellen, und durch das größte gemeine Maß dividirt, giebt 5913 Leipz. Ellen = 5012 Preuß. Ellen. Drückt man diese Verhältnisse durch Kettenbrüche aus, um sie ziemlich genau in kleinern Zahlen zu erhalten, so findet man 6 Leipz. Ellen = 5 Preuß. Ellen; oder 13 Leipz. Ellen = 11 Preuß. Ellen; oder 72 Leipz. Ellen = 61 Preuß. Ellen. ꝛc.

4. Ein Preuß. Fuß ist gleich 139,$_{13}$ Pariser Linien, ein Meter ist gleich 443,$_{296}$ Pariser Linien, eine Engl. Yard = 405,$_{3}$ Par. Lin., eine Russische Arschin (Elle) = 315,$_{4}$ Par. Lin., eine Wiener Elle = 345,$_{4}$ Par. Lin., eine Römische Kanna (Elle) = 882 Par. Linien, eine Spanische Vara (Elle) = 375,$_{9}$ Par. Lin., eine Schwedische Elle = 263,$_{2}$ Par. Linien. ꝛc. Wie verhält sich nach diesen Angaben der Preuß. Fuß zu den übrigen Längenmaßen, oder wie verhalten sich diese Maße zu einander?

1 Preuß. F. : 1 Meter = 139,$_{13}$: 443,$_{296}$ = 69 565 : 221 648.

1 Preuß. F. : 1 Yard = 139,$_{13}$: 405,$_{3}$ = 13 913 : 40 530. ꝛc.

1 Meter : 1 Yard = 443,$_{296}$: 405,$_{3}$ = 110 824 : 101 325. ꝛc.

β) Zusammengesetzte Verhältnisse.

Aus dem reinen Rechnen werden hier folgende Sätze als bekannt vorausgesetzt: **Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man das Produkt der Vorderglieder zum Produkte der Hinterglieder in Verhältniß setzt.** Ferner: **Wenn man die Glieder eines Verhältnisses durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt: so erhält man ein Verhältniß, das dem gegebenen gleich ist. Proportionen werden zusammengesetzt, wenn man die Produkte der gleichvielsten Glieder derselben in Verhältniß setzt. Durch Zusammensetzung zweier oder mehrerer Proportionen erhält man wieder eine Proportion.**

Digitized by Google

1. Ein Werkfuß = 12 Zoll; 1 geom. Fuß = 10 Zoll; 12 Werkfuß = 10 geom. Fuß; wie verhält sich ein Duodecimalzoll zu einem Decimalzoll?

1 Ddm.Z. : 1 Wf. = 1 : 12
1 Wf. .: 1 geom.F. = 10 : 12
1 geom. F. : 1 Dm.Z. = 10 : 1

1 Ddm.Z. : 1 Dm.Z. = 100 : 144 = 25 : 36.

Proportionen oder Verhältnisse zusammenzusetzen, wird man sie also auf die Weise anordnen, daß das Vorderglied des ersten Verhältnisses eine der Größen ist, deren Verhältniß gesucht wird, und daß das Hinterglied des letzten Verhältnisses die andere dieser Größen ist; die Mittel-Verhältnisse sind ferner so beschaffen, daß ihr Vorderglied gleich dem Hintergliede des unmittelbar vorhergehenden Verhältnisses ist; dann folgt hieraus sogleich, daß das Verhältniß des Vordergliedes im ersten zum Hintergliede im letzten Verhältnisse gleich ist dem Verhältnisse des Produkts der Vorderglieder zum Produkte der Hinterglieder in den andern Verhältnissen.

2. 100 Preuß. Ellen sind = 116,4 Hamburger Ellen; 100 Hamb. Ellen = 100,4 Braunschweiger Ellen; 100 Braunschweiger Ellen = 98,67 Bremer Ellen; 100 Bremer Ellen = 84,09 Amsterdamer Ellen; 100 Amsterdamer Ellen = 98,16 Brabanter Ellen; 100 Brabanter Ellen = 58,388 Pariser Aunes; 1 Pariser Aune = 2,036 Florenzer Braccia; 100 Florenzer Braccia = 96,746 Turiner Ellen; 100 Turiner Ellen = 77,4 Wiener Ellen; 100 Wiener Ellen = 130,98 Mailänder Braccia. Wie verhält sich jede dieser Maße zu den übrigen?

1 Preuß. Elle : 1 Hamb. Elle = 116,4 : 100;
1 Hamb. E. : 1 Braunschw. E. = 100,4 : 100;
1 Braunschw. E. : 1 Bremer E. = 98,67 : 100;
1 Bremer E. : 1 Amstd. E. = 84,09 : 100;
1 Amstd. E. : 1 Brab. E. = 98,16 : 100;
1 Brab. E. : 1 Par. Aune = 58,388 : 100;
1 Par. Aune : 1 Flrz. Brac. = 2,036 : 1;
1 Flrz. Brac. : 1 Tur. E. = 96,746 : 100;
1 Tur. E. : 1 Wien. E. = 77,4 : 100;
1 Wien. E. : 1 Mailänd. Brac. = 130,98 : 100.

Durch Zusammensetzung dieser Proportionen wird man das Verhältniß beliebig zweier Maße finden; will man z. B. das Verhältniß einer Preuß. Elle zu einer Pariser Aune wissen, so wird man dasselbe durch Zusammensetzung der ersten 6 Proportionen erhalten; wollte man das Verhältniß der Bremer Elle zur Wiener Elle haben, so setzt man die 6 Proportionen, von der 4ten bis zur 9ten (beide mitgerechnet), zusammen.

Digitized by Google

2) Geometrische Proportionen.

Schon im Vorigen kamen Proportionen vor, obgleich die Ueberschrift nur Verhältnisse anzeigte, und dieses ist so zu verstehen; in diesem Abschnitte sollen nicht unbenannte, sondern benannte Größen behandelt werden; daher wurden nur die Verhältnisse in Betracht gezogen, deren Glieder benannte Größen enthielten, solcher Verhältnisse gab es aber in jeder Proportion nur eins, daher wurde nur von Verhältnissen gesprochen. Hieraus geht hervor, daß in dieser Rubrik die Glieder beider Verhältnisse einer Proportion benannte Zahlen sein müssen. Vermittelst dieser Proportionen sollen gegebene Quantitäten der Maße des einen Landes in gleichartige Größen eines andern Landes verwandelt, oder überhaupt eine gegebene Zahl Maße nach einer gewissen Eintheilung in Maße nach einer andern Eintheilung ausgedrückt werden. Diese Verwandlung kann nun entweder vermittelst Schlüsse, ohne Form der Proportionen, oder mit Anwendung der Form derselben bewerkstelligt werden. Die Rechnung vermittelst Schlüsse fordert für jede besondere Aufgabe ein scharfes Durchdenken derselben, die mit Anwendung der Form der Proportionen führt nach und nach auf gewisse Regeln, die, wenn sie auch den Rechner nicht jedes Nachdenkens überheben, doch die Auffindung des Zusammenhanges zwischen dem Gegebenen und Gesuchten sehr erleichtern; aus diesem Grunde ist es nützlich, jede dieser Rechnungsarten zu üben, nämlich durch Schlüsse zur Schärfung des Verstandes; durch die Form zur leichtern Erreichung des Gesuchten, um auch diejenigen Schüler zu fertigen Rechnern zu machen, bei welchen das Gedächtniß stärker als der Verstand hervortritt. Ueberdies findet die Form der Proportionen in der Geometrie, nämlich in der Lehre von den ähnlichen Vielecken und Körpern, Anwendung; daher muß die Form der Proportionen auch aus diesem Grunde in Ausübung gebracht werden. Die Form der Proportionen ist nun im praktischen Rechnen zweifach, nämlich entweder als Gleichheit der Verhältnisse, welches die eigentlichen Proportionen sind, oder als Gleichungen, die auf den Kettensatz führen; beide Arten werden im Folgenden genauer betrachtet werden.

1. Da 12 Fuß Ddm. gleich 10 Fuß Dm. sind; so betragen 96 Fuß Ddm. wie viele Fuß Dm.?

Aufl. 1) durch Schlüsse. So oft 96 F. Ddm. 12 F. enthalten, eben so oft muß die gesuchte Zahl 10 F. Dm. in sich begreifen; daher ist die gesuchte Zahl $= \frac{96.10}{12} = 80$ F. Dm.

2) durch eigentliche Prop. 12 F. : 96 F. = 10 F. : x.
Da nun das vierte Glied einer Proportion gleich dem Produkte der innern dividirt durch das erste ist, so folgt $x = \frac{96.10}{12} = 80$.

Digitized by Google

3) durch den Kettensatz. x F. Dm. = 96 F. Ddm.
12 = 10 F. Dm.

12	960	80 F. Dm.

Nach dem Kettensatze heißt es: wie viele F. Dm. sind gleich 96 F. Ddm., wenn 12 F. Ddm. gleich 10 F. Dm. sind; ꝛc. Das Genauere über den Kettensatz wird später folgen.

2. Im Artikel Berlin bemerkt Nelkenbrecher Folgendes; »Auf Messen rechnet man die Engl. Yard = $1\frac{1}{8}$ Berliner Ellen; die Franz. Aune oder den Stab zu $1\frac{1}{4}$ Berliner Ellen und die Leipziger Elle = $\frac{7}{8}$ Berliner Ellen.« Nach diesen Angaben sind 100 Engl. Yard, 100 Franz. Aunes, 100 Leipz. Ellen wie viele Berliner Ellen?

1) 100 Engl. Yard = $100 . \frac{1}{8} = 137,_5$ Berliner Ellen.
100 Franz. Aunes = $100 . \frac{7}{4} = 175$ » »
100 Leipz. Ellen = $100 . \frac{7}{8} = 87,_5$ » »

2) 1 Y. : 100 Y. = $1\frac{1}{8}$ Berl. E. : x; also x = $100 . 1\frac{1}{8}$ Berl. E. ꝛc.

3) x = 100 Franz. Aunes
4.1 = 7 Berl. Ellen

4	700	175 Berl. Ellen.

Wenn ein Bruch im Kettensatze vorkommt, so multiplicirt man mit dem Nenner jede Säule des Kettensatzes. ꝛc.

3. Im Artikel Leipzig bemerkt Nelkenbrecher wie folgt: »Im Kleinen sind: 5 Brab. Ellen = 6 Leipziger oder Braunschweiger Ellen, oder 4 Span. Varas; 4 Brab. E. = 5 Frankf. E.; 10 Leipz. E. = 9 Dänischen Ellen; 3 Leipz. E. = 2 Span. Varas, und 8 Leipz. E. = 5 Engl. Yards.« Nach diesen und den Angaben der vorigen Aufgabe betragen 100 Brab. Ellen, 100 Span. Varas, 100 Frankf. Ellen, 100 Dänische Ellen wie viele Berliner Ellen?

1) Durch Schlüsse. Da 5 Brab. E. = 6 Leipz. E. sind, so werden 100 Brab. E. so vielmal 6 Leipz. E. enthalten, als sie 5 Brab. E. in sich fassen; also 100 Brab. E. = $\frac{100 . 6}{5}$ = 120 Leipz. Ellen. Nun ist 1 Leipz. E. = $\frac{7}{8}$ Berl. E.; daher sind 120 Leipz. E. = $120 . \frac{7}{8}$ Berl. E. = 105 Berl. E.

2) Durch Prop. 2 Span. V. : 100 Span. V. = 3 Leipz. E. : a Lpz. E.
8 Leipz. E. : 7 Berl. E. = a : x Brl. E.

4	: 175	= 3	: x = $131\frac{1}{4}$.

Durch die erste Proportion werden 100 Span. Varas in a Leipz. E., und durch die zweite a Leipz. E. in x Berl. E. verwandelt; durch Zusammensetzung der Proportionen umgeht man aber die Berechnung der a Leipz. Ellen.

Digitized by Google

3) Durch den Kettensatz.

x Berl. E.	=	4 ~~100~~ Frankf. E.
~~5~~	=	2 4 Brab. E.
~~5~~	=	6 Leipz. E.
~~2~~ ~~8~~	=	7 Berl. E.
		84 Berl. Ellen.

Mit dem Produkte der Zahlen in der Säule zur Linken hat man in das Produkt der Zahlen der Säule zur Rechten zu dividiren, was dadurch geschieht, daß man mit jedem Faktor der ersten Säule in einen Faktor der andern dividirt; so ist 5 . 5 in 100 4 mal, diese 4 in 8 2 mal, und diese 2 in 4 wieder 2 mal enthalten; daher die gesuchte Zahl = 2 . 6 . 7 = 84 Berl. Ellen. Auf die vierte Frage erhält man zur Antwort: 100 Dänische E. = $97\frac{2}{9}$ Berl. E.

4. Im Artikel Frankfurt am Main sagt Nelkenbrecher: »Es vergleichen sich im Kleinen: 6 Pariser Stab mit 13 Frankfurter Ellen. 4 Brab. Ellen, oder 3 Engl. Yards mit 5 Frankf. Ellen. 6 Meter mit 11, und 5 Berliner Ellen mit 6 Frankf. Ellen. 6 Leipz. Ellen mit 5, und 8 Wiener Ellen mit 9 Brab. Ellen. 100 Meter, 100 Wiener Ellen sind wie viele Berliner Ellen? Man nehme die Angaben der beiden vorigen Aufgaben zu Hilfe.

1. Durch Schlüsse. Da 6 Meter = 11 Leipz. E., so sind 100 Meter so vielmal 11 Leipz. Ellen, wie vielmal 100 Meter 6 Meter enthalten; also 100 Meter = $\frac{100 . 11}{6}$ Leipz. E. Nun ist 1 Leipz. E. = $\frac{7}{8}$ Berl. E.; daher $\frac{100 . 11}{6}$ Leipz. E. = $\frac{100 . 11}{6} . \frac{7}{8} = 160\frac{5}{12}$ Berl. Ellen.

2) Durch Proportionen.

8 Wiener E.	:	100 Wiener E.	=	9 Brab. E.	: a Brab. E.
5 Brab. E.	:	6 Leipz. E.	=	a	: b Leipz. E.
8 Leipz. E.	:	7 Berl. E.	=	b	: x Berl. E.
8	:	105	=	9	: x = $118\frac{1}{8}$ Berl. E.

3) Durch den Kettensatz.

x Berl. E.	=	~~100~~ ~~20~~ 5 Wiener E.	
2 ~~8~~	=	9 Brab. E.	
~~5~~	=	6 Leipz. E.	
8	=	7 Berl. E.	
8		945	$118\frac{1}{8}$ Berl. E.

Die Glieder des Kettensatzes haben folgende Verbindung: wie viele Berl. E. sind gleich 100 Wiener E., wenn 8 W. E. = 9 Brab. E., wenn 5 Brab. = 9 Leipz., und 8 Leipz. E. = 7 Berl. E. sind?

5. Nelkenbrecher bemerkt bei Hamburg, daß 5 Brab. Ellen = 6 Hamb. Ellen im Kleinen gerechnet werden; so sind 100 Hamb. Ellen wie viele Berliner Ellen?

1) Durch Schlüsse. Weil 6 Hamb. E. = 5 Brab. Ellen, so ist 1 Hamb. E. = $\frac{5}{6}$ Brab. E.; also sind 100 Hamb. E. = 100 . $\frac{5}{6}$ Brab. E. Da (nach Aufg. 3.) 5 Brab. E. = 6 Leipz. E. sind, so ist 1 Brab. E. = $\frac{6}{5}$ Leipz. E., daher sind 100 . $\frac{5}{6}$ Brab. E. = 100 . $\frac{5}{6}$. $\frac{6}{5}$ Leipz. E., und weil

Digitized by Google

(nach Aufg. 2.) 1 Leipz. E. = $\frac{7}{8}$ Berl. E., so sind 100 . $\frac{4}{5}$. $\frac{6}{7}$ Leipz. E. = 100 . $\frac{4}{5}$. $\frac{6}{7}$. $\frac{7}{8}$ Berl. E. Folglich sind 100 Hamb. E. = 100 . $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{7}{8}$ = 87$\frac{1}{2}$ Berl. Ellen.

2) Durch Proportionen.

6 Hamb. E.	:	100 Hamb. E.	= 5 Brab. E.	: a Brab. E.
5 Brab. E.	:	6 Leipz. E.	= a	: b Leipz. E.
8 Leipz. E.	:	7 Berl. E.	= b	: x Berl. E.
2	:	35	= 5	: x = 87$\frac{1}{2}$ Berl. E.

3) Durch den Kettensatz.

x Berl. E.	= 25 ~~100~~ Hamb. E.	Wie viele Berl. E. sind = 100 Hamb.	
6	= 5 Brab. E.	E., wenn 6 Hamb. E. = 5 Brab. E.,	
5	= 6 Leipz. E.	wenn 5 Brab. E. = 6 Leipz. E., wenn	
2 8	= 7 Berl. E.	8 Leipz. E. = 7 Berl. E. sind?	
2	175	87$\frac{1}{2}$ Berl. E.	

6. Man findet ferner in kleinen Zahlen folgende Angaben im Neikenbrecher: Ancona, 27 Braccia = 19 Engl. Yards; 31 Bamberger Fuß = 30 Rheinl. Fuß; Bassora, 36 Guz (Ellen) = 37 Engl. Yards; Bergamo, 19 Braccia = 18 Brab. Ellen; 61 Berner Fuß = 57 Rheinl. Fuß; 67 Bologneser Fuß = 81 Rheinl. Fuß; 80 Bologneser Fuß = 99 Engl. Fuß; 5 Brab. Ellen = 6 Bremer Ellen; 10 Badensche Ellen = 6 Meter; 8 Badensche Ellen = 7 Brab. Ellen; 35 Danziger Fuß = 32 Rheinl. Fuß; Genua, 5 Palmi = 4 Rheinl. Fuß; Lissabon, 5 Varas (Elle im Großhandel) = 6 Engl. Yards, 27 Covados (Elle im Kleinhandel) = 20 Engl. Yards; 10 Russische Arschinen = 13 Rigaer Ellen; Rio Janeiro, 5 Varas = 6 Engl. Yards = 8 Brab. Ellen, 4 Covados = 3 Engl. Yards; 9 Russische Arschinen = 7 Engl. Yards; 10 Spanische Fuß = 9 Rheinl. Fuß; 3 Span. Fuß = 1 Spanische Vara; 2 Turiner Rasi (Ellen) = 1 Franz. Aune; Warschau, 25 Ellen = 24 Franz. Aunes; 100 Wiener Ellen = 71 Lissaboner Varas; 68 Züricher Schuh = 65 Rheinl. Fuß; 5 Züricher Ellen = 3 Meter; 2 Züricher Ellen = 1 Franz. Aune.

Nach diesen und den frühern Angaben betragen 100 dieser Maße wie viel in Preußischen Maßen derselben Art, wenn eine Preuß. Elle = 25$\frac{1}{2}$ Preuß. Zollen ist? Der Rheinl. Fuß soll dem Preuß. Fuße gleich sein. Ferner ist 1 Yard = 3 Engl. Fuß.

Es werde folgendes Beispiel: 100 Rigaer Ellen betragen wie viele Preuß. Ellen, hier gelöset.

1) Durch Schlüsse. Da 13 Rigaer Ellen = 10 Arschinen, so ist 1 Rigaer Elle = $\frac{10}{13}$ Arschinen; also 100 Rigaer Ellen = 100 . $\frac{10}{13}$ Arschinen. Nun sind 9 Arschinen = 7 Yards, also 1 Arschine = $\frac{7}{9}$ Yard; daher 100 . $\frac{10}{13}$ Arschinen = 100 . $\frac{10}{13}$. $\frac{7}{9}$ Yards. Ferner sind (Aufg. 3.) 8 Leipz.

Digitized by Google

Ellen = 5 Yard, also 1 Yard = $\frac{8}{5}$ Leipz. Ellen; folglich $100.\frac{10}{13}.\frac{7}{9}$ Yards = $100.\frac{10}{13}.\frac{7}{9}.\frac{8}{5}$ Leipz. Ellen, und 1 Leipz. Elle = $\frac{7}{8}$ Berl. Ellen; also sind 100 Rigaer Ellen = $100.\frac{10}{13}.\frac{7}{9}.\frac{8}{5}.\frac{7}{8} = \frac{125.7.8.7}{13.9.5} = 83,_{76}$ Berliner Ellen.

2) Durch Proportionen.

13 Rigaer E.	: 100 Rigaer E.	= 10 Arschinen		: a Arschinen
9 Arschinen	: 7 Yards	= a		: b Yard
5 Yard	: 8 Leipz. E.	= b		: c Leipz. E.
8 Leipz. E.	: 7 Berl. E.	= c		: x Berl. E.
117	: 980	= 10		: x = 83,$_{76}$ Berl. Ellen.

3) Durch den Kettensatz.

x Berl. E.	=	100 Rigaer E.	
13	=	2 10 Arschinen	
9	=	7 Yards	
5	=	8 Leipz. E.	
8	=	7 Berl. E.	
117		9800	83,$_{76}$ Berl. Ellen.

Anmerk. 1. Die Rechnung vermittelst Schlüsse bedarf keiner Erläuterung; denn sie ist klar; die aber mit Proportionen und dem Kettensatze fordern eine kurze Auseinandersetzung.

Es ist früher bemerkt worden, daß man mit Zahlen gleichnamiger Dinge wie mit unbenannten Zahlen rechnen könne, weil gleichnamige Dinge unter einander gleich sind; daher ist auch das Verhältniß der Anzahlen gleichnamiger Dinge gleich dem Verhältnisse ihrer Anzahlen; folglich ist 7 Leipz. Ellen : 9 Leipz Ellen = 7 : 9; eben so ist 13 Rig. E. : 100 Rig. E. = 13 : 100 ꝛc.; und wenn die Namen der Dinge bei ihren Anzahlen stehen, so sollen sie nur andeuten, von welchen Dingen die Rede ist.

In den Proportionen stehen nicht immer gleichnamige Dinge in Verhältniß, und dieses ist in der That nicht nothwendig; denn die in Verhältniß stehenden Dinge sind gleichartige Größen, und da die eine derselben ein Vielfaches der andern sein kann, so können sie auch zu einander in einem Verhältnisse stehen.

Ferner muß man sich die Sätze von den Proportionen merken: wenn die Glieder des einen Verhältnisses einer Proportion einander gleich sind: so sind auch die Glieder des andern Verhältnisses dieser Proportion einander gleich. Z. B. steht oben: 9 Arschinen : 7 Yards = a Arschinen : b Yards; da nun nach der Angabe der Aufgabe 9 Arschinen = 7 Yards, so müssen auch a Arschinen = b Yards sein.

Da die nicht berechneten Zahlen a, b, c ꝛc. ohne Einfluß auf die Rechnung sind, so kann man sie aus den Prop. auslassen, oder sie in dieselben nicht setzen, und daher kann man obige Prop. so schreiben:

13 Rigaer E. : 100 Rigaer E.
9 Arschinen : 7 Yards
5 Yards : 8 Leipz. E.
8 Leipz. E. : 7 Berl. E.
} = 10 Arsch. : x Berl. E.

Diese Form soll künftig beobachtet werden.

Digitized by Google

Anmerk. 2. Der Kettensatz besteht aus Gleichungen, die so mit einander verbunden sind, daß das Glied rechts vom Gleichheitszeichen stets mit dem ersten Gliede (dem Gliede links vom Gleichheitszeichen) der folgenden Gleichung gleiche Benennung hat; mit welchen Dingen man also die eine Gleichung schließt, mit denselben muß man die folgende anfangen. Ferner steht im ersten Gliede der ersten Gleichung die gesuchte Zahl und diese muß stets gleiche Benennung mit dem letzten Gliede der letzten Gleichung haben. Es ist nicht nothwendig, daß man die gesuchte Zahl mit x bezeichne, man kann der Kürze wegen diesen Platz leer lassen. Mit dem Produkte der Glieder auf der linken Seite der Gleichheitszeichen hat man in das Produkt der Glieder auf der rechten Seite gedachter Zeichen zu dividiren.

Man kann diese Rechnung sehr verkürzen, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen die gemeinen Maße durch Division hinwegschafft. Kommen Brüche vor, so wird man mit den Nennern die Glieder auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen multipliciren; dieses ist aber nicht so zu verstehen, daß man die Multiplikation wirklich ausführe, sondern daß man sie nur andeute.

Diese Bemerkungen prüfe man an den vorhergehenden und nachfolgenden Beispielen.

II. Flächenräume.

A. Eintheilung der Flächenmaße.

Da Größen nur durch gleichartige gemessen werden können, so werden auch die Flächen durch eine Fläche gemessen. Das Maß der Flächen ist im Allgemeinen ein Viereck, dessen Länge gleich seiner Breite ist; es heißt Quadrat; seine 4 Seiten, so wie seine 4 Winkel sind unter einander gleich; diese Winkel heißen rechte Winkel. Dagegen heißt ein Rechteck ein solches Viereck dessen Winkel rechte sind; die Seiten desselben mögen gleich oder ungleich sein.

Die eine Seite eines Quadrats kann man als seine Länge, die anstoßende Seite als seine Breite betrachten. Dasselbe gilt von den Seiten eines Rechtecks, doch wird die längere von zwei zusammenstoßenden Seiten desselben als seine Länge genommen. Das Quadrat wird nach der Länge einer seiner Seiten benannt; ist eine seiner Seiten einen Fuß lang, so heißt es ein Quadratfuß; ein Quadratzoll ist also ein solches Quadrat, dessen eine Seite einen Zoll lang ist.

Wenn eine Seite eines Quadrats 2, 3, 4, 5 ꝛc. Zoll lang ist, so enthält ein solches Quadrat $2 . 2 = 4$, $3 . 3 = 9$, $4 . 4 = 16$, $5 . 5 = 25$ Quadratzoll. Daher enthält ein Quadratfuß $12 . 12 = 144$ Quadratzoll; eine Quadratruthe $= 12 . 12 = 144$ Quadratfuß nach dem Duodecimalmaß; nach dem Decimalmaß ist aber eine Quadratruthe $= 10 . 10 = 100$ Quadratfuß; ein Quadratfuß $= 10 . 10 = 100$ Quadratzoll; ein Quadratzoll $= 10 . 10 = 100$ Quadratlinien. ꝛc.

Im Allgemeinen erhält man den Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man seine Länge mit seiner Breite multiplicirt, jedoch müssen beide durch dasselbe Maß gemessen oder ausgedrückt sein. Ist die Länge eines Rechtecks 8 Fuß, seine Breite 3 Fuß, so ist sein Flächeninhalt $8 . 3 = 24$ Qua-

Digitized by Google

dratfuß. Der Fußboden, so wie die Decke jedes Zimmers, wenn sie Vierecke sind, liefern Bilder von Rechtecken; auch die Wände eines Zimmers sind Rechtecke; ferner stellt jeder Bogen Papier ein Rechteck dar; die Tischplatte, wenn sie ein Viereck ist, ist gleichfalls ein Rechteck. Der Boden eines Zimmers ist 27 Fuß lang, 18 Fuß breit, so ist er $27 . 18 = 486$ Quadratfuß groß.

Will man den Inhalt eines Rechtecks berechnen, dessen Länge und Breite in über- und untergeordnete Maße angegeben sind, so muß man entweder die übergeordneten in untergeordnete resolviren, oder die untergeordneten in übergeordnete reduciren. Z. B. die Länge eines Tisches sei 5′ 8″ 9‴, seine Breite 2′ 6″ 8‴, so wird man entweder beide Dimensionen in Linien oder beide in Fuß verwandeln. Es sind $5′ 8″ 9‴ = 825‴$ und $2′ 6″ 8‴ = 368‴$; daher ist der Flächeninhalt der Tischplatte $= 825 . 368 = 303\,600$ Quadratlinien. Ferner sind $5′ 8″ 9‴ = 5\frac{35}{48}$ Fuß, $2′ 6″ 8‴ = 2\frac{5}{9}$ Fuß; daher ist der Inhalt der Tischplatte $= \frac{6325}{432}$ Quadratfuß, und beide Resultate müssen einander gleich sein; denn man resolvire das letzte in Quadratzoll, indem man dasselbe durch 144 multiplicirt, weil ein Quadratfuß $=$ 144 Quadratzoll; also $\frac{6325}{432}$ Quadratfuß $= \frac{6325}{432} . 144 = \frac{6325}{3}$ Quadratzoll, und dieses wieder mit 144 multiplicirt, giebt $\frac{6325}{3} . 144 = 6325 . 48 = 303\,600$ Quadratlinien.

Es ist also eine Quadratruthe $=$ 144 Quadratfuß; 1 Quadratfuß $=$ 144 Quadratzoll; 1 Quadratzoll $=$ 144 Quadratlinien. ꝛc.

Die Einheit der Länder-Flächenmaße ist im Preuß. Staate der Preuß. Morgen $=$ 180 Quadratruthen, also ein Rechteck, dessen Breite eine Ruthe und dessen Länge $= 180°$, oder dessen Breite $= 2°$ und Länge $= 90°$, oder dessen Breite $= 3°$ und Länge $= 60°$, oder dessen Breite $= 4°$, $= 5°$, $= 6°$, $= 9°$, $= 10°$, $= 12°$, und dessen Länge $= 45°$, $= 36°$, $= 30°$, $= 20°$, $= 18°$, $= 15°$ ist.

Eine Fläche von 30 Morgen heißt eine Hufe.

B. Rechnungen mit Flächenmaßen.

Dieselben Rechnungen, welche sich mit Längengrößen darstellten, wird man auch mit Flächengrößen vornehmen, also a) Verwandlungen, b) Anwendung der 4 Species, c) geometrische Verhältnisse und Proportionen. Außer diesen giebt es noch zwei andere, nämlich die Berechnung des Flächeninhalts, wenn die beiden Dimensionen, Länge und Breite, gegeben sind, und die Berechnung einer Dimension, wenn die andern und der Flächeninhalt gegeben sind.

Digitized by Google

a) Gegenseitige Verwandlung der über- und untergeordneten Flächenmaße.

1) Resolution. Verwandlung übergeordneter in untergeordnete Maße.

1. Eine Quadratruthe enthält wie viele Quadratzoll?

Aufl. Da eine □Ruthe = 144 □Fuß, und 1 □Fuß = 144 □Zoll, so ist 1 □Ruthe = 144 . 144 = 20 736 □Zoll.

2. 79 Quadratruthen und 85 Quadratfuß sind wie viele Quadratfuß?

Aufl. 1 □Ruthe = 144 □F.; also 79 □Ruthen = 79 . 144 = 9976 □F.; daher 79 □Ruthen und 85 □F. = 10 061 □F.

3. 15 Morgen und 130 Quadratruthen sind wie viele Quadratruthen?

Aufl. 1 Morgen = 180 □Ruthen; daher 15 Morgen = 15 . 180 = 2700 □Ruthen; also 15 Morgen und 130 □Ruthen = 2830 □Ruthen.

4. 48 Hufen 19 Morgen sind wie viele Morgen?

Aufl. 1 Hufe = 30 Morgen, also 48 Hufen = 48 . 30 = 1440 Morgen; daher 48 Hufen 19 Morgen = 1459 Morgen.

5. $\frac{47}{48}$ Quadratfuß betragen wie viele Quadratzoll?

Aufl. $\frac{47}{48}$ □F. = $\frac{47}{48}$. 144 = 47 . 3 = 141 □Zoll.

6. $\frac{5}{7}$ Quadratruthen betragen wie viele Quadrat-Fuß, -Zoll und -Linien?

Aufl. $\frac{5}{7}$ □R. = $\frac{5}{7}$. 144 = $102\frac{6}{7}$ □F.; $\frac{6}{7}$ □F. = $\frac{6}{7}$. 144 = $123\frac{3}{7}$ □Zoll; $\frac{3}{7}$ □Z. = $\frac{3}{7}$. 144 = $61\frac{5}{7}$ □Linien; also sind $\frac{5}{7}$ □Ruthen = 102 □F. + 123 □Z. + $61\frac{5}{7}$ □Linien.

7. $\frac{65}{72}$ Hufen sind wie viele Morgen und Quadratruthen?

Aufl. $\frac{65}{72}$ Hufen = $\frac{65}{72}$. 30 = $27\frac{1}{12}$ Morgen; $\frac{1}{12}$ Morgen = $\frac{1}{12}$. 180 = 15 □Ruthen; also $\frac{65}{72}$ Hufen = 27 Morgen 15 □Ruthen.

2) Reduktion. Verwandlung untergeordneter in übergeordnete Maße.

1. Wie viele Quadratfuß betragen 10 000 Quadratzoll?

Aufl. Da 144 □Zoll = 1 □Fuß, so ist ein □Zoll = $\frac{1}{144}$ □Fuß; also 10 000 □Zoll = $\frac{10000}{144}$ = $69\frac{4}{9}$ □Fuß.

2. 145 797 Quadratzoll betragen wie viele Quadratfuß und -Ruthen?

Aufl. 145 797 □Zoll = $\frac{145797}{144}$ □F. = 1012 □F. und 69 □Z.; 1012 □F. = $\frac{1012}{144}$ □Ruthen = 7 □Ruthen und 4 □Fuß; also sind 145 797 □Zoll = 7 □Ruthen 4 □Fuß und 69 □Zoll.

3. 1 234 567 Quadratfuß sind wie viele Hufen, Morgen, Quadrat-Ruthen und -Fuß?

Aufl. 1 234 567 □F. = $\frac{1234567}{144}$ □Ruthen = 8573 □Ruthen 55 □F., 8573 □Ruthen = $\frac{8573}{180}$ Morgen = 47 Morgen 113 □Ruthen; daher sind 1 234 567 □Fuß = 1 Hufe 17 Morgen 113 □Ruthen 55 □Fuß.

Digitized by Google

4. 152 Quadratruthen 90 Quadratfuß sind wie viele Morgen?

Aufl. 90 □F. = $\frac{90}{144}$ = $\frac{5}{8}$ □Ruthen; also 152$\frac{5}{8}$ □Ruthen = $\frac{152\frac{5}{8}}{180}$ = $\frac{1221}{1440}$ = $\frac{407}{480}$ Morgen.

b) Anwendung der vier Species auf die Flächenmaße.

1) Addition.

1. Ein Haus hat 6 Zimmer, deren Boden mit Dielen ausgelegt werden sollen; daher werden dieselben genau vermessen, und man findet den Boden des Zimmers A =

596 Quadratfuß 108 Quadratzoll 120 Quadratlinien, des Zimmers
B = 418 „ 96 „ 115 „ des Zimmers
C = 354 „ 132 „ 126 „ des Zimmers
D = 284 „ 124 „ 119 „ des Zimmers
E = 272 „ 117 „ 136 „ des Zimmers
F = 256 „ 84 „ 96 „ wie groß ist

der Flächenraum dieser 6 Zimmer?

Antw. 2184 □Fuß 89 □Zoll und 136 □Linien.

2. Ein Bauer besitzt 23 Morgen 75 Quadratruthen 108 Quadratfuß Ackerland, 34 Morgen 128 Quadratruthen 132 Quadratfuß Wiesen, 18 Morgen 140 Quadratruthen 125 Quadratfuß Weideland, 95 Quadratruthen 72 Quadratfuß Gartenland, 28 Morgen 150 Quadratruthen 112 Quadratfuß Wald und 2 Morgen 98 Quadratruthen 84 Quadratfuß Unland (Wege, Raulen ꝛc.); wie groß ist seine Besitzung? Antw. 109 Morgen 114 Quadratruthen und 75 Quadratfuß.

2) Subtraktion.

1. Der innere Raum eines Hauses faßt 820 Quadratfuß und 48 Quadratzoll; darin befinden sich 3 Zimmer, der Boden des einen enthält 208 Quadratfuß 72 Quadratzoll, der des andern 156 Quadratfuß 120 Quadratzoll, der des dritten 96 Quadratfuß und 128 Quadratzoll; die Grundfläche der Mauern zur Absonderung dieser Gemächer beträgt 18 Quadratfuß 126 Quadratzoll; wie groß ist der Raum der Küche und der Hausflur? Antwort 339 □Fuß 34 □Zoll.

2. Ein Bauer hat 3 Söhne und verordnet in seinem Testamente, daß sein Gut, welches aus 8 Hufen 25 Morgen und 136 Quadratruthen besteht, nach seinem Tode unter seine Söhne getheilt werde, und zwar soll der Jüngste 2 Hufen 29 Morgen und 160 Quadratruthen, der mittlere 2 Hufen 28 Morgen und 150 Quadratruthen erhalten; wie vieles Land ist dem ältesten Sohne bestimmt? Antw. 2 Hufen 27 Morgen 6 Quadratruthen.

Digitized by Google

3) Multiplikation.

1. Wenn man 178 Quadratruthen 132 Quadratfuß 128 Quadratzoll 126 Quadratlinien durch 729 multiplicirt; so erhält man welche Fläche?

	□Ruthen	□Fuß	□Zoll	□Linien
729 . 178 □R. =	129 762			
729 . 132 □F. =	668	36		
729 . 128 □Z. =	4	72		
729 . 126 □L. =		4	61	126
	130 434 □R.	112 □F.	61 □Z.	126 □L.

2. In einem Dorfe befinden sich 34 Bauern, deren jeder 3 Hufen 26 Morgen 123 Quadratruthen 132 Quadratfuß Land besitzt; wie groß ist die Landesfläche dieses Dorfes?

34 . 3 H.	= 102 Hufen		
34 . 26 M.	= 29 »	14 Morgen	
34 . 123 □R. =	23 »	42 □Ruthen	
34 . 132 □F. =		31 »	24 □Fuß
	132 Hufen	7 Morgen	73 □Ruthen 24 □Fuß.

4) Division.

1. Ein Landmann bestimmt zu einer Baumschule einen Acker von 148 Quadratruthen 142 Quadratfuß 117 Quadratzoll, und nimmt an, daß jedem Bäumchen ein Platz von 7 Quadratfuß 81 Quadratzoll angehöre; wie viele Bäumchen kann er auf den Acker pflanzen?

Am kürzesten verfährt man hier, wenn man die Flächenmaße in Quadratzoll verwandelt und mit der Fläche eines Bäumchens in den ganzen Flächenraum dividirt.

$$7\ \square F.\ 81\ \square Z. = 7 . 144 + 81 = 1089\ \square Zoll.$$
$$148\ \square R.\ 142\ \square F.\ 117\ \square Z. = 3\,089\,493\ \square Zoll.$$

$$1089 \mid 3\,089\,493 \mid 2837 \text{ Bäumchen.}$$

2. Ein Gang, der einen Flächenraum von 39 Quadratruthen 16 Quadratfuß 111 Quadratzoll faßt, wird mit 12 824 Ziegeln ausgelegt; wie groß ist die Oberfläche jedes Ziegels? Antw. 63 □Zoll 36 □Linien.

3. Unter 45 Bauern sollen 84 Hufen 24 Morgen 126 Quadratruthen Landes so vertheilt werden, daß jeder gleichviel erhalte; wie groß ist der Antheil eines jeden?

Man dividire zuerst die Zahl der Hufen durch 45, den Rest verwandle man in Morgen, dazu nehme man die gegebene Zahl Morgen, dividire dieses wieder durch 45, ꝛc.

Digitized by Google

45 | 84 | 1 Hufe.
45
39
30
45 | 1194 | 26 Morgen
90
294
270
24

24
180
2046
24
45 | 4446 | 98 □Ruthen
405
396
360
45 | 3600 | 80 □Fuß Decimalmaß.
360

c) Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

1. In Nelkenbrecher findet man: »Die Preuß. Quadratmeile enthält $22\,222\frac{2}{9}$, die geographische Quadratmeile 21 490,33 Preußische Morgen, 30 Morgen machen eine Hufe.« Wie verhält sich nach diesen Angaben eine Hufe zu jeder dieser Quadratmeilen, und in welchem Verhältnisse stehen die genannten Quadratmeilen?

1 Hufe : 1 Preuß. □Meile = 30 : $22\,222\frac{2}{9}$ = 27 : 20 000;

1 Hufe : 1 geogr. □Meile = 30 : 21 490,33 = 3000 : 2 149 033;

oder 1 Hufe : 1 Preuß. □Meile = 1 : $740\frac{2}{27}$;

1 Hufe : 1 geogr. □Meile = 1 : 716,344.

1 Preuß. □Mi. : 1 geogr. □Mi. = $22\,222\frac{2}{9}$: 21 490,33 = 1 : 0,967;

oder 1 geogr. □Mi. : 1 Preuß. □Mi. = 1 : 1,034.

2. Ferner findet man im Nelkenbrecher: »Die Einheit des Feldmaßes im Königreiche Sachsen ist der Acker = 55,133 Franz. Aren; im Königreiche Baiern ist der Juchart (Morgen oder Tagewerk) = 34,0727 Aren; im Königreiche Würtemberg ist der Morgen = 31,5174 Aren; in Baden ist der Morgen = 36 Aren; im Großherzogthum Hessen ist der Morgen = 25 Aren; im Kurfürstenthum Hessen ist der Acker = 23,865 Aren; in Nassau ist der Morgen = 25 Aren; in Hannover ist der Morgen = 26,1921 Aren; in Frankreich ist die Are = 100 Quadrat-Meter; in Großbritannien der Acre = 40,458 Aren; in Schweden ist eine Tonne Landes = 49,353 Aren; in Rußland ist die Desätine = 109,324 Aren; in Oestreich ist der Joch oder Jochart = 57,554 Aren; im Königreich Sardinien ist die Giornata = 38,009 Aren; im Kirchenstaate ist die Pezze = 26,406 Aren; im Königr. Neapel ist die Moggia = 35,1847 Aren; in Spanien ist die Fanegada = 45,948 Aren.« Wie verhält sich nach diesen Angaben der Preuß. Morgen zu den übrigen Feldmaßen, den Preuß. Morgen = der Einheit gesetzt?

1 Preuß. M. : 1 Sächs. Acker = 25,5326 : 55,133 = 1 : 2,1593;

1 Preuß. M. : 1 Baier. Juchart = 25,5326 : 34,0727 = 1 : 1,3345;

1 Preuß. M. : 1 Würtemb. M. = 25,5326 : 31,5174 = 1 : 1,2344;

Digitized by Google

1 Preuß. M. : 1 Baden. M. = 25,5326 : 36 = 1 : 1,40996;
1 Preuß. M. : 1 Heff. M. = 25,5326 : 25 = 1 : 0,9791;
1 Preuß. M. : 1 Heff. Acker = 25,5326 : 23,865 = 1 : 0,93466;
1 Preuß. M. : 1 Hannov. M. = 25,5326 : 26,1921 = 1 : 1,0258;
1 Preuß. M. : 1 Are = 25,5326 : 1 = 1 : 0,03916;
1 Preuß. M. : 1 Engl. Akre = 25,5326 : 49,353 = 1 : 1,9329;
1 Preuß. M. : 1 Deſätine = 25,5326 : 109,324 = 1 : 4,2817;
1 Preuß. M. : 1 Oeſtr. Joch = 25,5326 : 57,554 = 1 : 2,2545;
1 Preuß. M. : 1 Sard. Giornata = 25,5326 : 38,009 = 1 : 1,4886;
1 Preuß. M. : 1 Röm. Pezze = 25,5326 : 26,406 = 1 : 1,0342;
1 Preuß. M. : 1 Neapl. Moggia = 25,5326 : 35,1847 = 1 : 1,3780;
1 Preuß. M. : 1 Span. Fanegada = 25,5326 : 45,948 = 1 : 1,7995.

Man erhält die dritten Verhältniſſe, wenn man die Glieder der zweiten Verhältniſſe durch das Vorderglied derſelben dividirt.

Uebrigens kann man noch mehrere andere Fragen in Bezug auf die Data dieſer Aufgabe vorlegen.

3. In manchen Gegenden Preußens iſt noch von nachfolgenden Feldmaßen die Rede, daher wird hier ihre Größe aus Nelkenbrecher angeführt. Die Churmärkiſche große Landfläche = 400; der Cüſtriniſche Kammermorgen = 484,505; der Culmiſche alte Morgen = 395,027; der Culmiſche neue Morgen = 407,459; der Litthauiſche Morgen = 502,14; ein Magdeburger Morgen = 180; ein Neumärkiſcher großer Landmorgen = 533⅓; ein Olezkoiſcher Morgen = 367,732; eine Pommerſche Hägerhufe = 27709,8; eine Pommerſche Tripelhufe = 20782,3; eine Pommerſche Landhufe = 13854,9; eine Pommerſche Prieſterhufe = 9236,6; eine Pommerſche Hakenhufe = 6927,4; ein Schleſiſcher Morgen = 394,586; ein Soldiniſcher Morgen = 431,21 Rheinländiſcher Quadratruthen. Wie verhält ſich nach dieſen Angaben der Preuß. Morgen zu den genannten Flächenmaßen, wenn man weiß, daß ein Magdeburger Morgen = einem Preuß. Morgen, oder eine Rheinländiſche Quadratruthe = einer Preuß. Quadratruthe iſt?

1 Preuß. M. : 1 Churm. gr. Ldfläche = 1 : 2,2222;
1 Preuß. M. : 1 Cüſtriner K. Morg. = 1 : 2,6917;
1 Preuß. M. : 1 Culm. alten M. = 1 : 2,1946;
1 Preuß. M. : 1 Culm. neuen M. = 1 : 2,2636;
1 Preuß. M. : 1 Litth. Morgen = 1 : 2,7896;
1 Preuß. M. : 1 Neumärk. gr. L.M. = 1 : 2,9630;
1 Preuß. M. : 1 Olezkoiſchen M. = 1 : 2,0430;
1 Preuß. M. : 1 Pomm. Hägerhufe = 1 : 153,94;
1 Preuß. M. : 1 Schleſiſchen M. = 1 : 2,1921.

Anmerk. Bei Gelegenheit dieſer Landmaße mögen zugleich die Längenmaße dieſer Gegenden bemerkt werden.

Digitized by Google

Die Cüstrinische alte Kammerruthe . . . . . = 2121,732 Pariser Linien.
Die Culmische, Westpreuß. oder alte Ruthe à 15 F. = 1915,82 » »
Ostpreuß. oder neue Ruthe . . . = 1945,73 » »
Die Neumärk. alte große Landruthe . . . . . = 2226,08 » »
Die Olezkoische alte Ruthe à 15 Fuß . . . . = 1848,45 » »
Die Soldinische alte Ruthe . . . . . = 1959,414 » »
Die Preuß. Ruthe à 12 Fuß . . . . . = 1669,56 » »

2) Geometrische Proportionen.

Man lese die Bemerkungen zu den geom. Prop. bei den Längenmaßen, welche auch für diese Rubrik Giltigkeit haben.

1. Nelkenbrecher bemerkt: »Vom Feldmaß hält die Tonne Hartkorn verschiedentlich, je nachdem das Land ist, $4\frac{1}{3}$ bis 8,7 Preuß. Morgen. Ein Pflug Schlesw. hält 8 Tonnen Hartkorn zu 4 Tonnen Saatland; 1 Tonne Saatland beträgt an Land 52 570 Franz. □Fuß.« Ferner weiß man, daß 1 Preuß. □Fuß = 0,9335 Franz. □Fuß, 144 Preuß. □Fuß = 1 Preuß. □Ruthe, und 180 Preuß. □Ruthen = 1 Preuß. Morgen. Nun ist die Frage, wie viele Preußische Morgen 1 Pflug Schlesw., 1 Tonne Hartkorn, 1 Tonne Saatland beträgt, und ob das Dänische Feldmaß, nämlich 1 Tonne Hartkorn, mit dem Schlesw. übereinstimme?

1) Vermittelst Schlüsse. Da 1 Tonne Saatland = 52 570 Franz. □Fuß, so hat eine T. Saatl. so viele Pr. □Fuß, wie oft 52 570 Franz. □Fuß die obigen 0,9335 Franz. □Fuß enthalten = $\frac{52\,570}{0,9335}$ Pr. □Fuß, und diese begreift wieder so viele Pr. □Ruthen in sich, als $\frac{52\,570}{0,9335}$ Prß. □Fuß die 144 □Fuß enthalten = $\frac{52\,570}{0,9335 \,.\, 144}$ Preußische □Ruthen, welche ferner so viele Pr. Morgen umfassen, als die zuletzt genannte Fläche 180 Pr. □Ruthen hat; daher ist 1 Tonne Saatland = $\frac{52\,570}{0,9335 \,.\, 144 \,.\, 180}$ = 2,172 Preuß. Morgen; also 1 Tonne Hartkorn = 4 Tonnen Saatland = 8,688 und ein Pflug Schlesw. = 8 Tonnen Hartkorn = 69,504 Pr. Morgen. Hieraus geht auch hervor, daß 1 Tonne Hartkorn in Schleswig = 1 Dänischen Tonne Hartkorn ist.

2) Vermittelst Proportionen. Diese Auflösung kann auf zweifache Weise ausgeführt werden, nämlich entweder dadurch, daß man das Verhältniß zwischen einem Preuß. Morgen zu einer Tonne Saatland zuerst aufsucht, oder dadurch, daß man die Tonne Saatland in Preuß. □Fuß, diese in Preußische □Ruthen, und diese endlich in Preußische Morgen verwandelt.

Digitized by Google

1 Pr. Morgen : 1 Pr. □Ruthe = 180 : 1
1 Pr. □Ruthe : 1 Pr. □Fuß = 144 : 1
1 Pr. □Fuß : 1 Frz. □Fuß = 0,9335 : 1
1 Frz. □Fuß : 1 Tonne Saatl. = 1 : 52 570

1 Pr. Morgen : 1 Tonne Saatl. = 302 454 : 657 125; also eine Tonne Saatl. = $\frac{657}{302}\frac{125}{454}$ Pr. Morgen = 2,1726 Pr. Morgen.

0,9335 Fr. □F. : 52 570 Fr. □F. = 1 Pr. □F. : a Pr. □F.
144 Pr. □F. : a Pr. □F. = 1 Pr. □R. : b Pr. □Ruthen.
180 Pr. □R. : b Pr. □R. = 1 Pr. Morg. : x Pr. Morgen.

302 454 : 657 125 = 1 Pr. Morg. : x Pr. Morgen.

Daher x = 2,1726 Pr. Morgen = 1 Tonne Saatland.

Durch die erste Prop. wird 1 Tonne Saatland oder 52 570 Franz. □Fuß in a Pr. □F., durch die zweite Prop. werden a Pr. □F. in b Pr. □Ruthen, und durch die dritte Prop. werden die b Pr. □Ruthen in x Pr. Morgen verwandelt, und zwar nach dem Satze: Wenn die Vorderglieder einer Proportion einander gleich sind: so müssen auch die Hinterglieder derselben einander gleich sein.

3) Vermittelst des Kettensatzes.

x Pr. Morgen = 1 Tonne Saatland
1 = 52 570 Frz. □F.
0,9335 = 1 Pr. □F.
144 = 1 Pr. □Ruthe
180 = 1 Pr. Morgen

302 454) 657 125 (2,1726 Pr. Morgen.

3. In Reisebeschreibungen und in andern Büchern, wie auch oft in Zeitungen, findet man, wenn von Landflächen die Rede ist, die Größe derselben gewöhnlich in Hektaren oder in Engl. Acres angegeben; daher ist eine genaue Kenntniß dieser Feldmaße zum Verständniß solcher Angaben sehr dienlich, und ich liefere dazu aus den besten Quellen die Data.

1 Are = 1015,187 Pr. Quadratfuß.
1 Hektare = 100 Aren.
1 Engl. Quadratruthe = 1,763 Pr. Quadratruthen.
40 » » = 1 Engl. Rood.
4 » Roods = 1 Engl. Acre.

Wie viele Pr. Morgen machen nach diesen Angaben eine Hektare und einen Engl. Acre?

Es ist nämlich 1 Pr. Quadratruthe = 144 Quadratfuß und 180 Quadratruthen = 1 Pr. Morgen.

Digitized by Google

x Pr. Morgen = 1 Hektare
1 = 100 Aren
1 = 1015,187 Pr. Quadratfuß
144 = 1 Quadratruthe
180 = 1 Pr. Morgen

2592 | 10151,87 | 3,9166 Pr. Morgen sind = 1 Franz. Hektare.

Nelkenbrecher: 1 Hectare = 2,4714 Engl. Acres oder 3,9166 Preuß. Morgen. Daher ist obige Berechnung für richtig zu halten.

y Pr. Morgen = 1 Engl. Acre
1 = 4 Roods
1 = 40 Engl. Quadratruthen
1 = 1,783 Pr. Quadratruthen
180 = 1 Pr. Morgen

9 | 14,264 | 1,5848888... Pr. Morgen sind gleich einem Engl. Acre = 1,585 Pr. Morgen.

Nelkenbrecher: 1 Acre = 1,5846 Pr. Morgen.

Die Abweichung der Angabe Nelkenbrechers von dem Resultate obiger Rechnung hat darin ihren Grund, daß Nelkenbrecher den Engl. Fuß nur = 135,1 Franz. Linien setzt, während er nach sichern Quellen = 135,114166...; nämlich 1 Engl. Fuß = $\frac{1}{3}$ Engl. Yard; nun setzt Nelkenbrecher 1 Engl. Yard = 405,3 Par. Linien; aber ein Engl. Yard hat die gesetzliche Länge von 405,3425 Par. Linien.

Hieraus wird man also den Grund der Abweichung erkennen.

4. Nach obigen Angaben enthält eine Französische Hektare wie viele Engl. Acres?

z Engl. Acres = 1 Hektare
1 = 100 Aren
1 = 1015,187 Pr. Quadratfuß
144 = 1 Pr. Quadratruthe
1,783 = 1 Engl. Quadratruthe
40 = 1 » Rood
4 = 1 » Acre

4108,032 | 10 151,87 | 2,47122.... Engl. Acres = 1 Franz. Hektare; also etwas weniger als nach obiger Angabe Nelkenbrecher's, was nach vorstehenden Bemerkungen im Voraus zu erwarten war.

5. Eine Preußische Hufe von 30 Pr. Morgen enthält nach obigen Angaben wie viele Hektaren und Engl. Acres?

Digitized by Google

H Hektaren = 1 Hufe
1 = 30 Morgen
1 = 180 Quadrat-Ruthen
1 = 144 » Fuß
1015,187 = 1 Are
100 = 1 Hektare

1015,187 | 7776 | 7,65967 Franz. Hektaren sind gleich einer Pr. Hufe = 765,967 Franz. Aren.

A Engl. Acres = 1 Hufe
1 = 30 Morgen
1 = 180 Quadratruthen
1,783 = 1 Engl. Quadratruthe
160 = 1 » Acre

7,132 | 135 | 18,92677 Engl. Acres sind gleich einer Pr. Hufe, also nahe 19 Engl. Acres machen eine Pr. Hufe.

6. In unsern Gegenden ist noch häufig von Kulmischen Feldmaßen die Rede, und doch ist das Verhältniß zwischen Kulmischem Maße und Preußischem Maße zu unserer Beschämung nicht allgemein bekannt; daher gebe ich hier folgende Aufgaben darüber.

Eine Kulmische Hufe hat 30 Kulmische Morgen, und eine Preußische Hufe hat gleichfalls 30 Preußische Morgen.

Nun ist ein neuer Kulm. Morgen = 407,459 und ein Pr. Morgen = 180 Pr. Quadrat-Ruthen; daher enthält eine Kulm. Hufe wie viele Pr. Hufen?

K Pr. Hufen = 1 Kulm. Hufe
1 = 30 » Morgen
1 = 407,459 Pr. Quadrat-Ruthen
180 = 1 Pr. Morgen
30 = 1 » Hufe

180 | 407,459 | 2,26366 Pr. Hufen machen eine Kulm. Hufe.

7. Nach diesen und den frühern Angaben hat eine Kulmische Hufe wie viele Hektaren?

? Hektaren = 1 Kulm. Hufe
1 = 30 » Morgen
1 = 407,459 Pr. Quadrat-Ruthen
1 = 144 » » Fuß
1015,187 = 1 Are
100 = 1 Hektare

10151,87 | 176022,288 | 17,3389 Hektaren sind gleich 1 Kulm. Hufe.

Digitized by Google

Dividirt man die Zahl der Hektaren durch 30, so erfährt man, wie viele Hektaren ein Kulmischer Morgen enthält; dieses ausgeführt, giebt ein Kulmischer Morgen = 0,57796 Hektaren = 57,796 Franz. Aren.

8. Nach obigen Angaben enthält eine Kulmische Hufe wie viele Englische Acres?

A Engl. Acres	=	1 Kulm. Hufe	
1	=	30 » Morgen	
1	=	407,459 Pr. Quadratruthen	
1,783	=	1 Engl. Quadratruthe	
160	=	1 » Acre	
28,528	1222,377	42,8483	Engl. Acres sind gleich einer

Kulmischen Hufe.

Die Zahl der Engl. Acres durch 30 dividirt, giebt die Zahl der Engl. Acres, welche ein Kulmischer Morgen enthält. Führt man die Rechnung aus, so erhält man 1 Kulmischer Morgen = 1,42828 Engl. Acres.

d) Berechnung des Flächeninhalts, wenn die beiden Dimensionen einer Fläche gegeben, oder einer Dimension, wenn der Flächeninhalt und die andere Dimension gegeben sind.

1) Berechnung des Flächeninhalts, wenn die beiden Dimensionen einer Fläche gegeben sind.

Diese Berechnungen gehören eigentlich in die angewandte Geometrie hin, wenn sie gründlich und vollständig behandelt werden sollen; weil aber dieselben von großem Nutzen sind, und gewisse Fälle, die gerade am häufigsten im Leben vorkommen, leicht durch Anschauung verdeutlicht und daher auch leicht begriffen werden können; so sollen diese hier einer genauern Betrachtung unterworfen werden.

Zuerst muß man sich einen deutlichen Begriff von der erwähnten Berechnung machen; dieser wird durch folgende Erklärung gegeben.

Eine gegebene Fläche (Figur) oder den Flächeninhalt derselben berechnen, heißt das Vielfache finden, welches die gegebene Fläche von einem gegebenen Quadrate ist. Diese Definition vergleiche man mit den nachfolgenden Berechnungen, so wird man hierin eine befriedigende Deutlichkeit erlangen.

Diejenigen Figuren, welche am häufigsten im gewöhnlichen Leben vorkommen, und hier berechnet werden sollen, sind das Rechteck, zu welchem auch das Quadrat gehört, das Dreieck, das Trapez, ein regelmäßiges Vieleck und der Kreis. Das Rechteck, so wie das Quadrat sind bereits oben erklärt; die übrigen genannten Figuren werden später definirt werden.

Ferner merke man sich noch folgende Begriffe.

Liegen zwei gerade Linien in einer Ebene, so können sie sich entweder

Digitized by Google

treffen oder nicht treffen; im ersten Falle heißen sie nicht-parallele, im andern parallele Linien.

Die nichtparallelen Linien nähern sich nach der einen Seite hin, bis sie sich in einem Punkte begegnen, und nach der entgegengesetzten Seite hin entfernen sie sich immer mehr von einander. Dagegen laufen parallele Linien fortwährend neben einander und sind überall gleichweit von einander entfernt.

Die gegenüberliegenden Kanten einer Tischplatte geben ein Bild paralleler Linien, die zusammenstoßenden Kanten nichtparalleler Linien.

Jedes Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Daher ist auch ein Rechteck ein Parallelogramm, aber ein solches, dessen Winkel unter einander gleich oder Rechte sind; jedes andere Parallelogramm heißt ein schiefwinkliges.

1. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus seiner Länge und Breite. (Fig. 2.)

Erläuterung. Sei ABCD ein Rechteck, AB = 4 AE, BC = 8 AE; mache AF = AE, ziehe EG parallel AF, FG parallel AE; so ist AEGF ein Quadrat auf AE, oder ein Quadrat, dessen eine Seite AE ist; das Rechteck ABCD aber ist 4 . 8 = 32 × Quadrat AEGF oder ist das 32fache vom Quadrate auf AE. Ist nun AE entweder eine Linie, oder ein Zoll, oder Fuß, oder eine Ruthe ꝛc.; so ist Quadrat auf AE entweder eine Quadratlinie, oder ein Quadratzoll, oder ein Quadratfuß oder eine Quadratruthe ꝛc. und dann ist Rechteck ABCD entweder = 32 Quadratlinien, oder = 32 Quadratzoll, oder = 32 Quadratfuß, oder = 32 Quadratruthen ꝛc. Das gemeine Maß der Breite AB und der Länge BC des Rechtecks ist AE und daher ist Rechteck ABCD das 32fache von dem Quadrate auf dem gemeinen Maße der Länge und Breite desselben.

Die Zahl der Maße, also diejenige Zahl, welche das Vielfache bezeichnet, das eine Größe von ihrem Maße ist, heißt die Maßzahl. AE ist ein Maß der AB und AB = 4 AE, oder = dem 4fachen von AE, so ist 4 die Maßzahl der AB für ihr Maß AE. Da BC = 8 AE, so ist aus demselben Grunde 8 die Maßzahl der BC für ihr Maß AE. Rechteck ABCD = dem 32fachen von Quadrat auf AE, also ist 32 die Maßzahl des Rechtecks ABCD für ihr Maß = Quadrat auf AE.

Daher folgender Satz:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dasjenige Vielfache von dem Quadrate auf dem gemeinen Maße seiner Länge und Breite, welches das Produkt der Maßzahlen der Länge und Breite von der Einheit ist.

Betrachtet man das Quadrat auf dem gemeinen Maße der Länge und Breite des Rechtecks als Einheit, so kann man vorstehenden Satz auch so aussprechen:

Digitized by Google

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen seiner Länge und Breite.

Dieser Satz ist dem obigen ersten vorzuziehen, und wird auch in der Folge so gebraucht werden.

2. Ein Rechteck ist gegeben und man soll seinen Flächeninhalt oder kurz seinen Inhalt bestimmen.

Zu dieser Bestimmung ist die Kenntniß der Maßzahlen der Länge und Breite des Rechtecks nothwendig; und da die nicht gegeben sind, so muß man sie durch genaues Messen der Länge und Breite des Rechtecks ermitteln.

Das Maß muß stets kleiner als der zu messende Gegenstand sein; daher wird man zum Messen als Maß entweder Linien, oder Zolle, oder Fuß, oder eine Ruthe ꝛc. gebrauchen.

Um z. B. die Größe der Oberfläche eines Spiegels von rechteckiger Gestalt zu finden, wird man zum Messen seiner Länge und Breite als Maß einen Fuß gebrauchen, der in Zolle und Linien eingetheilt ist, und angenommen, man finde für seine Länge (Höhe) $3' 8'' 7'''$, für seine Breite $1' 2'' 5'''$; so ist schon aus den frühern Bemerkungen bekannt, daß man entweder die übergeordneten Maße in untergeordnete resolvirt oder die untergeordneten auf übergeordnete reducirt.

Es sind nun $3' 8'' 7''' = 535'''$ und $1' 2'' 5''' = 173'''$; daher sind die Maßzahlen der Länge und Breite des Spiegels 535 und 173, und ihr Produkt $535 . 173 = 92\,555$ ist die Maßzahl der Oberfläche des Spiegels, das Maß derselben ist eine Quadratlinie.

Wollte man die Größe eines Gartens von der Form eines Rechtecks finden, so müßte man zum Messen seiner Länge und Breite eine Ruthe, welche in Fuße abgetheilt ist, wählen; und gesetzt man fände für seine Länge $84° 7'$, für seine Breite $38° 9'$, so wären die Maßzahlen seiner Dimensionen 1015 und 465, die seines Inhalts $= 1015 . 465 = 471\,975$ und die Maßeinheit seiner Dimensionen wäre ein Fuß, die seiner Fläche ein Quadrat-Fuß.

3. Es ist die Grundfläche eines Gebäudes und seiner Mauern zu finden, wenn seine Länge, Breite und Dicke seiner Mauern gegeben sind.

Die Länge der Mauer sei 60 Fuß, die Breite 40 Fuß und die Dicke der Mauern 2 Fuß; welches ist die Größe der ganzen Grundfläche des Gebäudes, die der Grundfläche seiner Mauern und die des innern Raumes? (Fig. 3.)

Es sei also $AB = CD = 60'$, $AD = BC = 40'$; so ist Rechteck $ABCD = 60 . 40 = 2400$ □Fuß.

Da $Ae = Am = Ch = Ci = 2'$, so ist $no = pq = 60 - 4 = 56'$ und $nq = op = 40 - 4 = 36'$; daher Rechteck $nopq = 56 . 36 = 2016$ □Fuß; also die Grundfläche der 4 Mauern $= 2400 - 2016 = 384$ □F. Die Grundfläche der 4 Mauern hätte man auch noch auf eine andere Weise

Digitized by Google

finden können und zwar so: Rechteck ABgm = 60 . 2 = 120 □Fuß = Rechteck CDlh; Rechteck mngl = 36 . 2 = 72 □Fuß = Rechteck ghpo; also die Summe dieser 4 Rechtecke = 2 . 120 + 2 . 72 = 384 □Fuß.

4. Ist die Fläche, deren Inhalt man sucht, nicht ein Rechteck, sondern ein Parallelogramm, so nehme man eine Seite desselben als die eine Dimension an, so ist die andere die Senkrechte auf dieser Seite und begrenzt durch die andere dieser Seite parallele Seite. (Fig. 4.)

Man nehme AB als die Länge des Parallelogramms ABCD an, so ist, wenn CE senkrecht oder rechtwinklig auf AB steht, CE die andere Dimension oder die Breite des Parallelogramms; ist nun AB = 24, CE = 12 (Fuß, Zoll, Linien, oder Ruthen ꝛc.), so ist Parallelogramm ABCD = 24 . 12 = 288 Quadrat-(Fuß, Zoll, Linien, oder Ruthen ꝛc.).

5. Sind zwei Seiten eines Vierecks parallel und zwei nicht parallel, so heißt ein solches Viereck ein Paralleltrapez. Ist AB parallel CD und AD nicht parallel BC, so ist also Viereck ABCD ein Paralleltrapez. (Fig. 5.)

Das Loth von irgend einem Punkte der einen Parallelseite auf die andere Parallelseite gefällt, heißt die Höhe des Paralleltrapezes. Sei EF rechtwinklig auf AB, so ist EF die Höhe des Paralleltrapezes ABCD.

Man erhält den Inhalt eines Paralleltrapezes, wenn man die halbe Summe seiner Parallelseiten mit seiner Höhe multiplicirt.

Sei AB = 3′ 9″, CD = 2′ 11″ und EF = 1′ 8″; so ist AB + CD = 6′ 8″; also $\frac{1}{2}$ (AB + CD) = 3′ 4″ = 40″, und EF = 20″; also Paralleltrapez ABCD = 40 . 20 = 800 □Zoll = 5 □′ 8 □″.

6. In einem Dreiecke kann man eine beliebige Seite desselben als Grundlinie (Basis) betrachten, so wird das Loth, welches man aus der gegenüberliegenden Spitze auf die als Grundlinie angenommene Seite fällt, die Höhe des Dreiecks genannt. (Fig. 6.)

Sei AB die Grundlinie des △ ABC, so ist, wenn CD rechtwinklig auf AB steht, die Höhe desselben CD.

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe dividirt durch 2.

Ist AB = 7′ 8″, CD = 6′ 3″, so ist $\triangle ABC = \frac{92 . 75}{2} =$ 46 . 75 = 3450 □Zoll = 23 □′ 138 □″.

7. Da man jedes Vieleck durch gerade Linien in Dreiecke zerlegen und den Inhalt jedes Dreiecks berechnen kann, so ist man dadurch in Stand gesetzt, den Inhalt jedes Vielecks zu finden. (Fig. 7.)

Sei AB = 27, BD = 38, AF = 37, und Ee, Ee′, Ee″, Gg, Cc Lothe auf AB, AF, BD, AF, BD; ferner sei Ee = 24, Ee′ = 13, Ee″ = 14, Gg = 11, und Cc = 10 Maßen (nämlich Linien, Zoll, Fuß ꝛc.); so ist

Digitized by Google

$$\triangle ABE = \frac{27.24}{2} = 324 \text{ □Maßen}$$

$$\triangle BDE = \frac{38.14}{2} = 266 \text{ »}$$

$$\triangle BDC = \frac{38.10}{2} = 190 \text{ »}$$

$$\triangle AFE = \frac{37.13}{2} = 240\tfrac{1}{2} \text{ »}$$

$$\triangle AFG = \frac{37.11}{2} = 203\tfrac{1}{2} \text{ »}$$

Siebeneck ABCDEFG = 1224 □Maßen.

8. Ein Vieleck, dessen Seiten und Winkel einander gleich sind, heißt ein regelmäßiges Vieleck. (Fig. 8.)

In jedem regelmäßigen Vielecke giebt es einen Punkt, der sowohl von den Seiten als auch von den Ecken desselben gleichweit entfernt ist; dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks; das vom Mittelpunkte auf eine Seite des regelmäßigen Vielecks gezogene Loth heißt der Radius oder Halbmesser seiner Seiten.

Der Umfang eines Vielecks ist die Summe aller seiner Seiten.

In dem Sechseck ABCDEF mögen die Seiten unter einander gleich AB = BC = CD = DE = EF = FA und die Winkel desselben unter einander gleich sein: so ist es ein regelmäßiges Vieleck, und M sei der Mittelpunkt desselben; ferner seien Ma, Mb, Mc ꝛc. lothrecht auf den Seiten: so ist Ma = Mb = Mc = Md = Me = Mf; es ist AB + BC + CD + DE + EF + FA = dem Umfange des Vielecks.

Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Produkte aus seinem Umfange und dem Radius seiner Seiten dividirt durch 2.

Daher Sechseck ABCDEF = $\frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + DE + EF + FA) × Ma = 6 △ ABM = 3 BA . Ma.

Ist AB = 19, so ist Ma = 16,$_{454}$; daher ist $\triangle ABM = \frac{19 . 16,_{454}}{2}$ = 156,$_{313}$; folglich Sechseck ABCDEF = 6 . 157,$_{263}$ = 937,$_{878}$ □Maße.

9. Eine Kreislinie ist eine solche krumme Linie, deren jeder Punkt von einem einzigen Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit entfernt ist. (Fig. 9.)

Jede Gerade, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Kreislinie verbindet, heißt Radius oder Halbmesser des Kreises. Der Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als sein Radius.

In jedem Kreise hat der Durchmesser zur Kreislinie stets ein und dasselbe Verhältniß, oder das Verhältniß des Durchmessers zur Kreislinie ist in allen Kreisen gleich dem Verhältnisse von 1 : 3,$_{14159\ 26535\ 89793}$ ..... = 1 : $\frac{355}{113}$.

Digitized by Google

Dasselbe Verhältniß hat auch das Quadrat des Halbmessers zur Kreisfläche.

M sei der Mittelpunkt des Kreises, so ist MA = MB = MC, Radien des Kreises, AC ist ein Durchmesser desselben, und es ist AC : Kreislinie = 1 : 3,14159...

Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit r, so ist sein Durchmesser = 2r; daher

2r : Kreislinie = 1 : 3,14159...

Die Verhältnißzahl 3,14159 26 ... wird in der Mathematik mit dem Griechischen Buchstaben π (Pi) bezeichnet; also kann man obiges Verhältniß auch so schreiben:

2r : Kreislinie = 1 : π = 1 : 3,14159....

Hieraus folgt Kreislinie = 2r . π.

Ist also der Durchmesser oder Radius eines Kreises gegeben, so kann man mit Hilfe des erwähnten Verhältnisses seinen Umfang, und umgekehrt aus der Länge einer Kreislinie ihren Radius oder Durchmesser finden.

Ist der Radius eines Kreises 12 Fuß, 18° 9′, 56° 6′, so ist die dazu gehörige Kreislinie

1 : 3,14159... = 24′ : Kreislinie = 75,39816... Fuß;
1 : 3,14159... = 37½° : Kreislinie = 117,80962... Ruthen;
1 : 3,14159... = 113° : Kreislinie = 355 Ruthen.

Die Länge einer Kreislinie sei 100 Fuß, oder eine Meile = 24000 F., oder 5400 Meilen; wie lang muß ihr Durchmesser oder Radius sein?

3,14159265 : 1 = 100′ : 2r = 31,831′; also r = 15,915...′
3,14159265 : 1 = 24000′ : 2r = 7639,4372′, r = 3819,7186′.
3,14159265 : 1 = 5400 Ml. : 2r = 1718,8734, r = 859,4367 Ml.

Da die Länge des Aequators = 5400 geogr. Meilen angenommen wird, so gehört zu diesem Kreise ein Durchmesser von 1718,873 Meilen und ein Radius des Aequators beträgt also nahe 860 Meilen.

Wenn man zwei Durchmesser eines Kreises so zieht, daß sie rechte Winkel mit einander bilden, so wird durch dieselben nicht allein die Kreislinie, sondern auch die Kreisfläche in 4 gleiche Theile getheilt. (Fig. 10.)

Ist also CD lothrecht auf AB, so sind die 4 dadurch entstandenen Winkel unter einander gleich, weil sie rechte Winkel sind; es ist also AMC = CMB = BMD = DMA.

Anmerk. Die Linien, welche einen Winkel bilden, heißen Schenkel desselben; der Punkt, an dem der Winkel liegt, heißt der Scheitelpunkt oder die Spitze desselben; und ein Winkel wird so mit drei Buchstaben bezeichnet, daß man von einem Punkte, A, des einen seiner Schenkel zum Scheitelpunkte, M, und von diesem zu einem Punkte, C, des andern seiner Schenkel geht; daher steht der Buchstabe am Scheitelpunkte immer zwischen den beiden andern Buchstaben in der Bezeichnung.

Digitized by Google

Den rechten Winkel theilt man in 90 gleiche Theile, und nennt jeden Theil einen Grad; der 60ste Theil eines Grades heißt eine Minute; der 60ste Theil einer Minute heißt eine Sekunde. Zum Messen kleinerer Winkel als eine Sekunde wird eine Sekunde in Zehntel, Hundertstel ꝛc. getheilt.

Aus der Geometrie ist der Satz bekannt, daß, wenn man einen Winkel am Mittelpunkte (einen Mittelpunktswinkel) eines Kreises in beliebig viele gleiche Theile theilt, der zu diesem Winkel gehörige Bogen (der Theil der Kreislinie, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels enthalten ist) in eben so viele gleiche Theile getheilt wird. (Fig. 11.)

Auch spricht man diesen Satz allgemein so aus:

Das Verhältniß der Mittelpunktswinkel eines Kreises ist gleich dem Verhältnisse der ihnen zugehörigen Bogen.

Winkel AMB sei in 6, BMC in 9 gleiche Theile getheilt; so ist auch Bogen AB in 6 und Bogen BC in 9 gleiche Theile getheilt, und daher ist Winkel AMB : Winkel BMC = Bogen AB : Bogen BC.

Da ein rechter Winkel in 90 Grade getheilt wird, so wird auch der ihm zugehörige Bogen in 90 gleiche Theile getheilt, und jeder dieser Theile heißt gleichfalls ein Grad; doch zum Unterschiede der Grade eines Bogens von denen eines Winkels werden diese Winkelgrade und jene Bogengrade genannt. Hieraus folgt, daß die ganze Kreislinie $4 \cdot 90 = 360$ Bogengrade oder kurz 360 Grade enthalten muß.

Der vierte Theil einer Kreislinie heißt ein Quadrant, der sechste Theil derselben ein Sextant, der achte Theil derselben ein Oktant; also hat ein Quadrant, Sextant, Oktant wie viele Grade? 90, 60, 45 Grade.

Grade, Minuten, Sekunden bezeichnet man kurz durch ein Nullchen, ein Strichchen, zwei Strichchen, die man rechts oben über ihre Anzahlen setzt; daher sind 8 Grade 25 Minuten 30 Sekunden $= 8° 25' 30''$. Diese Bezeichnung gilt nicht allein für Winkel, sondern auch für Bogen.

Der 16te Theil eines rechten Winkels hat wie viele Grade, Minuten, Sekunden, Zehntel, Hundertstel ꝛc. Sekunden?

$\frac{1}{16}$ von $90° = 5° 37' 30''$.

Auf dieselbe Weise berechne man $\frac{1}{7}$ eines rechten Winkels.

$\frac{1}{7}$ von $90° = 12° 51' 25{,}714\ldots''$

Wie groß ist der Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius des Kreises ist?

Setzt man den Durchmesser eines Kreises $= 1$, so ist der Radius desselben $= \frac{1}{2}$, und die Kreislinie $= 3{,}14159265\ldots$ Da nun die Mittelpunktswinkel sich wie ihre zugehörigen Bogen verhalten, der zur ganzen Kreislinie gehörige Mittelpunktswinkel $= 4$ rechten Winkeln $= 360°$, der zu einem Bogen, welcher dem Radius gleich ist, gehörige Winkel sei W; so ist $3{,}14159265 : \frac{1}{2} = 360° : W = 57° 17' 44{,}806''$.

Digitized by Google

Wenn der Durchmesser eines Kreises $1718,_{8734}$ Meilen beträgt: so ist die Frage, wie groß diese Kreisfläche sei?

Oben wurde schon bemerkt, daß sich das Quadrat des Radius eines Kreises zur Kreisfläche, wie 1 zu $3,_{14159265}$ verhalte; da nun der Radius des hier gedachten Kreises $= 859,_{4367}$ Meilen ist, so hat man zur Berechnung der gesuchten Kreisfläche folgende Proportion:

$1 : 3,_{14159265} = 859,_{4367} . 859,_{4367}$ □Ml. : Kreisfläche.

Hieraus folgt die Kreisfläche $= 2\,320\,479,_{107}$ □Meilen.

Da die Oberfläche einer Kugel stets das 4fache ihres größten Kreises ist, so ist, wenn die Erde als eine Kugel angenommen wird, ihre Oberfläche das Vierfache der Kreisfläche des Aequators $= 4 . 2\,320\,479,_{107} = 9\,281\,916,_{428}$ □Meilen.

2) Berechnung einer Dimension, wenn der Inhalt einer Fläche und ihre andere Dimension gegeben sind.

1. Der Inhalt eines Rechtecks beträgt 18 Quadratfuß 126 Quadratzoll, seine Länge ist 8 Fuß 9 Zoll; wie groß ist seine Breite?

Da der Inhalt eines Rechtecks gleich dem Produkte aus seiner Länge und Breite ist, so wird man seine Breite erhalten, wenn man das genannte Produkt oder seinen Inhalt durch die gegebene Länge dividirt. Dieses kann nun entweder dadurch geschehen, daß man die Quadratfuß in Quadratzoll und die Fuß in Zoll verwandelt, oder daß man umgekehrt die Quadratzoll auf Quadratfuß, und die Zoll auf Fuß zurückführt, und dann mit der Länge in die Fläche dividirt.

Nach der ersten Art ist die gesuchte Breite $=$

$$\frac{18 . 144 + 126}{8 . 12 + 9} = \frac{2718}{105} = 25\tfrac{33}{35} \text{ Zoll} = 2' 1'' 10\tfrac{22}{35}'''.$$

Nach der andern Art ist die gesuchte Breite $=$

$$\frac{18\frac{7}{8}}{8\frac{3}{4}} = \frac{151}{70} \text{ Fuß} = 2' 1'' 10\tfrac{22}{35}'''.$$

2. Ein Bauer will einen Acker von 24 Morgen 120 Quadratruthen gegen einen andern seines Nachbars vertauschen; wenn nun der letzte Acker 141 Ruthen 10 Fuß lang ist, welche Breite muß man ihm geben, damit keiner von beiden etwas verliere?

24 Morgen 120 □Ruthen $= 24 . 180 + 120 = 4440$ □Ruthen, $141° 10' = 141\frac{1}{6} = \frac{851}{6}$ Ruthen; also ist die gesuchte Breite $= \frac{4440 . 6}{851}$ $= 31\frac{7}{23}$ Ruthen $= 31°\ 3'\ 8''$ nahe.

3. Eine Wand, welche 36 Fuß lang und 12 Fuß 8 Zoll hoch ist, soll mit Tapeten, die eine und eine halbe Elle breit sind, belegt werden; wie viele Ellen Tapeten braucht man zur Bedeckung der Wand, wenn man weiß, daß eine Elle $25\frac{1}{2}$ Zoll lang ist?

Eine Elle $= \frac{25\frac{1}{2}}{12} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8}$ Fuß.

Digitized by Google

Die Fläche der Wand $= 36 . 12\frac{2}{3} = 456$ □Fuß; daher sind zur Bedeckung der Wand $\frac{456.8}{17} = 214,_{588}$ Ellen nothwendig.

4. Ein Fußboden eines Zimmers soll mit Dielen ausgelegt werden; der Fußboden ist 24 Fuß 9 Zoll breit und 36 Fuß 8 Zoll lang; die Dielen sind 1 Fuß 3 Zoll breit; wie viele Fuß Dielen sind erforderlich?

Die Zahl der Fuße Dielen $= \frac{24\frac{3}{4} . 36\frac{2}{3}}{1\frac{1}{4}} = \frac{99.110}{15} = 726.$

5. Ein Stück Leinwand hält 32 Ellen und ist $\frac{7}{4}$ Ellen breit; wie viele Ellen braucht man von einer andern Leinwand, die nur $\frac{6}{4}$ Ellen breit ist, um in beiden Fällen eine gleiche Fläche zu haben?

Von der andern Leinwand braucht man $\frac{32.7}{6} = 37\frac{1}{3}$ Ellen.

6. Der Inhalt eines Dreiecks beträgt 14 Morgen 144 Quadratruthen, seine Grundlinie ist 77 Ruthen und 1 Fuß lang; wie groß muß seine Höhe sein?

Da der Inhalt eines Dreiecks gleich der Hälfte des Produkts aus seiner Grundlinie und Höhe ist; so muß man denselben mit 2 multipliciren, das Produkt zu erhalten; daher ist das genannte Produkt $= 2.14\frac{4}{5}$ Morgen $= 2.14\frac{4}{5}.180$ □Ruthen $= 74.72$ □Ruthen; und also die gesuchte Höhe $= \frac{74.72}{77\frac{1}{12}} = \frac{74.72.12}{925} = \frac{2.72.12}{25} = 69\frac{3}{25}$ Ruthen.

7. Ein Feld hat die Form eines Paralleltrapezes, sein Flächeninhalt beträgt 34 Morgen 150 Quadratruthen, die eine seiner Parallelseiten mißt 95 Ruthen 8 Fuß, die andere 78 Ruthen 10 Fuß; welche Breite hat es?

Da der Inhalt eines Paralleltrapezes gleich dem Produkte aus der halben Summe seiner Parallelseiten und seiner Höhe (Breite) ist, so wird man diese erhalten, wenn man mit der halben Summe seiner gegebenen Parallelseiten in seinen gegebenen Flächeninhalt dividirt.

Die Summe der Parallelseiten $= 174° 6' = 174\frac{1}{2}$ Ruthen; daher die halbe Summe $= 87\frac{1}{4}$ Ruthen; folglich ist die gesuchte Breite $= \frac{34\frac{5}{6} . 180}{87\frac{1}{4}} = \frac{209.30.4}{349} = 71,_{86}$ Ruthen.

8. Der Querdurchschritt eines Grabens ist ein Paralleltrapez, sein Inhalt beträgt 70 Quadratfuß, seine Tiefe ist 7 und seine obere Breite ist 12 Fuß; wie groß ist seine untere Breite?

Den Flächeninhalt durch die Tiefe des Grabens dividirt, giebt $\frac{70}{7} =$ 10 Fuß die halbe Summe seiner obern und untern Breite; daher ist die Summe der genannten Breiten gleich dem doppelten Quotienten $= 20'$; hievon die obere Breite $= 12'$ subtrahirt, läßt die untere Breite $= 8'$.

e) Arithmetische und geometrische Verhältnisse sind in Verbindung gegeben.

1. Unter zwei Bauern sollen 39 Morgen 120 Quadratruthen so getheilt werden, daß der eine 8 Morgen 150 Quadratruthen mehr als der andere erhalte; wie viel erhält jeder? (Fig. 12.)

Digitized by Google

Das zu theilende Feld sei das Rechteck ABCD, der Antheil des ersten sei AFGD, der des andern BFGC; mache FH = FB, ziehe HI parallel AD, so ist FHIG = FBCG; daher AHID = 8 Morgen 150 □Ruthen; diese von dem ganzen Felde hinweggenommen, läßt 30 Morgen 150 □Ruthen = Rechteck BHIC; und weil Rechteck BFGC = ½ Rechteck BHIC, so ist Rechteck BFGC = der Hälfte von 30 Morgen 150 □Ruthen = 15 Morgen 75 □Ruthen, welches der Antheil des Andern ist, und da der Erste 8 M. 150 □R. mehr erhalten soll, so bekommt er 15 M. 75 □R. + 8 M. 150 □R. = 24 Morgen 45 Quadratruthen.

2. Unter drei Bauern A, B, C sollen 75 Morgen 148 Quadratfuß Wiesenland so getheilt werden, daß A 2 Morgen 90 Quadratruthen mehr als B, und dieser 3 Morgen 84 Quadratruthen mehr als C erhalte; wie viel erhält jeder?

Das zu theilende Wiesenland sei das Rechteck abcd; der Antheil des C sei das Rechteck aefd, der des B das Rechteck eghf, der des A das Rechteck gbch. (Fig. 13.)

Mache ei = ea, gn = ge, ziehe ik, no parallel ad, so ist □ eikf = □ aefd, also □ gikh = 3 Morgen 48 □R., □ gnoh = □ gefh, also □ bnoc = 2 Morgen 90 □R., und macht man endlich gl = ae, und zieht lm parallel bc, so muß □ glmh = □ aefd, also □ lnom = 3 Morgen 84 □Ruthen sein.

Aus dieser Darstellung geht deutlich hervor, daß die ganze Fläche abcd = 3 mal den Antheil des C, (nämlich Fläche aefd) + 2 mal □ gikh, (nämlich 3 Morgen 84 □R.) + □ bnoc (oder 2 Morgen 90 □R.), welches zusammen = 3 □ aefd + 9 Morgen 78 □R. Nimmt man also die 9 M. 78 □° von der ganzen Fläche 75 Morg. 148 □° hinweg, so behält man 3 □ aefd oder den 3fachen Antheil des C = 66 M. 70 □°; daher ist der Antheil des C = 22 M. 23⅓ □°, der des B = 25 M. 107⅓ □° und der des A = 28 M. 17⅓ □°.

Anmerk. Auf gleiche Weise kann man eine gegebene Fläche in 4, 5 ꝛc. Theile theilen, wenn die Differenzen der Theile gegeben sind, und gleichfalls durch die Form darstellen. Die angeführten Beispiele sollen nur als Muster der Darstellung dienen.

3. Unter zwei Bauern A, B sollen 36 Morgen 156 Quadratruthen Ackerland so getheilt werden, daß sich der Antheil des A zum Antheile des B wie 7 zu 9 verhalte; wie viel erhält jeder? (Fig. 14.)

Der zu theilende Acker sei das Rechteck ABCD, der Antheil des A = □ AEFD, der des B = □ BCFE; daher □ AEFD : □ BCFE = 7 : 9; also hat □ AEFD 7 und □ BCFE 9 solcher Theile, beide zusammen also = 16 Theilen = 36 Morgen 156 □R.; also einer dieser Theile = $\frac{1}{16}$ der ganzen Fläche; daher □ AEFD = $\frac{7}{16}$ von 36 M. 156 □° = 16 M. 23¼ □°, und □ BCFE = 20 Morgen 132¾ □Ruthen.

Digitized by Google

4. Ein Gutsbesitzer hinterläßt bei seinem Tode 3 Söhne und verordnet in seinem Testamente, daß sie seine Ländereien, im Betrage von 51 Hufen 18 Morgen Kulmischen Maßes, nach Verhältniß ihres Alters unter sich theilen sollen; nun ist A 32, B 28 und C 24 Jahre alt; wie viel kommt jedem zu, und wie viel betragen ihre Antheile in Preußischem Maße, wenn man weiß, daß ein Kulmischer Morgen = 407,459 Preuß. Quadratruthen ist?

Die Alter der 3 Söhne stehen in den Verhältnissen von 8 : 7 : 6; also muß der Antheil des A 8, der des B 7 und der des C 6 Theile, also die ganze Ländermasse 21 solcher Theile haben, und daher ist der Antheil des A $\frac{8}{21}$, der des B $\frac{1}{3}$ und der des C $\frac{2}{7}$ der gesammten Ländereien; folglich erhält C 14 Hufen 22$\frac{2}{7}$ Morgen, B 17 Hufen 6 Morgen, beide zusammen 31 Hufen 28$\frac{2}{7}$ Morgen, dieses von der ganzen Masse hinweggenommen, läßt den Antheil des A = 19 Hufen 20$\frac{5}{7}$ Morgen.

Diese Ländereien nach Kulmischem Maße sind nun in Preuß. Maß zu verwandeln.

A = 19 . 30 + 20$\frac{5}{7}$ = 590$\frac{5}{7}$ Morgen Kulm.
B = 17 . 30 + 6 = 516 » »
C = 14 . 30 + 22$\frac{2}{7}$ = 442$\frac{2}{7}$ » »

Da ein Preuß. Morgen = 180, 1 Kulm. Morgen = 407,459 Preuß. □Ruthen, so ist 1 Kulm. Morgen = $\frac{407{,}459}{180}$ = 2,26366... Preuß. Morgen; mit dieser Zahl hat man also jede obiger Zahlen zu multipliciren, um die geforderte Verwandlung bewirkt zu haben; dieses giebt:

A = 1337,1763 Pr. M. = 44 Hufen 7 M. 31,734 □° Preuß.
B = 1168,0486 Pr. M. = 38 » 28 » 8,748 □° »
C = 1001,1845 Pr. M. = 33 » 11 » 33,21 □° »

5. Die Besitzungen zweier Gutsherren verhalten sich dem Flächeninhalte nach wie 3 zu 4; darauf kauft der erste 44 Morgen 101 Quadratruthen an, und nun stehen ihre Ländereien im Verhältnisse von 7 : 5; wie viel besaß jeder vor dem Ankaufe des ersten? (Fig. 15.)

a) Sei vor dem Ankaufe die Besitzung des ersten ABEF, die des zweiten BCDE; also □ ABEF : □ BCDE = 3 : 4 = AB : BC.

Der Ankauf des ersten sei AFGH, so ist

□ BEGH : □ BCDE = 7 : 5;

da nun □ BCDE im ersten Falle 4, im andern 5 Theile hat, so sei BC in 4, CD in 5 Theile getheilt; also wird dadurch □ BCDE in 20 gleiche Theile getheilt; dann hat nach dem ersten Verhältnisse □ ABEF 15, und nach dem zweiten Verhältnisse hat □ BEGH 28 solcher Theile; daher ist □ AFGH = 28 − 15 = 13 dieser Theile = 44 M. 101 □°; also einer der Theile = 3 M. 77 □°; also □ ABEF = 15 . (3 M. 77 □°) = 51 M. 75 □°, und □ BCDE = 20 . (3 M. 77 □°) = 68 M. 100 □°.

Digitized by Google

b) Vor dem Ankaufe ist die Besitzung des Ersten $\frac{3}{4}$ der des Zweiten, und nach dem Ankaufe ist die Besitzung des Ersten $\frac{7}{8}$ des Zweiten; jetzt also um $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ mehr als vorher, und jetzt zugleich um den Ankauf von 44 Morgen 101 Quadratruthen mehr als vorher; daher sind $\frac{1}{8}$ des Zweiten = 44 M. 101 □R.; also ist die Besitzung des Zweiten $= \frac{8}{1}.(44$ M. 101 □°) = 68 M. 100 □°.

Die Besitzung des Ersten ist vor dem Ankaufe $\frac{3}{4}$ der des Zweiten, also $= \frac{3}{4}.(68$ M. 100 □°) = 51 M. 75 □°.

6. Das Gut des A verhält sich zum Gute des B in Ansehung ihrer Flächenräume wie 4 zu 5; darauf verkauft B 141 Morgen 52 Quadratruthen, eine dringende Schuld zu bezahlen, und nun stehen ihre Güter im Verhältnisse von 9 : 7; wie viel hatte jeder vor dem Verkaufe? (Fig. 16.)

a) Vor dem Verkaufe sei das Gut des A das Rechteck ABEF, und das des B das Rechteck BCDE, und sei AB : BC = 4 : 5, so ist auch □ ABEF : □ BCDE = 4 : 5.

Das Land, welches B verkauft hat, sei das Rechteck CDHG, so bleibt dem B noch das Rechteck BGHE übrig, und nun ist □ ABEF : □ BGHE = 9 : 7.

Da □ ABEF im ersten Verhältnisse 4 und im andern 9 Theile hat, so theile man AF in 9 gleiche Theile, so hat □ ABEF = 4.9 = 36 Theile, und dann hat nach dem ersten Verhältnisse □ BCDE 45, und nach dem zweiten hat □ BGHE nur 28 solcher Theile; daher muß □ CDHG = 17 dieser Theile = 141 Morg. 52 □R. sein; daher einer gedachter Theile = $\frac{141 \text{ M. } 52 \text{ □R.}}{17}$ = 8 M. 56 □R. Folglich □ ABEF = 36.(8 Mrg. 56 □R.) = 299 M. 36 □R. und □ BCDE = 45.(8 M. 56 □R.) = 374 Morgen.

b) Nach dem ersten Verhältnisse ist das Gut des B = $\frac{7}{9}$ von dem des A, und nach dem zweiten ist es nur $\frac{7}{8}$ dessen des A, also ist es durch den Verkauf von 141 M. 52 □R. um $\frac{7}{9} - \frac{7}{8} = \frac{1}{72}$ vom Gute des A vermindert worden; daher sind $\frac{1}{72}$ vom Gute des A = 141 M. 52 □R., also das Gut des A $= \frac{72}{17}.(141$ M. 52 □R.) = 299 M. 36 □R., und das des B $= \frac{7}{9}.(299$ M. 36 □R.) = 374 Morgen.

7. Die Güter zweier Gutsherren A und B stehen in Hinsicht ihrer Flächenräume im Verhältnisse von 9 zu 10; darauf kauft A 85 Morgen 108 Quadratruthen und B 53 Morgen 27 Quadratruthen und nun stehen ihre Besitzungen im Verhältnisse von 12 zu 11; wie viel besaß jeder vor dem Ankaufe? (Fig. 17.)

a) Das Gut des A vor dem Ankaufe sei abef, das des B bcde, und es sei ab : bc = 9 : 10, so ist auch □ abef : □ bcde = 9 : 10. Nun möge der Ankauf des A = □ fehg = 85 M. 108 □R. sein; so müßte nach vorstehendem Verhältnisse der Ankauf des B (9 : 10 = 85 Morgen

Digitized by Google

108 □R. : 95 M. 20 □R.), 95 M. 20 □R. = □ hide sein, und dann wäre noch □ abhg : □ beih = 9 : 10.

Es hat aber B nur 53 M. 27 □R., also 95 M. 20 □R. — (53 M. 27 □R.) oder 41 M. 173 □R. weniger als nach vorstehendem Verhältnisse gekauft, und es ist nun das Verhältniß ihrer Güter 12 : 11; also □ abhg : Gute des B = 12 : 11 = gh : hk.

Ist aber gh = 12, so muß (gh : hi = 9 : 10 = 12 : 13⅓) hi = 13⅓ sein; also ist ki = 13⅓ — 11 = 2⅓; daher ist das Gut des B nach dem Ankaufe = □ bmkh, und was er zu wenig nach dem Verhältnisse 9 : 10 gekauft hat, ist □ meik = 41 M. 173 □R., welches 2⅓ solcher Theile als □ abhg deren 12 hat; oder □ meik : □ abhg = 2⅓ : 12; daher □ abhg = $\frac{12}{2\frac{1}{3}}$. □ meik = $\frac{3\,6}{7}$. (41 M. 173 □R.) = 215 M. 144 □R.; also ist das Gut des A vor dem Ankaufe 215 M. 144 □R. — 85 M. 108 □R. = 130 M. 36 □R. = □ abef.

Ferner ist □ meik : □ bmkh = 2⅓ : 11; daher □ bmkh = $\frac{11}{2\frac{1}{3}}$. □ meik = $\frac{3\,3}{7}$. (41 M. 173 □R.) = 197 M. 147 □R.; und weil er 53 M. 27 □R. angekauft hat, so ist seine Besitzung vor dem Ankaufe = 197 M. 147 □R. — (53 M. 27 □R.) = 144 M. 120 □R. = □ bcde; daher ist □ elkh — □ medl = 53 M. 27 □R.

Da man □ abef = 130 M. 36 □R. bereits kennt, so hätte man □ bcde auch aus dieser Proportion 9 : 10 = 130 M. 36 □R. : □ bcde finden können.

b) Vor dem Ankaufe ist das Gut des A = $\frac{9}{19}$ von der Summe beider Güter und nach dem Ankaufe ist es $\frac{2}{3}$ von der Summe derselben, also $\frac{2\,1}{4\,3\,7}$ mehr als vorher. Würden beide Gutsherren ihre Ankäufe im Verhältnisse ihrer Güter gemacht haben, so müßte das Gut des A auch nach dem Ankaufe noch $\frac{9}{19}$ der Summe beider sein, also $\frac{9}{19}$ der vorigen Summe und $\frac{9}{19}$ der Summe der Ankäufe = $\frac{9}{19}$. (85 M. 108 □R. + 53 M. 27 □R.) = $\frac{9}{19}$. (138 M. 135 □R.) = 65 M. 130$\frac{5}{9}$ □R. Nun hat aber A 85 M. 108 □R., also 19 M. 157$\frac{4}{19}$ □R. über erwähntes Verhältniß gekauft, und dafür hat er jetzt auch $\frac{2\,1}{4\,3\,7}$ der Summe beider mehr, als nach dem ersten Verhältnisse; daher sind $\frac{2\,1}{4\,3\,7}$ der gedachten Summe = 19 M. 157$\frac{4}{19}$ □R.; also diese Summe = $\frac{4\,3\,7}{2\,1}$. (19 M. 157$\frac{4}{19}$ □R.) = 413 M. 111 □R., davon die Summe der Ankäufe hinweggenommen, läßt 274 M. 156 □R.; davon hat A $\frac{9}{19}$; also beträgt das Gut des A vor dem Ankaufe 130 M. 36 □R., und das des B 144 M. 120 □R.

8. Das Gut des A verhält sich zum Gute des B wie 5 zu 7; darauf kauft A von B 78 Morgen 114 Quadratruthen und nun besitzen beide gleichvieles Land; wie groß waren ihre Güter vor dem Kaufe? (Fig. 18.)

Das Gut des A sei vor dem Kaufe abef, das des B bcde; also □ abef : □ bcde = 5 : 7; daher hat □ abef das 5fache und □ bcde

Digitized by Google

das 7fache einer gewissen Fläche, und beide, oder □ acdf das 12fache derselben Fläche.

Sei nun ag = gc = ½ac, und gh parallel be, so ist □ aghf = ½ □ acdf = dem 6fachen gedachter Fläche, also □ bghe = dem Einfachen derselben Fläche = dem Ankaufe des A = 78 M. 114 Q.R.; daher ist das Gut des A = □ abef = 5 . (78 M. 114 Q.R.) = 393 M. 30 Q.R. und das des B = □ bcde = 7 . (78 M. 114 Q.R.) = 550 M. 78 Q.R.

9. Die Besitzungen zweier Gutsbesitzer A, B verhalten sich wie 9 : 11; darauf kauft A von B 15 Morgen 20 Quadratruthen, und nun ist das Verhältniß ihrer Güter 4 zu 3; wie groß war jede Besitzung vor dem Ankaufe? (Fig. 19.)

a) Vor dem Kaufe sei die Besitzung des A □ abef, und die des B □ bcde, so ist □ abef : □ bcde = 9 : 11.

Da nun A 15 Morg. 20 Q.R. = □ bghe kauft, so würde, wenn □ bghe : □ cikd = 9 : 11, □ cikd = 18 Morgen 84⅘ Q.R. sein; □ aghf : □ bike = 9 : 11. Nun hat A das 4fache einer gewissen Fläche, und nach demselben Verhältnisse müßte dann B (□ aghf : □ bike = 9 : 11 = 4 : 4⅘) das 4⅘fache derselben Fläche haben; B besitzt aber jetzt nur das 3fache der gedachten Fläche = □ gcdh, also das 1⅘fache gedachter Fläche weniger als nach obigem Verhältnisse und zugleich □ bghe + □ cikd = 33 M. 104⅘ Q.R. weniger; daher ist das 1⅘fache = 33 M. 104⅘ Q.R.; also das Einfache = 1/17 (33 M. 104⅘ Q.R.) = 17 M. 140 Q.R.; da A nun das 4fache davon hat, so ist seine gegenwärtige Besitzung = 4 . (17 M. 140 Q.R.) = 71 M. 20 Q.R. und die des B = 3 . (17 M. 140 Q.R.) = 53 M. 60 Q.R., und vor dem Kaufe war also die Besitzung des A = 56 M. und die des B = 68 M. 80 Q.R.

b) Vor dem Kaufe hat A 9/20 der Summe beider, oder □ abef = 9/20 □ acdf, und nach dem Kaufe hat A 4/7 der Summe beider, oder □ aghf = 4/7 □ acdf; daher ist □ bghe = 4/7 − 9/20 = 17/140 □ acdf = 15 M. 20 Q.R.; folglich ist □ acdf = 140/17 . (15 M. 20 Q.R.) = 124 Morgen 80 Q.R.; davon hat A 9/20, also A = 9/20 . (124 M. 80 Q.R.) = 56 M. und B = 124 M. 80 Q.R. − 56 M. = 68 M. 80 Q.R.

10. Die Güter zweier Männer A, B verhalten sich wie 8 zu 17; darauf macht A einen Ankauf von 156 Morgen 112 Quadratruthen, und B verkauft dagegen 36 Morgen 82 Quadratruthen und jetzt stehen ihre Besitzungen im Verhältnisse von 16 : 11; wie viel besaß jeder anfangs? (Fig. 20.)

Der Besitz des A vor dem Ankaufe sei abef, der des B vor dem Verkaufe sei bcde, so ist:

□ abef : □ bcde = 8 : 17; also □ abef = 8/25 □ acdf.

Nun möge A □ ahgf kaufen, und B □ cikd verkaufen, so ist:

□ bhge : □ bike = 16 : 11; also □ bhge = 1/27 □ bikg.

Digitized by Google

Der Besitz von A und B zusammen beträgt die Summe ihrer Besitzungen von früher und 156 M. 112 □R. — (36 M. 82 □R.), oder □ hikg = □ acdf + 156 M. 112 □R. — (36 M. 82 □R.) = □ acdf + 120 M. 30 □R. Daher sind

$$\frac{1}{2\frac{6}{7}} \square \text{ hikg} = \frac{1}{2\frac{6}{7}} \square \text{ acdf} + \frac{1}{2\frac{6}{7}} \cdot (120 \text{ M. } 30 \square\text{R.})$$
$$= \frac{1}{2\frac{6}{7}} \square \text{ acdf} + 71 \text{ M. } 37\frac{7}{9} \square\text{R.}$$

Nimmt man hievon den anfänglichen Besitz des A = $\frac{8}{2\frac{5}{7}}$ □ acdf hinweg, so muß man seinen Ankauf behalten; daher ist $\frac{1}{6\frac{8}{75}}$ □ acdf + 71 Morgen $37\frac{7}{9}$ □R. = 156 M. 112 □R.; hieraus folgt $\frac{1}{6\frac{8}{75}}$ □ acdf = 85 Mrg. $74\frac{2}{9}$ □R.; also □ acdf = $\frac{6\frac{7}{8}\frac{5}{4}}{1}$ · (85 M. $74\frac{2}{9}$ □R.) = 313 M. 60 □R., welches die Summe der anfänglichen Besitzungen von A und B ist; davon hat nun A $\frac{8}{2\frac{5}{7}}$; also ist der anfängliche Besitz des A = $\frac{8}{2\frac{5}{7}}$ · (313 Morg. 60 □R.) = 100 M. 48 □R. und B hatte daher 213 M. 12 □R.

11. Zwei Bauern A, B besitzen zusammen 150 Morgen 111 Quadratruthen. Darauf macht A einen Ankauf von 34 Morgen 115 Quadratruthen und nun verhält sich die Besitzung des A zu der des B wie 9 zu 5; wie viel besaß jeder vor dem Ankaufe des A? (Fig. 21.)

Der Besitz des A vor dem Ankaufe sei □ abef, der des B □ bcde, so ist ihre Summe □ acdf = 149 M. 111 □°; der Ankauf des A sei □ afgh = 34 M. 115 □°, so ist das ganze Rechteck hcdg = 149 M. 111 □° + 34 M. 115 □° = 184 M. 46 □°; und der jetzige Besitz des A = □ begh; daher ist:

□ begh : □ bcde = 9 : 5; also □ bcde = $\frac{5}{14}$ · □ hcdg = $\frac{5}{14}$ · (184 M. 46 □°) = 65 M. 145 □°.

Daher ist das Gut des A vor dem Ankaufe =

149 M. 111 □° − (65 M. 145 □°) = 83 M. 146 □°.

12. Zwei Gutsbesitzer A, B besitzen zusammen 460 Morgen 34 Quadratruthen; A verkauft 39 Morgen 68 Quadratruthen und nun verhält sich der Besitz des A zu dem des B wie 7 zu 15; wie viel hatte jeder anfangs? (Fig. 22.)

Der anfängliche Besitz des A sei □ abef, der des B sei □ bcde; so □ acdf = 460 M. 34 □°; darauf möge A □ aghf = 39 M. 68 □° verkaufen; so ist:

□ gbeh : □ bcde = 7 : 15; also □ bcde = $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ □ gcdh.

Aber □ gcdh = 460 M. 34 □° − (39 M. 68 □°) = 420 M. 146 □°; folglich □ bcde = $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ · (420 M. 146 □°) = 286 M. 165 □°, und daher □ abef = 460 M. 34 □° − (286 M. 165 □°)

= 173 M. 49 □°.

Anmerk. In vorstehender Art können noch folgende Aufgaben gegeben werden: 1) Es ist gegeben die Summe der Besitzungen des A und B, jeder kauft ein Stück Land, und nun ist das Verhältniß ihrer Ländereien bekannt. 2) Die Summe der Güter von A und B ist gegeben, jeder verkauft einen Theil seines Landes und

Digitized by Google

das Verhältniß der Reste ist gegeben. 3) Die Summe der Länder des A und B ist gegeben, einer von beiden kauft ein Stück Landes dazu, der andere verkauft, und darauf ist das Verhältniß ihrer Besitzungen gegeben.

Wie man mit der Summe der Länder verfuhr, so kann man nun die Differenz der Länder behandeln und darüber folgende Aufgaben vorlegen. 1) Gegeben die Differenz der Länder des A und B, der eine kauft ein Stück Landes dazu, und nun ist das Verhältniß ihrer Besitzungen gegeben. 2) Gegeben die Differenz der Länder A und B, der eine verkauft ein Stück seines Landes und darauf ist das Verhältniß ihrer Güter gegeben. 3) Die Differenz der Güter A und B ist gegeben, jeder kauft ein Stück Landes dazu und hierauf ist das Verhältniß ihrer Besitzungen gegeben. 4) Gegeben ist die Differenz der Güter A und B, jeder verkauft ein Stück seines Landes, und nun ist das Verhältniß der Besitzungen gegeben. 5) Die Differenz ihrer Besitzungen ist bekannt, der eine kauft ein Stück Landes dazu, der andere verkauft ein Stück seines Landes und darauf wird das Verhältniß ihrer Güter gegeben.

Die Auflösungen werden durch anschauliche Darstellung wie im Vorigen verdeutlicht, was leicht geschehen kann; daher wird hier die genauere Behandlung weggelassen.

13. Die Güter dreier Gutsbesitzer A, B, C stehen im Verhältnisse der 3 Zahlen $2:3:4$; darauf kauft A 145 Morgen 168 □°, B 72 Morgen 174 □°, und nun sind ihre Besitzungen den Zahlen $7:5:3$ proportionirt; wie viel hatte jeder anfangs?

Da C in beiden Verhältnissen eine unveränderte Besitzung und im ersten das 4fache und im andern das 3fache einer gewissen Fläche hat, so möge C das 12fache einer gewissen Fläche haben; dann sind nach dem ersten Verhältnisse die 3 Zahlen $2:3:4$ proportionirt $6:9:12$, und im zweiten Verhältnisse sind $7:5:3$ proportionirt $28:20:12$.

Nach den ersten Verhältnissen haben also A, B, C das 6fache, 9fache, 12fache und nach den zweiten Verhältnissen haben sie das 28fache, 20fache, 12fache einer und derselben Fläche; daher hat A im zweiten Falle das 22fache und B das 11fache jener Fläche mehr als im ersten Falle, und folglich ist das 22fache = 145 M. 168 □°, oder das 11fache = 72 M. 174 □°; in jedem Falle findet man das Einfache = 6 Morg. 114 □°. Daher besitzt zu Anfange A das 6fache, B das 9fache und C das 12fache von 6 M. 114 □°, oder A = 39 M. 144 □°, B = 59 M. 126 □° und C = 79 M. 108 □°.

14. Die Besitzungen dreier Gutsherren A, B, C sind den 3 Zahlen $4:5:6$ proportionirt; darauf vermehrt durch Ankauf sein Gut A um 29 Morgen 156 □°, B um 32 M. 64 □°, C um 34 M. 152 □° und nun sind ihre Besitzungen den 3 Zahlen $6:7:8$ proportionirt. Wie viel besaß jeder vor dem Ankaufe?

Nach der ersten Proportionalität ist das Gut des A = $\frac{2}{5}$ der Summe der Güter des A und B; nach der zweiten Prop. ist das vergrößerte Gut des A = $\frac{3}{7}$ der Summe der vermehrten Güter dieser Männer, d. h. $\frac{3}{7}$ der

Digitized by Google

ersten Summe und $\frac{3}{7}$ ihrer Ankäufe, also $\frac{3}{7}$. (29 M. 156 □° + 34 M. 152 □°) = $\frac{3}{7}$. (64 M. 128 □°) = 27 M. 132 □°.

Wenn man nun von dem vergrößerten Gute des A = $\frac{3}{7}$ der Summe ihrer ersten Besitzungen + 27 M. 132 □° die anfängliche Besitzung des A = $\frac{2}{5}$ der Summe der ersten Besitzungen des A und B hinwegnimmt, so muß man den Ankauf des A behalten; daher ist der Rest $\frac{1}{35}$ der Summe der ersten Güter des A und B + 27 M. 132 □° = 29 M. 156 □°; also $\frac{1}{35}$ dieser Summe = 2 M. 24 □°; daher diese Summe = 74 M. 120 □°. Folglich ist die anfängliche Besitzung des A = $\frac{2}{5}$. (74 Morgen 120 □°) = 29 M. 156 □° und die des C = 44 M. 144 □°.

B hat $\frac{4}{5}$ der Besitzung des A oder $\frac{2}{5}$ der des C; daher hat B 37 M. 60 Quadratruthen.

15. Drei Gutsbesitzer haben zusammen 294 Morg. 36 □°, und zwar hat A das Dreifache des B und noch 115 Quadratruthen, B hat das Doppelte des C und noch 95 Quadratruthen; wie viel besitzt jeder? (Fig. 23.)

Das Gut des C sei □ abgh; mache bi = ik = ab, also □ bisg = □ ikrs = □ abgh und □ efrk = 95 □°; so ist die Besitzung des B = □ befg.

Mache cl = lm = mn = bc, so ist □ clqf = □ lmpq = □ mnop = □ befg, und □ ndeo = 115 □°, so ist das Gut des A = □ cdef.

Daher ist B = 2C + 95 □°, A = 3. (2C + 95 □°) + 115 □° = 6C + 400 □°.

Folglich ist die Summe der 3 Güter =

9 □ abgh + 495 □° = 294 M. 36 □°; also

9 □ abgh = 291 M. 81 □°; daher ist

C = □ abgh = 32 M. 69 □°

B = □ befg = 65 M. 53 □°

A = □ cdef = 196 M. 94 □°.

16. Drei Gutsherren A, B, C besitzen zusammen 282 Morg. 95 □°; das Gut des A verhält sich zu dem des B wie 2 zu 3, und das des B zu dem des C wie 4 zu 5. Wie viel besitzt jeder? (Fig. 24.)

Sei ab : be = 2 : 3; also □ abgh : □ befg = 2 : 3.

Sei gb : bc = 4 : 5; also □ befg : □ bcde = 4 : 5.

Also kann □ abgh das Gut des A, □ befg das des B, und □ bcde das des C vorstellen.

Da be durch Parallelen zu bg in 3, und bg durch Parallelen zu be in 4 gleiche Theile getheilt ist; so wird □ befg in 3 . 4 oder 12 gleiche Theile getheilt, und dann hat □ abgh 8 und □ bcde 15 eben so große Theile; daher ist □ abgh : □ befg : □ bcde = 8 : 12 : 15; folglich ist □ abgh = dem 8fachen, □ befg = dem 12fachen und □ bcde = dem 15fachen vom □ aikl, und Fläche abcdfh = dem 35fachen vom □ aikl = 282 M. 95 □°; also □ aikl = 8 M. 13 □°.

Digitized by Google

□ abgh = 8 . (8 M. 13 □°) = 64 M. 104 □° = A.
□ befg = 12 . (8 M. 13 □°) = 96 M. 156 □° = B.
□ bcde = 15 . (8 M. 13 □°) = 121 M. 15 □° = C.

Anmerk. Aufgaben der letzten Art müssen viele vorzüglich durch anschauliche Darstellung, wie vorstehend, geübt werden, weil sie die Zusammensetzung der Verhältnisse auf das deutlichste begründen und als Vorübungen zu den Verhältnissen anderer Größen, als der Körper und Gewichte, angesehen werden können.

17. Vier Bauern A, B, C, D besitzen zusammen 54 Morg. 160 □°; der Antheil des A verhält sich zu dem des B wie 3 zu 5, der des B zu dem des C wie 4 zu 7 und der des C zu dem des D wie 9 zu 11. Wie viel besitzt jeder?

Die Besitzungen der 4 Bauern mögen der Kürze wegen mit A, B, C, D bezeichnet werden, so hat man folgende 3 Proportionen:

A : B = 3 : 5.
B : C = 4 : 7.
C : D = 9 : 11.

Durch Zusammensetzung der beiden ersten Proportionen erhält man A : C = 12 : 35 und durch Zusammensetzung der drei Proportionen findet man A : D = 108 : 385. Hat also A das 108fache einer gewissen Fläche, so muß B (3 : 5 = 108faches : 180fachen) das 180fache und C (12 : 35 = 108faches : 315fachen) das 315fache und endlich D das 385fache eben derselben Fläche haben; zusammen begreifen sie also das 988fache dieser Fläche = 54 M. 160 □°; daher ist das Einfache gedachter Fläche = 10 □°. Folglich ist A = 1080 □° = 6 M., B = 1800 □° = 10 M., C = 3150 □° = 17 M. 90 □° und D = 3850 □° = 21 M. 70 □°.

18. Die Besitzungen von 5 Bauern betragen zusammen 491 Morgen Landes, die des A verhält sich zu der des B wie 3 zu 4, die des B zu der des C wie 5 zu 6, die des C zu der des D wie 7 zu 8, und die des D zu der des E wie 9 zu 10. Wie groß ist die Besitzung jedes?

Der Kürze wegen bezeichne man wieder die Besitzungen der 5 Bauern der Reihe nach mit A, B, C, D, E, so ist

A : B = 3 : 4; also ist B = $\frac{4}{3}$ A
B : C = 5 : 6 C = $\frac{6}{5}$ B
C : D = 7 : 8 D = $\frac{8}{7}$ C
D : E = 9 : 10 E = $\frac{10}{9}$ D.

Durch Zusammensetzung der 4 Proportionen findet man

A : E = 5 . 7 . 9 : 4 . 2 . 8 . 10 = 315 : 640.

Daher setze man A = dem 315fachen einer Fläche; so ist

B = $\frac{4}{3}$. 315faches = 420fachem
C = $\frac{6}{5}$. 420faches = 504fachem
D = $\frac{8}{7}$. 504faches = 576fachem
E = $\frac{10}{9}$. 576faches = 640fachem

} eben derselben Fläche.

Digitized by Google

Folglich ist die Summe der 5 Besitzungen = dem 2455fachen dieser Fläche = 491 M., also das Einfache = 36 □° = ¼ Morgen; daher ist A = 63 M., B = 84 M., C = 100 M. 144 □°, D = 115 M. 36 □°, und E = 128 M.

Anmerk. Die Auflösungen der beiden letzten Beispiele geben das Verfahren an, eine gewisse Quantität auch in 6, 7, 8 ꝛc. Theile, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind, zu theilen, und daher können fernere Aufgaben darüber hier weggelassen werden.

19. Ein Gutsbesitzer, der hohen Alters wegen sein Gut nicht länger verwalten kann, theilt es unter seine beiden Söhne und zwar so, daß er dem ältern 85 Morgen 128 Quadratruthen mehr als die Hälfte der ganzen Besitzung und dem jüngern die übrigen 208 Morgen 150 Quadratruthen giebt. Wie groß ist die ganze Besitzung und wie viel erhält jeder Sohn? (Fig. 25.)

Die ganze Besitzung sei acdf; am = me, also □ amnf = □ medn; □ bmne = 85 M. 128 □°; so ist □ bcde der Antheil des ältern, und □ nbef der des jüngern Sohnes = 208 M. 150 □°; daher ist □ amnf = 208 M. 150 □° + 85 M. 128 □° = 294 M. 98 □° = □ medn; also □ bcde = 380 M. 46 □° = dem Antheile des ältern Sohnes und die ganze Besitzung ist = 2 . (294 M. 98 □°) = 589 M. 16 □°.

20. In einer Theilung eines Ackers erhält A die Hälfte desselben und noch 108 Quadratruthen, B erhält 135 Quadratruthen mehr als die Hälfte des Restes, C bekommt die noch übrigen 49 Morgen 175 Quadratruthen. Wie groß ist der getheilte Acker und wie viel hat A und B erhalten? (Fig. 26.)

Der ganze Acker sei □ adeh; mache ai = id, also □ aikh = □ idek, und sei □ ibgk = 108 □°, so ist □ abgh = dem Antheile des A.

Mache bl = ld, also □ blmg = □ ldem, und sei □ lefm = 135 □°, so ist □ befg = dem Antheile des B, und daher ist □ cdef = dem Antheile des C = 49 M. 175 □°.

Folglich □ deml = 49 M. 175 □° + 135 □° = 50 M. 30 □°; daher

□ degb = 2 . (50 M. 30 □°) = 100 M. 60 □°; also
□ deki = 100 M. 60 □° + 108 □° = 100 M. 168 □°; demnach
□ deha = 2 . (100 M. 168 □°) = 201 M. 156 □°.

Hieraus folgt der Antheil des A = 101 M. 96 □°,
» » » B = 50 M. 165 □°.

21. In der Separation erhält A den dritten Theil der ganzen Ländermasse, welche einer Dorfschaft von 5 Bauern gehört und noch 104 Quadratruthen; B empfängt ¼ des Restes und noch 84 Quadratruthen; C bekommt ¼ des dann bleibenden Restes und noch 72 Quadratruthen; D erhält ⅓ des darauf folgenden Restes und noch 128 Quadratruthen; dem E bleiben

Digitized by Google

64 Morgen 96 Quadratruthen übrig. Wie groß ist die getheilte Fläche und wie viel hat jeder erhalten? (Fig. 27.)

Die ganze Fläche sei □ abcd; sei ae = ¼ ab, also □ aefd = ¼ □ abcd, □ eghf = 104 □°; daher ist □ aghd = dem Antheile des A.

Mache gi = ⅓ gb, also □ gikh = ⅓ □ gbch, □ imnk = 84 □°; folglich ist □ gmnh = dem Antheile des B.

Mache mo = ⅓ mb, also □ morn = ⅓ □ mbcn, □ opqr = 72 □°; daher □ mpqn = dem Antheile des C.

Mache ps = ⅓ pb, also □ pstq = ⅓ □ pbcq, □ suvt = 128 □°, folglich □ puvq = dem Antheile des D.

Endlich ist der Antheil des E = □ ubcv = 64 M. 96 □°.

Aus der angezeigten Vertheilung geht unmittelbar hervor, daß □ sbct = 64 M. 224 □° = ⅔ □ pbcq, also □ pbcq = 97 M. 156 □°, □ obcr = 98 M. 48 □° = ⅔ □ mbcn; also □ mbcn = 147 M. 72 □°, □ ibck = 147 M. 156 □° = ⅔ □ gbch, also □ gbch = 221 M. 144 □°, □ ebef = 222 M. 68 □° = ⅔ □ abcd, also □ abcd = 333 M. 102 □°, welches das Land der ganzen Dorfschaft ist.

Hieraus ergiebt sich nun leicht:
A = 111 M. 138 □°, B = 74 M. 72 □°, C = 49 M. 96 □° und D = 33 M. 60 □°.

22. In einer Vertheilung eines Landes erhält A die Hälfte des Ganzen weniger 75 Quadratruthen, B bekommt die Hälfte des Restes weniger 83 Quadratruthen, C empfängt die Hälfte des dann bleibenden Restes weniger 97 Quadratruthen, D erhält die Hälfte des dann bleibenden Restes weniger 106 Quadratruthen, und dem E bleiben endlich 78 Morg. 168 Quadratruthen übrig. Wie groß ist das getheilte Land und was ist jedem durch die Theilung zugefallen? (Fig. 28.)

Das ganze getheilte Land sei das Rechteck abcd.

Halbire ab in e, so ist □ aefd = ½ □ abcd, □ efih = 75 □°, so ist □ ahid = dem Antheile des A.

Halbire hb in k, also □ hkli = ½ □ hbci, □ klmn = 83 □°, so ist □ hmni = dem Antheile des B.

Halbire mb in o, also □ mopn = ½ □ mbcn, □ opsr = 97 □°, so ist □ mrsn = dem Antheile des C.

Halbire rb in t, also □ rtus = ½ □ rbcs, □ tuwv = 106 □R., so ist □ rvws = dem Antheile des D.

Daher ist □ vbcw = dem Antheile des E = 78 M. 168 □R.

Aus der angegebenen Theilung geht hervor, □ tbcu = 78 Morgen 168 □R. — 106 □R. = 78 M. 62 □R. = ½ □ rbcs, also □ rbcs = 2 . (78 M. 62 □R.) = 156 M. 124 □R. Daher □ obcp = 156 M. 124 □R. — 97 □R. = 156 M. 27 □R.; also □ mbcn = 2 . (156 M. 27 □R.) = 312 M. 54 □R. Folglich □ kbcl = 312 M. 54 □R.

Digitized by Google

— 83 □R. = 311 M. 151 □R. = ½ □ hbci; also □ hbci = 2.(311 M. 151 □R.) = 623 M. 122 □R.; daher □ ebcf = 623 M. 122 □R. — 75 □R. = 623 M. 47 □R. = ½ □ abed; also □ abed = 1246 M. 94 Quadratruthen.

Hieraus ergiebt sich der Antheil des A = 622 M. 152 □R., der des B = 311 M. 68 □R., der des C = 155 M. 110 □R., und der des D = 77 M. 136 □R.

23. Ein sterbender Vater verordnet in seinem Testamente, daß seine zurückbleibenden Söhne seine Ländereien unter folgenden Bedingungen unter sich theilen sollen. Der erste soll 18 Morgen und noch $\frac{1}{5}$ des Restes; der zweite soll 36 Morgen und noch $\frac{1}{5}$ des dann bleibenden Restes; der dritte soll 54 Morgen und noch $\frac{1}{5}$ des hierauf bleibenden Restes erhalten, und so jeder folgende 18 Morgen mehr als der vorhergehende und noch $\frac{1}{5}$ des zurückbleibenden Restes. Nach der Theilung findet es sich, daß alle Kinder gleich große Landtheile erhalten haben, und es ist nun die Frage, wie groß die ganze Besitzung war, wie viele Erben zurückblieben, und wie viel jeder erhielt? (Fig. 29.)

Das ganze Erbe sei □ ABCD.

Ferner sei □ AefD = 18 M. und □ eghf = $\frac{1}{5}$ □ eBCf, so ist □ AghD der Antheil des ersten Sohnes.

Nun sei □ gikh = 36 M. und □ ilmk = $\frac{1}{5}$ □ iBCk, so ist □ glmh der Antheil des zweiten Sohnes.

Da nun die Erbschaften der Söhne unter einander gleich sind: so muß □ AghD = □ glmh sein.

Mache □ etuf = 18 M., so ist □ AtuD = 36 M. = □ gikh; folglich muß □ tghu = □ ilmk sein; daher ist

□ eghf um 18 M. größer als □ ilmk,

d. h. $\frac{1}{5}$ □ eBCf ist um 18 M. größer als $\frac{1}{5}$ □ iBCk; daher ist □ eBCf um 5 . 18 = 90 M. größer als □ iBCk, zugleich um □ eikf; also ist □ eikf = 90 M. Da nun □ etuf und □ gikh zusammen 54 M. betragen, so bleibt für □ tghu noch 90 — 54 = 36 M. übrig. Folglich ist □ iBCk = 5 . 36 = 180 M., und □ AikD = 108 M.; also ist □ ABCD = 288 Morg. Daher erhält ein Sohn 72 M. und 4 Söhne theilten sich in die Erbschaft.

Anmerk. Absichtlich habe ich mich bei den Aufgaben über Flächenberechnungen lange verweilt, weil sie durch ihre Anschaulichkeit ein treffliches Mittel selbst zur Lösung schwieriger Aufgaben gewähren, wie man solches aus den letzten ersehen kann. Diese Art der Auflösung kann aber nicht allein auf Flächen, sondern auf alle Größen angewandt werden, und es ist daher jedem Lehrer zu rathen, jede etwas schwierige Aufgabe, es sei über Münzen, Gewichte ꝛc., durch Darstellung in der Form eines Rechtecks oder durch Gebrauch einer geraden Linie zu lösen; wie ich dieses auch später in manchen Fällen thun werde.

Digitized by Google

III. Körperräume.

A. Eintheilung der Körpermaße.

Schon oft ist die Bemerkung gemacht, daß Größen nur durch gleichartige Größen gemessen werden können; daher werden Körper durch Körper gemessen.

Zuerst muß ich nun im Allgemeinen von den Körpern und ihren Maßen sprechen, weil die Entwickelung solcher allgemeinen Begriffe zum Verständnisse des Nachfolgenden nothwendig ist, und dann werde ich über die verschiedenen Maße im Besondern handeln, welche im bürgerlichen Verkehre gebräuchlich sind.

a) Von den Körpern im Allgemeinen.

Man denke sich nun einen vierkantigen Körper, z. B. einer Kiste oder einen Kasten, dessen Grundfläche ABCD ein Quadrat ist und dessen 4 Seitenflächen ABEF, BCHE, CDGH, DAFG gleichfalls Quadrate sind, endlich seine Oberfläche EFGH wieder ein Quadrat ist: so heißt ein solcher Körper ein Würfel (von Wurf) oder Kubus (Cubus von cubo ich liege). (Fig. 30.)

Der Rauminhalt oder das Volumen (Volumen ist Alles, was zusammengerollt ist, von volvo ich wälze, rolle) eines jeden Körpers wird nun stets durch einen solchen Würfel oder Kubus gemessen und daher heißt das Maß aller Körper: Kubikmaß. Man kann auch sagen: ein Kubus ist ein solcher Körper, dessen Länge AB gleich seiner Breite BC, gleich seiner Höhe AF ist.

Die drei Dimensionen (Dimensio das Abmessen, die Abmessung, von metior ich messe, ich messe ab) oder Abmessungen (Länge, Breite, Höhe oder Tiefe oder auch Dicke) eines Würfels müssen also stets einander gleich sein. Ist eine Dimension oder Seite eines Kubus ein Fuß, ein Zoll, eine Linie lang, so heißt ein solcher Körper ein Kubikfuß, Kubikzoll, Kubiklinie.

Denkt man sich anstatt der Quadrate Rechtecke in der Form eines Kubus, so erhält man die Gestalt eines Körpers, der ein Parallelepipedon oder Parallelepipedum heißt. Der ganze Rauminhalt eines Zimmers z. B. stellt ein Parallelepipedum vor. (Fig. 31.)

Der Körper ABCDEFGH sei ein Parallelepipedon, seine Länge $AB = 4$, seine Breite $BC = 2$ und seine Höhe $AF = 3$ (z. B. Fuß, Zoll, Linien ꝛc.) Maße; so hat seine Grundfläche $4 \cdot 2 = 8$ □Maße.

Sei $Af = fk = kF = Ab = \frac{1}{4} AB = 1$ Maße.

Man denke sich nun durch f eine Ebene frst parallel der Grundfläche ABCD, so werden zwischen diesen beiden Ebenen 8 Würfel, wie der Abcdefgh stehen.

Durch k denke man sich wieder eine neue Ebene kuvw parallel der Grundfläche ABCD gelegt, so wird man bemerken, wenn man sich den ganzen

Digitized by Google

Körper klar vorstellt, daß zwischen den Ebenen frst und kuvw wieder 8 Würfel stehen, deren einer fehgikmn ist.

Endlich stehen zwischen den Ebenen kuvw und FGHE abermals 8 Würfel, deren einer kinmlFoqp ist; daß nun alle genannten Würfel unter einander gleich sein müssen, wird wohl Jeder leicht einsehen, auch wird dieses in der Lehre von den Körpern (Stereometrie) streng erwiesen.

Daher enthält also das Parallelepipedum 3 . 8 = 24 Würfel, deren einer Abcdefgh ist, und von welchem eine Seite = 1 Maße, deren AB 4 enthält.

Wäre also AB = 4 Fuß (4 Zoll), so würde der Kubus Abcdefgh = 1 Kubikfuß (1 Kubikzoll), und das Parallelepipedum = 24 Kubikfuß (24 Kubikzoll) sein.

Man wird sich den Inhalt eines Parallelepipedum leicht vergegenwärtigen, wenn man sich denselben in Schichten, wie eben geschehen, abgetheilt vorstellt; dann findet man in jeder Schichte so viele Kubus, als die Grundfläche desselben Quadrate enthält, und da die Zahl der Schichten gleich der Zahl der Höhe desselben ist, so hat man seinen Inhalt ermittelt. Sei z. B. die Länge eines Parallelepipedon = 8 Fuß, seine Breite = 5 Fuß und seine Höhe = 7 Fuß; so hat seine Grundfläche 8 . 5 = 40 Quadratfuß, also müssen sich in jeder Schichte 40 Kubikfuß befinden; da es nun aber 7 Schichten giebt, so ist der Inhalt dieses Körpers = 7 . 40 = 280 Kubikfuß. Aus dieser Darstellung ergiebt sich nun der Satz:

I. Der Inhalt eines Parallelepipedum ist gleich dem Produkte aus seiner Länge, Breite und Höhe oder kurz aus seinen 3 Dimensionen, d. h. sind Länge, Breite und Höhe desselben in Fuß, Zoll, Linien ꝛc. ausgedrückt, so ist sein Inhalt das Vielfache von einem Kubikfuß, Kubikzoll, einer Kubiklinie, welches das Produkt seiner 3 Dimensionen von der Einheit ist.

Ein Kubikfuß muß also nach vorstehendem Satze = 12 . 12 . 12 = 1728 Kubikzoll; ein Kubikzoll = 12 . 12 . 12 = 1728 Kubiklinien sein ꝛc.

II. Ein Prisma ist ein solcher Körper, der zwei gegenüberliegende parallele, und in jeder Beziehung gleiche Grundflächen hat, und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind. Die Grundfläche eines Prisma kann aber ein beliebiges Vieleck sein. (Fig. 32.)

Vieleck abcde sei in jeder Beziehung (der Seiten und Winkel) gleich dem Vieleck ABCDE und beide einander parallel; ferner seien Vierecke ABba, BCeb, CDde, DEed, EAae lauter Parallelogramme, so ist der durch genannte Flächen begrenzte körperliche Raum ein Prisma.

In der Stereometrie wird erwiesen, daß der körperliche Inhalt eines Prisma gleich ist dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Digitized by Google

Man zerlege die eine Grundfläche abcde in Dreiecke abc, ace, cde, und messe Grundlinien und Höhen dieser Dreiecke, ihren Flächeninhalt zu berechnen.

Sei ac $= 10\frac{3}{4}$, ce $= 7\frac{1}{2}$ Zoll; ferner seien bm, en, dr lothrecht auf ac, ce, und man finde durch Messung bm $= 4\frac{1}{2}$, en $= 3\frac{2}{3}$, dr $= 1\frac{1}{3}$ Zoll, endlich die Höhe des Prisma $= 21$ Zoll; so ist:

$\triangle$ abc $= \frac{1}{2} . 10\frac{3}{4} . 4\frac{1}{2} = \frac{387}{16} = 24\frac{3}{16}$ Quadratzoll
$\triangle$ ace $= \frac{1}{2} . 10\frac{3}{4} . 3\frac{2}{3} = \frac{473}{24} = 19\frac{17}{24}$ „
$\triangle$ cde $= \frac{1}{2} . 7\frac{1}{2} . 1\frac{1}{3} = 5$ „

Also Fünfeck abcde $= 48\frac{43}{48}$ Quadratzoll;

diese Grundfläche mit der Höhe des Prisma multiplicirt, giebt den Inhalt des Prisma $= 21 . 48\frac{43}{48} = 1026\frac{13}{16}$ Kubikzoll.

Anmerk. Die Prismen werden nach der Zahl ihrer Seitenflächen benannt, daher ist vorstehendes Prisma ein fünfseitiges; und es ist klar, daß ein Parallelepipedum ein vierseitiges Prisma ist.

III. Eine Pyramide ist ein solcher Körper, dessen Grundfläche ein beliebiges Vieleck (also ein Dreieck, Viereck, Fünfeck ꝛc.) ist, und auf dessen Seiten Dreiecke stehen, die alle mit ihren Spitzen in einem einzigen Punkte oberhalb der Grundfläche zusammentreffen. Die Seitenflächen der Pyramiden sind also Dreiecke. (Fig. 33.)

Man nehme ein Fünfeck ABCDE, errichte auf jeder Seite desselben ein Dreieck, die mit ihren Spitzen in einem Punkte S zusammentreffen, so ist der Punkt S die Spitze der Pyramide, und ein aus ihrer Spitze S auf die Grundfläche ABCDE derselben gefälltes Loth SH ist die Höhe dieser Pyramide.

Der körperliche Inhalt einer Pyramide ist der dritte Theil des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe.

Seien Bm, Dn, Er senkrecht auf AC, AD.

Man finde durch Messung AC $= 13\frac{1}{2}$, AD $= 9\frac{1}{6}$ Zoll, Bm $= 4\frac{5}{6}$, Dn $= 4\frac{1}{6}$, Er $= 5\frac{1}{2}$ Zoll, und die Höhe SH $= 11\frac{1}{8}$ Zoll; so ist

$\triangle$ ABC $= \frac{1}{2} . 13\frac{1}{2} . 4\frac{5}{6} = \frac{261}{8} = 32\frac{5}{8}$ Quadratzoll
$\triangle$ ACD $= \frac{1}{2} . 13\frac{1}{2} . 4\frac{1}{6} = \frac{225}{8} = 28\frac{1}{8}$ „
$\triangle$ ADE $= \frac{1}{2} . 9\frac{1}{6} . 5\frac{1}{2} = \frac{605}{24} = 25\frac{5}{24}$ „

Fünfeck ABCDE $= 85\frac{23}{24}$ Quadratzoll.

Daher ist der körperliche Inhalt der Pyramide ABCDES $= \frac{1}{3} \times 11\frac{1}{8} . 85\frac{23}{24} = 318\frac{439}{576}$ Kubikzoll.

Die Pyramiden werden nach der Zahl ihrer Seitenflächen benannt, und es giebt daher dreiseitige, vierseitige, fünfseitige (wie diese), sechsseitige Pyramiden ꝛc.

IV. Wenn ein Rechteck um eine seiner Seiten sich herumdreht, so heißt der Raum, durch welchen er sich bewegt hat, ein Cylinder oder eine Walze. Die Seite, um welche er sich bewegt, heißt die Axe des Cylinders. Die

Digitized by Google

der Axe parallele Seite beschreibt die Oberfläche des Cylinders; die beiden andern parallelen Seiten beschreiben Kreise, welche die Grundflächen des Cylinders genannt werden. Die Axe des Cylinders ist zugleich die Höhe desselben. (Fig. 34.);

Sei AamM ein Rechteck, das sich um Mm herumdrehe, so erhält man dadurch einen Cylinder, dessen Axe Mm ist; die Seiten MA, ma des Rechtecks beschreiben Kreise, welche die Grundflächen dieses Cylinders sind, und Aa beschreibt die Oberfläche desselben.

Der kubische Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Man finde durch Messen MA = 5 Zoll, Mm = 20 Zoll und suche den körperlichen Inhalt des Cylinders.

Aus dem Frühern ist die Berechnung der Kreisfläche bekannt; es verhält sich nämlich das Quadrat des Radius zur Kreisfläche = $1 : \pi = 1 : 3,14159\ldots$, also in diesem Falle $1 : 3,14159 = 5.5 :$ Kreisfl.; daher Kreisfläche $= 25 : 3,14159 = 78,53975$ Quadratzoll und daher der kubische Inhalt dieses Cylinders

$$= 20 . 78,53975 = 1570,795 \text{ Kubikzoll.}$$

Die Oberfläche eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Kreisumfange der Grundfläche und der Höhe desselben.

Also ist diese cylindrische Oberfläche $= 2 . 5 . 3,14159 . 20 = 628,318$ Quadratzoll.

Der Flächeninhalt des Rechtecks AamM ist aber nur $= 5 . 20 =$ 100 Quadratzoll.

Dieser Cylinder heißt ein gerader, ein schiefer ist ein solcher, dessen Axe auf der Grundfläche schiefwinklig steht.

V. Der Winkel ACB sei ein rechter, so heißt das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten im rechtwinkligen Dreiecke, welche den rechten Winkel begrenzen, heißen Katheten; diejenige, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, heißt Hypotenuse. In dem △ ABC sind also AC und CB Katheten und AB ist die Hypotenuse. (Fig. 35.)

Wenn sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten herumdreht, so heißt der Raum, durch welchen es sich bewegt, oder den es beschrieben hat, ein Kegel. Die Kathete, um welche sich das Dreieck dreht, heißt die Axe des Kegels und ist zugleich seine Höhe. Die andere Kathete beschreibt einen Kreis, welcher des Kegels Grundfläche ist, und die Hypotenuse beschreibt die Kegeloberfläche. Der Punkt, um welchen sich die Hypotenuse dreht, heißt die Spitze des Kegels. (Fig. 36.)

Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile von dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Digitized by Google

△ BMS sei rechtwinklig bei M, und drehe sich um die Kathete MS, so erhält man den Kegel ABS, seine Axe oder Höhe ist MS, seine Grundfläche der Kreis, dessen Radius MB = MA und seine Spitze ist S.

Durch Messung finde man MA = $3\frac{3}{4}$ Zoll, MS = $12\frac{1}{4}$ Zoll, so ist $1 : 3,_{14159} = 3\frac{3}{4} . 3\frac{3}{4}$: Kreisfläche; also Kreisfl. = $\frac{225}{16} . 3,_{14159}$ Quadratzoll.

Daher ist der körperliche Inhalt dieses Kegels =

$$\frac{1}{3} \times 12\tfrac{1}{4} . \tfrac{225}{16} . 3,_{14159} = 187,_{759} \text{ Kubikzoll.}$$

Die Hypotenuse, welche die Kegeloberfläche beschreibt, wird die Seite des Kegels genannt. Dieselbe ist in gedachtem Kegel = $13\frac{1}{4}$ Zoll.

Die Oberfläche eines Kegels ist gleich dem halben Produkte aus seiner Seite und dem Kreisumfange seiner Grundfläche.

Nach diesem Satze die Oberfläche des oben erwähnten Kegels zu finden.

Da der Radius der Grundfläche = $3\frac{3}{4}$ Zoll, so ist der gesuchte Umfang = $2 . 3\frac{3}{4} . 3,_{14159}$ Zoll; folglich ist die Oberfläche des Kegels, da seine Seite = $13\frac{1}{4}$ Zoll, = $\frac{1}{2} . 13\frac{1}{4} . 2 . 3\frac{3}{4} . 3,_{14159} = 157,_{0795}$ Quadratzoll; dagegen ist die Grundfläche = $3\frac{3}{4} . 3\frac{3}{4} . 3,_{14159} = 44,_{1786}$ Quadratzoll.

VI. Wenn ein Halbkreis um seinen Durchmesser herumgedreht wird, so ist der durch ihn beschriebene Raum eine Kugel. Der Durchmesser des Halbkreises ist zugleich der Durchmesser der Kugel.

Der kubische Inhalt einer Kugel ist gleich dem sechsten Theile des Kubus ihres Durchmessers multiplicirt mit der Zahl π oder gleich $\frac{4}{3}$ vom Kubus ihres Radius mit derselben Zahl π multiplicirt.

Wie groß muß demnach der körperliche Inhalt einer Kugel sein, deren Durchmesser = 60 Fuß ist?

Diese Kugel ist = $\frac{60 . 60 . 60}{6} . 3,_{14159} = 113\,097,_{3354}$ Kubikfuß; so vieles Gold ungefähr soll sich, nach der Behauptung eines Physikers, auf der Erde befinden.

Anmerk. Aus der rauhen Mark $21\frac{3}{4}$karatigen Goldes werden 32 Friedrichsd'or geprägt; daher befänden sich, wenn man alles Gold in Friedrichsd'or ausprägte, 1.120 517 996,$_{06}$ Frd'or auf der Erde. Zur Berechnung dieses Resultats hat man folgende Data. Das specifische Gewicht des gehämmerten Goldes = 19,$_{36}$; 1 Mark = $\frac{1}{2}$ Pfund, und das Gewicht von einem Kubikfuß Wasser = 66 Pfd.; daher der Kettensatz:

x Frd'or = 113 097,$_{3354}$ Kubikfuß Gold
1 = 19,$_{36} . 66$ Pfund
1 = 2 Mark
1 = 24 Karat
$21\frac{3}{4}$ = 35 Frd'or.

Wenn man von der Kugel ein Stück abschneidet, doch so, daß die durch den Schnitt entstandenen neuen Flächen Ebenen sind, so ist dieser Schnitt

Digitized by Google

ein Kreis, d. h. die Kugel ist durch den Schnitt in zwei Stücke getheilt, jedes Stück wird durch einen Theil der Kugeloberfläche und durch die neuentstandene Fläche begrenzt, und eben diese neuentstandene Fläche ist ein Kreis. Ein solches Kugelstück heißt ein Kugelabschnitt.

Schneidet man nun von einem Kugelabschnitt ein neues Stück ab, doch so, daß der neue Schnitt parallel mit dem vorigen ist, so ist das eine Stück wieder ein Kugelabschnitt, das andere aber, welches also zwischen den beiden parallelen Schnitten enthalten ist, heißt ein Kugelgürtel, Kugelzone, auch kurz eine Zone (Zona ein jeder Gürtel, dann auch Erdgürtel, Erdstrich).

Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist der dadurch entstandene Kreis der größte unter allen, welche man durch Schneidung der Kugel erhalten kann, und heißt daher der größte Kreis; sein Durchmesser ist gleich dem Durchmesser der Kugel.

Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Vierfachen des größten Kreises der Kugel.

Berechnen wir nun die Oberfläche oben gedachter goldnen Kugel, deren Durchmesser $= 60$ Fuß gesetzt wurde, so erhalten wir für dieselbe, da dieser Radius $= 30$ F. ist, $4 . 30 . 30 . \pi = 4 . 30 . 30 . 3{,}14159 = 11309{,}724$ Quadratfuß.

Anmerk. Die Berechnung eines Kugelabschnittes, einer Kugelzone, und ihrer Oberflächen ꝛc. wird später erfolgen.

b) Von den Körpermaßen im Besondern.

Die Körpermaße, welche am häufigsten im bürgerlichen Verkehre vorkommen, sind die für Getreide, Flüssigkeiten und Holz. Das gesetzliche Maß für Getreide ist der Scheffel $= 3072$ Kubikzoll im Preuß. Staate. Der Scheffel wird in 16 Metzen getheilt; daher ist eine Metze $= \frac{3072}{16} = 192$ Kubikzoll. Im gemeinen Leben rechnet man oft nach Winspel (Wispel) zu 2 Malter und ein Malter $= 12$ Scheffeln. Eine Last Getreide giebt Nelkenbrecher im Artikel Berlin zu 3, und für Gerste und Hafer zu 2 Wispel an. In den Provinzen Ost- und Westpreußen rechnet man eine Last zu 60 Scheffeln. Hiebei ist zu merken, daß die Kaufleute in den Seestädten, welche Getreide seewärts senden, allgemein eine Last zu $56\frac{1}{4}$ Scheffel berechnen.

Für Flüssigkeiten ist im Preuß. Staate das Quart $= 64$ Kubikzoll. Größere Maße sind: für Bier die Tonne gesetzlich $= 100$ Quart; für Wein ein Fuder $= 4$ Oxhoft, 1 Oxhoft $= 3$ Eimern, 1 Eimer $= 2$ Ankern, 1 Anker $= 30$ Quart. Ein Ohm $= 120$ Quart, meistens für Branntwein gebräuchlich.

Brennholz, Steine und Torf soll nach Klaftern, nämlich 6 Fuß lang, 6 Fuß breit und 3 Fuß hoch $= 108$ Kubikfuß, gemessen werden.

Salz, Kohlen, gebrannter Kalk, Mehlgyps, Asche und andere trockene Waaren werden nach Tonnen gemessen; die Tonne soll gesetzlich 4 Preuß.

Digitized by Google

Scheffel halten; daher sind 9 Tonnen $= \frac{9.4.3072}{1728} = 64$ Kubikfuß. Nelkenbrecher bemerkt: „Die Salztonne in den königlichen Faktoreien enthält dasselbe Maß von 4 Scheffeln; das Salz wird jedoch nicht eingemessen, sondern eingewogen, und es soll die Tonne hiernach 405 Pfund Salz enthalten.“

Der berühmte Physiker Muncke giebt das specifische Gewicht des Kochsalzes zwischen 2,17 und 2,30, d. h. wenn Salz und Wasser gleiches Volumen haben, so ist das Salz 2,17 mal bis 2,30 mal so schwer als dieselbe Quantität Wasser. Nun beträgt das Gewicht eines Kubikfußes Wasser 66 ℔, daher wiegen 64 Kubikfuß Wasser $= 64 . 66 = 4224$ ℔; also 64 Kubikfuß Salz mit dem specifischen Gewichte $2,17 = 2,17 . 4224 = 9166,08$ ℔; und da 64 Kubikfuß $= 9$ Tonnen, so ist das geringste Gewicht einer Tonne Salz $= \frac{9166,08}{9} = 1018,45$ ℔. Da das Salz einer Tonne in den Faktoreien nur ein Gewicht von 405 ℔ hat, so wird sie daselbst nur $\frac{405}{1018,45} = \frac{81}{203,69}$ oder nahe $\frac{27}{68}$ oder genauer $\frac{33}{83}$ voll gefüllt, oder wenn man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, so findet man, daß nur 0,3976.. oder nahe $\frac{2}{5}$ der Tonne gefüllt und $\frac{3}{5}$ leer sind.

Die Leinsaattonne hält gesetzlich $37\frac{1}{2}$ Metzen.

B. Rechnungen mit Körpermaßen.

Es werden sich hier nun folgende Aufgaben zur Berechnung herausstellen: a) Verwandlungen; b) Anwendung der 4 Species; c) Geometrische Verhältnisse und Proportionen; d) Geometrische und arithmetische Verhältnisse mit einander verbunden; e) Berechnungen, welche sich auf den kubischen Inhalt der Körper und ihre Dimensionen beziehen.

a) Gegenseitige Verwandlung der Körpermaße.

1) Resolution.

1. Ein halber, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ ꝛc. Kubikfuß sind wie viele Kubikzoll?

$\frac{7}{8}$ Kubikfuß sind 7 Kubikfuß dividirt durch 8; da nun 1 Kubikfuß $= 12 . 12 . 12$ Kubikzoll (I.), so sind 7 Kubikfuß $= 7 . 12 . 12 . 12$ Kubikzoll; folglich sind $\frac{7}{8}$ Kubikfuß $= \frac{7 . 12 . 12 . 12}{8} = 7 . 3 . 6 . 12 = 1512$ Kubikzoll.

2. Vier Fünftel Kubikruthen sind wie viele Kubikfuß und Kubikzoll?

Eine Kubikruthe $= 12 . 12 . 12 = 1728$ Kubikfuß; also $\frac{4}{5}$ Kubikruthen $= \frac{4 . 1728}{5} = 1382\frac{2}{5}$ Kubikfuß. Ferner sind $\frac{2}{5}$ Kubikfuß $= \frac{2 . 1728}{5} = 691\frac{1}{5}$ Kubikzoll; daher sind $\frac{4}{5}$ Kubikruthen $= 1382$ Kubikfuß $691\frac{1}{5}$ Kubikzoll.

3. Ein Scheffel hat 16 Metzen, eine Metze 3 Quart, so betragen $\frac{7}{9}$ Scheffel wie viele Metzen und Quart?

Digitized by Google

$\frac{7}{9}$ Scheffel $= \frac{7 \cdot 16}{9} = 12\frac{4}{9}$ M., $\frac{4}{9}$ M. $= \frac{4 \cdot 3}{9} = 1\frac{1}{4}$ O., also $\frac{7}{9}$ Schffl. $= 12$ M. $1\frac{1}{4}$ O.

4. Dreizehn Sechszehntel Viertonnen sind wie viele Quart?

$\frac{13}{16}$ V.T. $= \frac{13 \cdot 100}{16} = 81\frac{1}{4}$ Quart.

5. Funfzehn Neunzehntel Oxhoft sind wie viele Eimer, Anker und Quart?

$\frac{15}{19}$ Oxhoft $= \frac{15 \cdot 3}{19} = 2\frac{7}{19}$ Eimer; $\frac{7}{19}$ Eimer $= \frac{7 \cdot 2}{19} = \frac{14}{19}$ Anker $= \frac{14 \cdot 30}{19} = 22\frac{2}{19}$ Quart; daher sind $\frac{15}{19}$ Oxhoft $= 2$ Eimern $22\frac{2}{19}$ Quart.

6. Neun Dreizehntel Ohm sind wie viele Quart?

$\frac{9}{13}$ Ohm $= \frac{9 \cdot 120}{13} = 83\frac{1}{13}$ Quart.

7. Vier Siebentel Leinsaattonnen sind wie viele Metzen und Quart?

$\frac{4}{7}$ L.T. $= \frac{4.37\frac{1}{2}}{7} = \frac{4 \cdot 11}{7 \cdot 3} = 21\frac{11}{14}$ M.; $\frac{11}{14}$ M. $= \frac{11 \cdot 3}{14} = \frac{11}{7}$ $= 1\frac{4}{7}$ O.; also $\frac{4}{7}$ L.T. $= 21$ M. $1\frac{4}{7}$ O.

8. Acht Neuntel Winspel sind wie viele Malter, Scheffel, Metzen und Quart?

$\frac{8}{9}$ W. $= \frac{8 \cdot 2}{9} = 1\frac{7}{9}$ M.; $\frac{7}{9}$ M. $= \frac{7 \cdot 12}{9} = 9\frac{1}{3}$ Schffl.; $\frac{1}{3}$ Schffl. $= \frac{16}{3} = 5\frac{1}{4}$ M.; $\frac{1}{3}$ M. $= \frac{3}{3} = 1$ O.; also $\frac{8}{9}$ Winspel $= 1$ Malter 9 Schffl. 5 Metzen 1 Quart.

9. Vierzehn Funfzehntel Klafter betragen wie viele Kubikfuß?

$\frac{14}{15}$ Klftr. $= \frac{14 \cdot 108}{15} = 100\frac{4}{5}$ Kubikfuß.

10. Acht Dreizehntel Last, zu $56\frac{1}{4}$ Scheffel gerechnet, betragen wie viele Scheffel, Metzen und Quart?

$\frac{8}{13}$ Last $= \frac{8 \cdot 56\frac{1}{2}}{13} = \frac{452}{13} = 34\frac{10}{13}$ Scheffel; $\frac{10}{13}$ Scheffel $= \frac{10 \cdot 16}{13}$ $= 12\frac{4}{13}$ M.; $\frac{4}{13}$ M. $= \frac{4 \cdot 3}{13} = \frac{12}{13}$ O.; also sind $\frac{8}{13}$ Last $= 34$ Schffl. 12 Metzen $\frac{12}{13}$ Quart.

Aumerk. Wenn man Brüche resolviren kann, so wird man auch Ganze zu resolviren verstehen; daher sind der letzten Art keine Aufgaben hier vorgelegt; anders verhält sich die Sache im Unterrichte, und hierin hat der Lehrer die Entscheidung.

2) Reduktion.

1. 729 Kubikzoll betragen wie viele Kubikfuß?

Da 1 Kbzoll $= \frac{1}{1728}$ Kbf., so sind 729 Kbz. $= \frac{729}{1728} = \frac{27}{64}$ Kbf.

2. $17\frac{4}{13}$, $28\frac{4}{5}$, $424\frac{8}{15}$ Kubikzoll sind wie viele Kubikfuß?

$424\frac{8}{15}$ Kbzoll $= \frac{424\frac{8}{15}}{1728} = \frac{6368}{1728 \cdot 15} = \frac{143}{3 \cdot 18} = \frac{143}{54}$ Kubikfuß.

3. $2\frac{2}{19}$, $3\frac{7}{19}$, $8\frac{8}{17}$ Metzen sind wie viele Scheffel?

$8\frac{8}{17}$ Metzen $= \frac{8\frac{8}{17}}{16} = \frac{144}{16 \cdot 17} = \frac{9}{136}$ Scheffel.

4. $23\frac{11}{23}$, $23\frac{7}{31}$, $25\frac{35}{37}$ Quart betragen wie viele Anker?

$23\frac{11}{23}$ Quart $= \frac{23\frac{11}{23}}{30} = \frac{540}{30 \cdot 23} = \frac{18}{23}$ Anker.

Digitized by Google

5. $16\frac{7}{8}$, $42\frac{3}{11}$, $28\frac{28}{36}$ Quart sind wie viele Eimer?

$16\frac{7}{8}$ Quart $= \frac{16\frac{7}{8}}{60} = \frac{1\,35}{60.8} = \frac{9}{4.8} = \frac{9}{32}$ Eimern.

6. $17\frac{1}{7}$, $32\frac{4}{13}$, $19\frac{1}{17}$ Anker sind wie viele Oxhoft?

$17\frac{1}{7}$ Anker $= \frac{17\frac{1}{7}}{6} = 2\frac{5\frac{1}{7}}{6} = 2\frac{36}{6.7} = 2\frac{6}{7}$ Oxhoft.

7. $4\,761\,904\frac{16}{21}$ Quart sind wie viele Viertonnen?

$4\,761\,904\frac{16}{21}$ Quart $= \frac{4\,761\,904\frac{16}{21}}{100} = 74\,619\frac{476}{2100}$; aber $\frac{476}{100} = \frac{100}{100.21} = \frac{1}{21}$; also $74\,619\frac{1}{21}$ Viertonnen.

8. 36 Viertonnen enthalten wie viele Scheffel?

Da 1 Tonne $= 100$ Quart, und 1 Quart $= 64$ Kubikzoll; so sind 36 Tonnen $= 36 . 100 . 64$ Kubikzoll; 3072 Kubikzoll $= 1$ Scheffel; also 36 Tonnen $= \frac{36.100.64}{3072} = 75$ Scheffeln.

9. 15 Oxhoft betragen wie viele Viertonnen?

15 Oxhoft $= 15 . 180$ Quart $= \frac{15.180}{100} = 3 . 9 = 27$ Viertonnen.

10. 24 Oxhoft enthalten wie viele Kubikfuß?

24 Oxhoft $= 24 . 180 . 64$ Kubikzoll $= \frac{24.180.64}{1728} = 160$ Kubikfuß.

b) Anwendung der vier Species.

1) Addition.

1. Ein Weinhändler erhält von Oporto 3 Pipen Portwein, welche 12 Oxhoft 4 Anker $20{,}938$ Quart im Preuß. Maße betragen; von Lissabon 2 Pipen Madeira-Wein, die nach Preuß. Maße 8 Oxhoft 2 Anker $20{,}6256$ Quart halten; von Bordeaux 28 Tiercons Bordeauxer Wein, die in Preuß. Maße 5 Oxhoft 1 Anker $17{,}12$ Quart geben; von Havre de Grace 2 Muids Burgunder Wein $=$ 2 Oxhoft 3 Anker $17{,}836$ Quart Pr. Maß. Wie viel hat er im Ganzen empfangen?

12	Oxhoft	4	Anker	$20{,}938$	Quart
8	»	2	»	$20{,}6256$	»
5	»	1	»	$7{,}12$	»
2	»	3	»	$17{,}836$	»
29	»	0	»	$6{,}5396$	»

5. Zu einem gemeinschaftlichen Handel haben sich 5 Kaufleute verbunden; im Frühjahre beladen sie Schiffe mit Weizen, welche seewärts gehen sollen. A liefert 46 Last 35 Scheffel 8 Metz, B 55 Last 39 Scheffel 12 Metz, C 48 Last 42 Scheffel 13 Metz, D 43 Last 49 Scheffel 14 Metz, E 64 Last 24 Scheffel 11 Metz, die Last zu $56\frac{1}{4}$ Scheffel gerechnet; wie viele Last, Scheffel und Metzen haben sie seewärts versandt?

Digitized by Google

46	Last	35	Scheffel	8	Metz	58 Metzen sind 3 Scheffel 10 Metz; die 3 Scheffel zu den Scheffeln gezählt, giebt 192 Scheffel, diese durch 56½ dividirt, giebt 3 Last 22½ Scheffel oder 22 Scheffel und 8 Metz und jene 10 Metz giebt 23 Scheffel 2 Metz.
55	»	39	»	12	»	
48	»	42	»	13	»	
43	»	49	»	14	»	
64	»	24	»	11	»	
256	»	189	»	58	»	

259 Last 23 Scheffel 2 Metz.

2) Subtraktion.

Im Speicher A befinden sich 3892 Winspel 1 Malter 8 Scheffel, in B 1854 Winspel 9 Scheffel, in C 2875 Winspel 1 Malter 6 Scheffel, in D 3354 Winspel 1 Malter 4 Scheffel; aus dem Speicher A werden 862 Winspel 8 Scheffel, aus B 978 Winspel 1 Malter 10 Scheffel, aus C 998 Winspel 1 Malter 7 Scheffel, aus D 2877 Winspel 5 Scheffel verkauft. Wie viel bleibt noch auf jedem Speicher übrig, und wie groß ist der Rückstand auf allen 4 Speichern? 1 Winspel = 2 Maltern = 24 Scheffeln.

Es bleiben auf dem Speicher A 3030 Winspel 1 Malter, B 875 Winspel 11 Scheffel, C 1876 Winspel 1 Malter 11 Scheffel, D 477 Winspel 11 Scheffel; auf allen 4 Speichern beträgt der Rückstand 6260 Winspel 9 Scheffel.

3) Multiplikation.

Jemand hat in einer Rechnung 195 Kubikfuß 1374 Kubikzoll 1496 Kubiklinien mit 576 zu multipliciren; er will dieses auf die kürzeste Weise ausführen; wie wird er die Rechnung anstellen und welches Resultat wird er erhalten?

Man untersuche zunächst, welcher Bruch 576 von 1728 ist, so wird man finden, daß $576 = \frac{1}{3}$ von 1728 ist; also wird man, anstatt mit 576 die gegebenen Zahlen zuerst zu multipliciren, und dann zur Reduktion durch 1728 zu dividiren, alles mit $\frac{1}{3}$ multipliciren, oder was dasselbe ist, durch 3 dividiren; daher:

$576 . 1496$ Kubiklinien $= \frac{1496}{3} =$ 498 Kbz. 1152 Kbl.

$576 . 1374$ Kbzoll $= \frac{1374}{3} =$ 458 Kbf.

$576 . 195$ Kbf. $= \frac{195}{3} = 65$ Kubikruthen; daher erhält man zum Produkte 65 Kubikruthen 458 Kubikfuß 498 Kubikzoll 1152 Kubiklinien.

4) Division.

Die jährliche Ausfuhr des Portweins aus Porto soll sich auf 30000 Pipen = 6335 Oxhoft 5 Anker 19,2 Quart nach Preuß. Maße belaufen; wie

Digitized by Google

viel kann von dieser Quantität während eines Jahres von 365 Tagen täglich verbraucht werden?

$$
\begin{array}{r|l}
365 & 6335 \\
 & 365 \\
\hline
 & 2685 \\
 & 2555 \\
\hline
 & 130 \\
73) & 26 \\
 & 6 \\
\hline
 & 161 \\
 & 146 \\
\hline
 & 15 \\
 & 30 \\
\hline
 & 469,_{2} \\
 & 438 \\
\hline
 & 312 \\
 & 292 \\
\hline
 & 20
\end{array}
$$

17 Oxhoft 2 Anker 6,4 Quart.

Man dividirt also zunächst die Zahl der Oxhofte durch 365, den Rest, welcher Oxhofte enthält, verwandelt man in Anker und nimmt die gegebenen 5 Anker hinzu; dividirt diese Zahl wieder durch 365; den Rest der Anker verwandelt man in Quart, ꝛc.

Anmerk. Da das Verfahren bei Anwendung der Species auf die Maße im Allgemeinen immer dasselbe ist, so verweile ich bei dieser Art Aufgaben nicht, sondern eile zu interessantern und schwierigern; der Lehrer wird wissen, wie lange er mit seinen Schülern dabei zu verweilen habe.

c) Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

1. In welchen Verhältnissen stehen Quart, Metze, Scheffel; Tonne, Ohm, Oxhoft?

1 Quart : 1 Metze : 1 Scheffel = 1 : 3 : 48.

1 Tonne : 1 Ohm : 1 Oxhoft = 100 : 120 : 180 = 5 : 6 : 9.

2. Ein Preuß. Scheffel = 2770,$_{736}$ Franz. Kubikzoll; 1 Dresdner Scheffel = 5416 Franz. Kubikzoll; 1 Hamburger Scheffel = 5308, 1 Bremer Scheffel = 3734, 1 Baierischer Scheffel = 11 209, 1 Würtemberg. Scheffel = 8934,$_{448}$, 1 Badener Malter = 7561,$_{86}$, 1 Malter in Frankfurt a. M. = 5784, 1 Darmstädter Malter = 6453, 1 Kasselscher Scheffel = 4051,$_{6}$, 1 Wiener Metze = 3100, 1 Polnischer Scheffel (Korzec) = 6452,$_{8}$, 1 Russisch. Tschetwert = 9808, 1 Schwedische Tonne = 8310, 1 Dänische Tonne = 7007, 1 Engl. Quarter = 14 654,$_{2}$, 1 Amsterdamer Sack = 4206,$_{5}$, 1 Franz. Hektoliter = 3041,$_{24}$, 1 Spanische Fanega = 2881, 1 Portug. Fanega = 2724, 1 Neapl. Tomolo = 2784,$_{5}$, 1 Römischer Rubbio = 14 844, 1 Toskanischer Stajo = 1228,$_{2}$, 1 Turin. Sacco = 5798,$_{8}$, 1 Mailänd. Soma = 5041,$_{24}$ Franz. Kubikzoll. Wie verhält sich der Preuß. Scheffel als Einheit zu jedem der Maße?

Digitized by Google

1 Pr. Schffl.	: 1 Dresdn. Schffl.	= 1 : 1,955
1 Pr. Schffl.	: 1 Hamb. Schffl.	= 1 : 1,916
1 Pr. Schffl.	: 1 Bremer Schffl.	= 1 : 1,348
1 Pr. Schffl.	: 1 Baier. Schffl.	= 1 : 4,046
1 Pr. Schffl.	: 1 Würtemb. Schffl.	= 1 : 3,224
1 Pr. Schffl.	: 1 Badener Malter	= 1 : 2,729
1 Pr. Schffl.	: 1 Frankf. Malter	= 1 : 2,087
1 Pr. Schffl.	: 1 Darmst. Malter	= 1 : 2,329
1 Pr. Schffl.	: 1 Kassel. Schffl.	= 1 : 1,462
1 Pr. Schffl.	: 1 Wiener Metze	= 1 : 1,119
1 Pr. Schffl.	: 1 Poln. Schffl.	= 1 : 2,329
1 Pr. Schffl.	: 1 Russ. Tschetwert	= 1 : 3,539
1 Pr. Schffl.	: 1 Schwed. Tonne	= 1 : 2,9992
1 Pr. Schffl.	: 1 Dän. Tonne	= 1 : 2,529
1 Pr. Schffl.	: 1 Engl. Quarter	= 1 : 5,289
1 Pr. Schffl.	: 1 Amsterd. Sack	= 1 : 1,518
1 Pr. Schffl.	: 1 Franz. Hektoliter	= 1 : 1,8194
1 Pr. Schffl.	: 1 Span. Fanega	= 1 : 1,0398
1 Pr. Schffl.	: 1 Portug. Fanega	= 1 : 0,983
1 Pr. Schffl.	: 1 Neapel. Tomolo	= 1 : 1,005
1 Pr. Schffl.	: 1 Röm. Rubbio	= 1 : 3,357
1 Pr. Schffl.	: 1 Toskan. Staio	= 1 : 0,443
1 Pr. Schffl.	: 1 Turin. Sacco	= 1 : 2,093
1 Pr. Schffl.	: 1 Mailänd. Soma	= 1 : 1,8194.

Anmerk. Vorstehende Angaben sind aus Reitenbrecher's Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde ꝛc. genommen, und die Verhältnisse hier berechnet. Die Rechnung wird nach dem Satze geführt: Wenn man die Glieder eines Verhältnisses durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so erhält man ein Verhältniß, das dem gegebenen gleich ist; also:

1 Pr. Scheffel : 1 Dresdn. Scheffel = 2770,736 : 5416 =

$$1 \quad : \quad \frac{5416}{2770{,}736} = \frac{5416000}{2770736} = 1 : 1{,}955.$$

Zur Uebung folge noch eine Aufgabe über die Maße der Getränke; die Data dazu nehme ich aus Reitenbrecher dem Jüngern. Leipzig 1841, bei J. Klinkhardt.

3. Ein Preuß. Quart = 1,145 Liter; 1 Amsterdamer Vat = 1 Hektoliter (100 Liter); 1 Augsburg. Schenkmaß = 1,069 Liter; 1 Bremer Stübchen = 3,221 Liter; 1 alte Maß in Frankfurt a. M. = 1,793 Liter, 8 alte Maß = 9 Jungmaß; 1 Genuesische Barile = 74,23 Liter; 1 Hamburger Wein-Viertel = 7,22 Liter; 1 Dän. Pott = 0,966 Liter; 1 Leipziger Schenkkanne = 1,204 Liter; 1 Dresdener Kanne = 0,934 Liter; 1 Portug. Almuda = 16,70 Liter; 1 Livorn. Barile = 45,58 Liter; 1 Engl. Gallon von 8 Pints = 3,785, 1 Bier-Gallon = 4,534 Liter; 1 Span. Arroba Wein = 16,17 Liter; 1 Neapel. Karaffe = 0,727 Liter; 1 Pariser

Digitized by Google

Pinte = 0,931 Liter; 1 Ruff. Wedro von 10 Stof = 12,299 Liter; 1 Röm. Wein-Barilo = 58¼ Liter; 1 Schwed. Kanne = 2,672 Liter; 1 Polnische Kwarta = 1 Liter; 1 Wiener Maß = 1,415 Liter. Wie verhält sich nach diesen Angaben ein Preuß. Quart als Einheit zu jedem der genannten Maße?

Anmerk. Ein Liter (Litre) ist ein hohler Kubus, dessen eine Dimension = 1 Decimeter = 3,823 Preuß. Zoll ist.

2) Geometrische Proportionen.

Ein Preuß. Scheffel = 54,9615 Liter; 1 Amsterd. Zak hat 100 Koppen = 1 Hektoliter (100 Liter), 1 Last = 3000 Koppen; 1 Griechischer Getreide-Kiloz = 33,118 Liter; 1 Baseler Getreide-Sack = 1,36656 Hektoliter; 1 Bremer Getreidelast = 40 Scheffel, 1 Scheffel = 74,069 Liter; 1 Konstantinopel. Getreide-Fortin zu 4 Kilos, 1 Kilos = 35,11 Liter; 1 Malter = 4 Simmer in Frankfurt a. M. = 114,74 Liter; 1 Genuesische Getreide-Mina = 120,72 Liter; in Hamburg hat eine Last Weizen oder Roggen 3 Wispel à 10 Scheffel à 2 Faß, eine Last Gerste oder Hafer hat 2 Wispel à 10 Scheffel à 3 Faß, 1 Faß = 52,65 Liter; 1 Dän. Last = 22 Tonnen, 1 Korn-Tonne = 139,12 Liter; 1 Dresdener Scheffel = 105,1 Liter; 1 neuer Sächsischer Scheffel = 100 Liter; 1 Portug. Getreide-Alqueire = 13,508 Liter, 1 Moyo = 15 Fanegas = 60 Alqueires; in Livorno hat ein Sacco, Getreidemaß, 3 Staja, 1 Staja = 24,36 Liter; 1 Engl. Last = 2 Weys oder Tuns = 10 Quarters, 1 Quarter = 8 Bushel, 1 Bushel = 4 Pecks = 8 Gallons, 1 Gallon = 4,543 Liter; 1 Span. (Kastillianischer) Getreide-Cahiz = 12 Fanegas, 1 Fanega = 56,494 Liter; 1 Getreide-Carro in Neapel = 36 Tomoli, 1 Tomolo = 55,234 Liter: in Frankreich für Getreide der Hektoliter = 100 Liter; 1 Russischer Tschetwert zu Getreide = 8 Tschelwerik = 2,099 Hektoliter; 1 Römischer Getreide-Rubbio-Quarti = 2,944 Hektoliter; 1 Schwed. Getreide-Last = 21¼, 1 Tonne = 63 Kannen = 164,883 Liter; 1 Poln. Getreide-Last = 30 Scheffel à 4 Viertel à 8 Garniec à 4 Kwarty, 1 Kwart = 1 Liter; 1 Wiener Muth = 30 Metzen, 1 Metze = 61,5 Liter. Eine Preuß. Last von 56½ Scheffeln beträgt wie viel in den genannten größten Maßen jedes Landes oder Ortes?

Die Auflösungen dieser Aufgaben können auf dreifache Weise gemacht werden, entweder durch Schlüsse, oder durch Proportionen oder durch den Kettensatz.

I. Auflösung durch Schlüsse.

Da eine Preuß. Last 56½ Scheffel, und 1 Scheffel 54,9615 Liter enthält, so hat eine Preuß. Last $56\frac{1}{2} \cdot 54{,}9615$ Liter. Nun hat ein Amsterd. Zak 100 Liter; daher wird eine Preuß. Last so viele Amsterd. Zak enthalten, wie vielmal die Zahl der Liter, die gleich einer Preuß. Last, die 100 Liter in sich begreifen; also 1 Preuß. Last $= \frac{56\frac{1}{2} \cdot 54{,}9615}{100}$. 1 Zak. Es

Digitized by Google

machen ferner 30 Zak eine Amsterd. Last; also wird eine Preuß. Last so viele Amsterd. Last betragen, wie vielmal die Quantität Zak, die einer Pr. Last gleich sind, die 30 Zak in sich begreifen; folglich eine Preuß. Last $= \frac{56\frac{1}{2} \cdot 54{,}9615}{100 \cdot 30}$ Amsterd. Last $= 1{,}025108$ Amsterd. Last.

II. Auflösung durch zusammengesetzte Proportionen.

1 Preuß. Last : 1 Preuß. Scheffel $= 56\frac{1}{2}$: 1
1 Pr. Scheffel : 1 Liter $= 54{,}9615$: 1
1 Liter : 1 Brem. Scheffel $= 1$: $74{,}069$
1 Brem. Schffl. : 1 Bremer Last $= 1$: 40

1 Preuß. Last : 1 Bremer Last $= 56\frac{1}{2} \cdot 54{,}9615 : 40 \cdot 74{,}069$;

daher 1 Preuß. Last $= \frac{56\frac{1}{2} \cdot 54{,}9615}{40 \cdot 74{,}069} = 1{,}044812$ Bremer Last.

III. Auflösung durch den Kettensatz.

x Hamb. Last Weizen	=	1 Preuß Last	Wie viel Hamb. Last =
1	=	$56\frac{1}{2}$ Scheffel	1 Pr. Last, wenn 1 Pr. Last
1	=	$54{,}9615$ Liter	$= 56\frac{1}{2}$ Schfl., wenn 1 Schfl.
$52{,}65$	=	1 Hamb. Faß	$= 54{,}9615$ Liter, wenn $52{,}65$
2	=	1 Scheffel	Liter = 1 Hamb. Faß, wenn
10	=	1 Wispel	2 Faß = 1 Schffl., wenn 10
3	=	1 Last	Schffl. = 1 Wispel, wenn
6318		$6210{,}6495$ | $0{,}9830$	3 Wispel = 1 Last.

Daher hat eine Pr. Last von $56\frac{1}{2}$ Scheffeln nur $0{,}983$ Hamb. Last Weizen.

Anmerk. Die Data vorstehender Aufgabe liefern reichlichen Stoff zu einer Menge anderer Aufgaben, welche fordern, daß eine Quantität Maße des einen Landes in Maße eines andern Landes verwandelt werden sollen. Der Lehrer wird danach leicht Aufgaben bilden können; daher übergehe ich solche der Kürze wegen. Zu ähnlichem Zwecke will ich noch mehrere Angaben, gleichfalls aus Neikenbrecher dem Jüngern, hersetzen.

2. Amsterdam: von Rhein- oder Moselwein- und Kornbranntweinmaßen hält die Aam 4 Anker, 8 Steekanen, 64 Stooven, 128 Mingeln; 1 Steekan $= 19{,}403$ Liter. Bremen: das Fuder Rheinwein = 6 Ohm à 45 Stübchen à 4 Quart à 4 Mingel; das Oxhoft Franz. Wein $= 1\frac{1}{2}$ Ohm à 4 Anker; 1 Stübchen $= 3{,}221$ Liter. Frankfurt a. M.: die Ohm hat 20 Viertel à 4 alte Maß (oder Aichmaß) à 4 alte Schoppen; ein Fuder = 6 Ohm; ein Stück = 8 Ohm; ein Oxhoft oder eine Piece $= 1\frac{1}{2}$ Ohm; die alte Maß $= 1{,}793$ Liter, 8 alte Maß = 9 Jungmaß. Hamburg: das Fuder hat 6 Ohm à 4 Anker oder 5 Eimer, 1 Eimer = 4 Viertel à 2 Stübchen à 2 Kannen à 2 Quartier; 1 Viertel $= 7{,}22$, für Rheinwein $7{,}12$ Liter. Kopenhagen: das Fuder hat 6 Ohm à 4 Anker; eine Ohm $= 77\frac{1}{2}$ Kannen à 2 Pott; ein Pott $= 0{,}966$ Liter. Leipzig: das Fuder Wein hat

Digitized by Google

12 Eimer à 54 Leipziger Visir- oder 63 Schenkkannen; eine Schenkkanne = 1,204 Liter; ein Oxhoft = 1½ Ohm à 2 Eimer. Lissabon: von Wein wird 1 Tonelada zu 2 Pipas oder Botas, 52 Almudes, 104 Alqueires oder Potes, 624 Canadas, 2496 Quartilhos gerechnet; 1 Almuda = 16,70 Liter. Livorno: der Barile da Vino hat 20 Fiaschi à 2 Boccali à 2 Mezzette à 2 Quartucci; ein Barile = 45,58 Liter; eine Pipa = 9⅔ Barili. London: vom Wein- und Branntwein-Maß rechnet man die Tun zu 2 Pipes oder Butts, 3 Punchions, 4 Hog'sheads, 6 Tierces, 8 Barrels, 14 Rundlets oder Kilderkins, 252 Gallons, 1008 Quarts, 2016 Pints; vom Biermaß hat 1 Butt (Pipe) 2 Oxhöft, 3 Barrels, 6 Kilderkins, 12 Firkins, 108 Gallons, 432 Quarts, 864 Pints; 1 Gallon = 4,54346 Liter. Madrid: der Kastilianische Cantaro zu Wein, Branntwein, Honig ꝛc. wird auch Arroba mayor genannt, und in 8 Azumbres oder 32 Quartillos getheilt = 16,17 Liter. Neapel: der Wein-Carro hat 2 Botti à 12 Barili à 60 Caraffe, 1 Caraffe = 0,727 Liter. Rom: vom Weinmaß wird 1 Botta in 16 Barili getheilt; der Barile hält 32 Boccali oder 128 Fogliette = 58,3416 Liter. Schweden: 1 Kanna = 2,62 Liter; 1 Kanna = 2 Stop, 1 Stop = 4 Quarter, 1 Quarter = 4 Jungfur; 15 Kannor = 1 Ankar, 4 Ankar = 1 Am (nach Muncke). Wien: die Maß oder Kanne = 1,415 Liter hat 4 Seitel oder Seidel; 40 Maß = 1 Eimer, 10 Eimer = 1 Faß, 30 Eimer = 1 Dreiling (nach Muncke). Jedes dieser genannten Maße beträgt wie viele Preuß. Oxhoft und umgekehrt?

I. Ein Preuß. Oxhoft = 180 Quart, 1 Quart = 1,145 Liter; also 1 Oxhoft = 180 . 1,145 Liter. Nun 1 Steckan = 19,403 Liter; daher 1 Oxhoft = $\frac{180 \,.\, 1{,}145}{19{,}403}$ Steckanen; 8 Steckan = 1 Aam; daher 1 Oxhoft = $\frac{180 \,.\, 1{,}145}{8 \,.\, 19{,}403}$ Aam = 1,353... Aam.

II.

1 Oxhoft	: 1 Quart	=	180	:	1
1 Quart	: 1 Brem. Stübchen	=	1,145	:	3,221
1 Stübchen	: 1 Ohm	=	1	:	45
1 Ohm	: 1 Fuder	=	1	:	6
1 Oxhoft	: 1 Brem. Fuder	=	2290	:	9663

Daher ein Bremer Fuder = 4,219 Preuß. Oxhoft.

III.

x Preuß. Oxhoft	=	1	Engl. Tun
1	=	252	Gallons
1	=	4,54346	Liter
1,145	=	1	Preuß. Quart
180	=	1	Oxhoft

5,725 | 31,80422 | 5,5553 Pr. Oxhoft.

Digitized by Google

d) Arithmetische und geometrische Verhältnisse.

1. 78 Scheffel 12 Metzen sollen unter A und B so getheilt werden, daß A 7 Scheffel 8 Metzen mehr als B erhalte; wie viel erhält jeder?

A hat den Antheil des B und noch 7 Scheffel 8 Metz; also haben beide zusammen den doppelten Antheil des B und 7 Scheffel 8 Metz = 78 Scheffel 12 Metz; daher ist der doppelte Antheil des B = 71 Scheffel 4 Metz; daher der Antheil des B = der Hälfte von 71 Scheffel 4 Metz = 35 Schffl. 10 Metz, und A hat 7 Scheffel 8 Metz mehr als B, daher hat er 43 Schffl. 12 Metz.

2. Drei Weinhändler A, B, C lassen sich gemeinschaftlich 28 Oxhoft 4 Anker 20 Quart Wein kommen; diesen wollen sie nun nach Verhältniß der Zahlung unter sich theilen, und es findet sich nach der Rechnung, daß A 1 Oxhoft 3 Anker mehr als B und dieser 2 Oxhoft 1 Anker 25 Quart mehr als C zu erhalten habe; wie viel kommt jedem zu?

B hat also den Antheil des C und noch 2 Oxhoft 1 Anker 25 Quart, A hat den des B und überdies noch 1 Oxhoft 3 Anker; daher hat A den Antheil des C und noch 4 Oxhoft 25 Quart; daher haben alle 3 zusammen das Dreifache vom Antheile des C und noch 6 Oxhoft 2 Anker 20 Quart = 28 Oxhoft 4 Anker 20 Quart; daher ist der dreifache Antheil des C = 22 Oxhoft 2 Anker; also der Antheil des C = 7 Oxhoft 2 Anker 20 Q., der des B 9 Oxhoft 4 Anker 15 Quart, und der des A 11 Oxhoft 1 Anker 15 Quart.

3. Zwei Gutsbesitzer lassen sich gemeinschaftlich 5 Tonnen Salz aus der königlichen Salzfaktorei kommen, die sie nach den Zahlen ihrer Familienmitglieder und der Dienstleute unter sich theilen wollen. Nun hat A eine Frau, 3 Kinder und 6 Dienstleute, B hat eine Frau, 5 Kinder und 8 Dienstleute; wie groß ist der Antheil eines Jeden? Eine Tonne = 4 Scheffel à 16 Metz à 3 Quart.

Der Antheil des A verhält sich zum Antheile des B wie 11 zu 15; daher wird A das 11fache und B das 15fache einer und derselben Quantität erhalten; beide zusammen haben also das 26fache derselben Quantität = 5 Tonnen, also das Einfache = $\frac{5}{26}$ Tonnen. Folglich erhält A $11 . \frac{5}{26}$ Tonnen = 2 Tonnen 7 Metz $1\frac{2}{13}$ Quart, und B $15 . \frac{5}{26}$ Tonnen = 2 Tonnen 3 Scheffel 8 Metz $1\frac{11}{13}$ Quart.

4. Drei Schmiedemeister kaufen zusammen 95 Tonnen Steinkohlen, die sie nach Verhältniß der Bezahlung unter sich theilen wollen; dem zufolge verhält sich der Antheil des A zu dem des B wie 4 zu 5, der des B zu dem des C wie 7 zu 8; wie groß ist der Antheil jedes Meisters?

Im ersten Verhältnisse hat B das 5fache, im andern das 7fache; also nehme man an, daß B das $5 . 7$ oder 35fache einer gewissen Quantität habe, und nun berechne man die Vielfachen derselben Quantität, welche A

Digitized by Google

und C zukommen. Der Antheil des A = $\frac{4}{5}$ von dem des B = $\frac{4}{5}$ vom 35fachen = dem 28fachen; der des C = $\frac{5}{7}$ von dem des B = $\frac{5}{7}$ vom 35fachen = dem 40fachen; daher haben alle drei das 28fache + dem 35fachen + dem 40fachen = dem 103fachen = 95 Tonnen; daher das Einfache = $\frac{95}{103}$ Tonnen; folglich

A = 28 . $\frac{95}{103}$ Tonnen = 25 Tonnen 3 Scheffel 4 Metz $2\frac{46}{103}$ Quart;
B = 35 . $\frac{95}{103}$ » = 32 » 1 » 2 » $\frac{6}{103}$ »
C = 40 . $\frac{95}{103}$ » = 36 » 3 » 9 » $\frac{51}{103}$ »

5. Vier Bürger kaufen in einem Forste gemeinschaftlich 28 Haufen Brennholz, die sie so unter sich nach ihrem Bedarf theilen wollen, daß sich der Antheil des A zu dem des B wie 3 zu 4, der des B zu dem des C sich wie 5 zu 6, und der des C zu dem des D wie 7 zu 8 verhalte. Ein Haufen enthält $4\frac{1}{2}$ Klafter, und 1 Klafter = 108 Kubikfuß.

Wenn man die Antheile der 3 ersten Bürger auf Vielfache einer und derselben Größe nach vorstehender Auflösung reducirt, so erhält man die Verhältnißzahlen 15 : 20 : 24; C muß also nach diesen Zahlen das 24fache, und nach dem dritten gegebenen Verhältnisse das 7fache haben; so nehme man an, daß C das 24 . 7 = 168fache einer gewissen Größe habe, und berechne nun nach den Verhältnissen die Vielfachen der übrigen Bürger.

Da sich die Antheile von A, B, C wie 15 : 20 : 24 verhalten, und C das 24 . 7 oder das 168fache hat, so kommt dem B das 20 . 7 oder 140fache und dem A das 15 . 7 oder 105fache zu; D hat aber $\frac{8}{7}$ vom Antheile des C, also D = $\frac{8}{7}$. 168 = dem 192fachen; daher haben alle vier das 105fache + 140fache + 168fache + 192fachen = dem 605fachen = 28 Haufen; also das Einfache = $\frac{28}{605}$ Haufen. Daraus ergiebt sich:

A = 105 . $\frac{28}{605}$ Haufen = 4 Haufen 3 Klafter $93\frac{87}{121}$ Kubikfuß;
B = 140 . $\frac{28}{605}$ » = 6 » 2 » $16\frac{116}{121}$ »
C = 168 . $\frac{28}{605}$ » = 7 » 3 » $32\frac{454}{605}$ »
D = 192 . $\frac{28}{605}$ » = 8 » 3 » $106\frac{346}{605}$ »

6. Fünf Brauherren haben in einem Monat zusammen 381 Gebräude 4 Kupen 1 Faß und 1 Tonne Bier verkauft. Der Verkauf von A verhält sich zu dem von B wie 4 zu 5, der von B sich zu dem von C wie 6 zu 7, der des C sich zu dem des D wie 8 zu 9, und der des D sich zu dem des E wie 10 zu 11. Wie viel hat jeder verkauft?

Ein Gebräude = 9 Kupen, 1 Kupe = 2 Faß, 1 Faß = 2 Tonnen. Man kann die Verhältnißzahlen der Verkäufe eben so wie in der vorstehenden Auflösung suchen, nämlich auf die Weise, daß man zuerst die Verhältnißzahlen der 4 ersten Verkäufe berechnet, welche 192 : 240 : 280 : 315 sind; D muß also das 315fache nach dieser Rechnung und nach dem vierten gegebenen Verhältnisse das 10fache, also das 630fache haben, dann hat C das 2 . 280 oder das 560=, B das 2 . 240 oder das 480= und A das

Digitized by Google

2.192 oder das 384fache; und da der Verkauf des $E = \frac{11}{10}$ dessen von D ist, so hat E das $\frac{11}{10}.630 = 693$fache; ꝛc.

Es werde hier aber noch eine andere Auflösung angegeben, die darin besteht, daß man den Verkauf eines Jeden auf den eines Einzigen, des A, oder B, oder C ꝛc. reducire, welches folgendermaßen geschieht.

Es ist klar, daß der Verkauf des $B = \frac{5}{4}$ von dem des A ist; ferner ist der Verkauf des $C = \frac{7}{6}$ von dem des B, also der des $C = \frac{7}{6}.\frac{5}{4} = \frac{35}{24}$ von dem des A. Der Verkauf des $D = \frac{9}{8}$ von dem des $C = \frac{9}{8}.\frac{35}{24} = \frac{105}{64}$ von dem des A; der des $E = \frac{11}{10}$ von dem des $D = \frac{11}{10}.\frac{105}{64} = \frac{231}{128}$ von dem des A.

Nun suche man den kleinsten Generalnenner von den Nennern 4, 24, 64, 128, welcher 384 ist; nehme nun an, daß A das 384fache einer gewissen Quantität verkauft habe, so findet man $B = \frac{5}{4}.384 = 480$fachem, $C = \frac{35}{24}.384 = 560$fachem, $D = \frac{105}{64}.384 = 630$fachem und $E = \frac{231}{128}.384 = 693$fachem von eben derselben Quantität; alle 5 haben zusammen das 2747fache.

Ein Gebräude hat 36 Tonnen, also 381 Gebräude $=$ 13716 Tonnen, dazu 4 Kupen $=$ 16 Tonnen und 1 Faß $=$ 2 Tonnen und noch eine Tonne, giebt im Ganzen 13735 Tonnen $=$ dem 2747fachen; daher das Einfache $=$ 5 Tonnen. Daher hat A $384.5 = 1920$ Tonnen $=$ 53 Gebräude 3 Kupen, B $480.5 = 2400$ Tonnen $=$ 66 Gebräude 6 Kupen, C $560.5 = 2800$ Tonnen $=$ 77 Gebräude 7 Kupen, D $630.5 =$ 3150 Tonnen $=$ 87 Gebräude 4 Kupen 1 Faß und E $693.5 = 3465$ Tonnen $=$ 90 Gebräude 6 Kupen und 1 Tonne verkauft.

7. Zwei Kaufleute A, B haben Weizen gekauft, und ihre Einkäufe verhalten sich wie 7 zu 8. Darauf kauft A noch 4 Last 1 Wispel 1 Malter 9 Scheffel dazu, und nun verhalten sich ihre Einkäufe wie 37 zu 32. Wie viel kaufte jeder anfangs?

1 Last Weizen $=$ 3 Wispel, 1 Wispel $=$ 2 Malter, 1 Malter $=$ 12 Scheffel.

Der Einkauf von A ist in beiden Verhältnissen derselbe; im ersten hat er das 8fache, im zweiten das 32fache einer andern Quantität; also ist das 8fache einer Größe $=$ dem 32fachen einer andern; daher ist das Einfache der ersten $=$ dem 4fachen der zweiten, und A hat im ersten Falle also das 7.4 oder 28fache der zweiten Größe; im andern Falle hat A das 37fache dieser zweiten Größe, also hat A das 9fache dieser Größe dazu gekauft $=$ 4 Last 1 Wispel 1 Malter 9 Scheffel $=$ 333 Scheffeln; also das Einfache $=$ 37 Scheffeln. Folglich hat anfangs A $28.37 = 1036$ Scheffeln $=$ 14 Last 1 Wispel 4 Scheffel, und B $= 32.37 = 1184$ Scheffeln $=$ 17 Last 1 Wispel 6 Scheffel gekauft.

8. Die Arbeiten zweier Maurer verhalten sich wie 11 zu 12; darauf vermehrt A seine Arbeit um 176, B um 76 Kubikfuß, und nun stehen ihre

Digitized by Google

Arbeiten in dem Verhältnisse von 14 zu 13; wie viel hatte jeder anfangs zu Stande gebracht?

Würden die Maurer ihre Arbeiten um Größen, im ersten Verhältnisse 11 zu 12 stehend, vermehrt haben, so müßte B (11 : 12 = 176 : 192) seine Arbeit um 192 Kubikfuß, also um 125 Kubikfuß mehr vermehrt haben, als es geschehen ist, und dann würden ihre Arbeiten noch in demselben Verhältnisse von 11 zu 12 stehen, und da nun A das 14fache einer gewissen Größe hat, so würde B (11 : 12 = 14 : $15\frac{3}{11}$) das $15\frac{3}{11}$fache derselben Größe haben, da er jetzt nur das 13fache, also das $2\frac{3}{11}$fache weniger hat; daher ist das $2\frac{3}{11}$fache = 125 Kubikfuß, also das Einfache = $\frac{125}{2\frac{3}{11}}$ = $\frac{11 \cdot 125}{25}$ = 55 Kubikfuß; also ist die gegenwärtige Arbeit des A = 14 . 55 = 770 Kubikfuß, und seine frühere war also 770 — 176 = 594 Kubikfuß, und die des B = $\frac{12}{11}$. 594 = 648 Kubikfuß.

9. Ein Weinhändler hat in den Oxhoften A und B Wein, deren Quantitäten in dem Verhältnisse wie 10 zu 9 stehen. Darauf verkauft er aus A 52 Quart, und nun verhalten sich ihre Quantitäten wie 3 zu 4. Wie viele Quart befanden sich vor dem Verkaufe in jedem Gefäße?

Der Wein im Gefäße B habe das 4 . 9 oder 36fache, so hat nach dem ersten Verhältnisse das Oxhoft A = $\frac{10}{9}$ von B das 40fache und nach dem zweiten Verhältnisse das 27fache derselben Quantität, weil es im zweiten Verhältnisse = $\frac{3}{4}$ von B ist. Durch den Verkauf von 52 Quart hat also das Oxhoft A eine Abnahme vom 13fachen erfahren; daher ist das 13fache = 52 Quart, also das Einfache = 4 Quart; folglich enthielt das erste Gefäß vor dem Verkaufe 40 . 4 = 160, und das andere 36 . 4 = 144 Quart.

10. Die Vorräthe an Hafer zweier Gutsbesitzer verhalten sich wie 29 zu 31; hierauf verkauft A 701 und B 943 Scheffel, und nun stehen ihre Reste in dem Verhältnisse 25 zu 23; welches waren die Vorräthe vor dem Verkaufe?

Die Auflösung dieser Aufgabe kann eben so wie die der 8ten Aufgabe gemacht werden; eine andere ist folgende.

A hat vor dem Verkaufe $\frac{29}{60}$ von der Summe beider; nach dem Verkaufe hat A $\frac{25}{48}$ von der Summe der Reste beider. Die Summe der Reste ist aber gleich der ersten Summe um 701 und 943 oder um 1644 Scheffel vermindert; daher ist der Rest des A = $\frac{25}{48}$ der ersten Summe weniger $\frac{25}{48}$ von 1644; aber $\frac{25}{48}$ von 1644 = $856\frac{1}{4}$; nun hat A nur 701 Scheffel, also $155\frac{1}{4}$ weniger verkauft, als es hätte nach dem ersten Verhältnisse geschehen müssen; dafür hat er aber auch $\frac{29}{60} - \frac{25}{60} = \frac{3}{60}$ der ersten Summe mehr übrig behalten; daher sind $\frac{3}{60}$ der ersten Summe = $155\frac{1}{4}$; also $\frac{1}{60}$ derselben = $51\frac{3}{4}$; also ist die erste Summe = 80 . $51\frac{3}{4}$ = 4140; daher A = $\frac{29}{60}$. 4140 = 2001, B = $\frac{31}{60}$. 4140 = 2139 Scheffeln.

Digitized by Google

11. Jemand hat in zwei Gefäßen Wein, deren Quantitäten sich wie 3 : 4 verhalten; darauf gießt er aus dem Gefäße B 18 Quart in das Gefäß A, und nun stehen ihre Quantitäten im Verhältnisse von 15 : 13. Wie viele Quarte waren anfangs in den Gefäßen?

Im ersten Falle hat das Gefäß A $\frac{3}{7}$ der Summe des Weines beider Gefäße, im andern $\frac{15}{28}$ derselben Summe, also $\frac{3}{28}$ mehr als im ersten Falle, und zugleich 18 Quart mehr; daher sind $\frac{3}{28}$ gedachter Summe = 18 Q., also $\frac{1}{28}$ derselben = 6 Q.; daher ist diese Summe = 28 . 6 = 168, und daher enthielt A $\frac{3}{7}$. 168 = 72 und B $\frac{4}{7}$. 168 = 96 Quart.

12. Zwei Tischler haben Mahagoni-Holz gekauft: A sagt zu B: gieb mir 18 Quadratfuß, so habe ich so viel als du behältst. Nein, sagt B zu A, gieb du mir 21 Quadratfuß, so habe ich 4 mal so viel als du übrig behältst. Wie viele Quadratfuß hatte jeder gekauft?

Mahagoni und andere Amerikanische Bohlen und Bretter zu feinen Arbeiten werden nach Quadratfuß zu 1 Zoll Dicke verkauft; daher hat ein Quadratfuß 144 Kubikzoll.

Hätte A das Verlangte erhalten, so würde er $\frac{1}{2}$ von dem haben, was beide zusammen besitzen; und hätte A dem Wunsche des B genügt, so würde er nur $\frac{1}{5}$ von dem haben, was beide zusammen gekauft hatten; dann hätte er aber auch in diesem Falle 18 + 21 oder 39 Quadratfuß weniger, zugleich $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ des Gesammtbesitzes beider weniger, als wenn er die geforderten 18 Quadratfuß erhalten hätte; daher sind $\frac{3}{10}$ des Gekauften beider = 39; also $\frac{1}{10}$ = 13, und der ganze Einkauf daher = 130 Quadratfuß. Daher beträgt der Einkauf des A und 18 Quadratfuß $\frac{1}{2}$. 130 oder 65, also sein Einkauf 65 — 18 = 47 Quadratfuß, und der des B 130 — 47 = 83 Quadratfuß.

13. Zwei Maurermeister haben gebrannten Kalk gekauft; A sagt zu B: überlasse mir 13 Tonnen, so habe ich $\frac{3}{4}$ von dem, was du behältst. Nein, sagt B zu A, überlasse du mir 29 Tonnen, so habe ich $4\frac{1}{2}$ mal so viel als du übrig behältst. Wie viele Tonnen hatte jeder gekauft?

Hätte A das Verlangte erhalten, so würde er $\frac{3}{7}$ der Summe beider haben; und würde er die Forderung des B eingeräumt haben, so würde er nur $\frac{2}{11}$ gedachter Summe, also $\frac{3}{7}$ weniger $\frac{2}{11}$ oder $\frac{19}{77}$ der Summe weniger als das haben, was er hätte, wenn B seinem Vorschlage beigetreten wäre; nun hat er aber auch unter den genannten Umständen 13 + 29 = 42 Tonnen weniger als vorher; daher sind $\frac{19}{77}$ der Summe beider = 42 Tonnen; also ist diese Summe = $\frac{77}{19}$. 42 = $170\frac{4}{19}$ Tonnen, und der Einkauf des A beträgt also $\frac{3}{7} \cdot \frac{77}{19} \cdot 42 - 13 = 59\frac{18}{19}$ Tonnen, und der des B = $\frac{4}{7} \cdot \frac{77}{19} \cdot 42 + 13 = 110\frac{5}{19}$ Tonnen.

Digitized by Google

e) Berechnungen, welche sich auf den kubischen Inhalt der Körper und ihre Dimensionen beziehen.

1) Körper von Ebenen begrenzt.

Diese Körper sind entweder prismatische oder pyramidalische; jene können nun wieder Parallelepipeden, wie Mauern, Räume der Gebäude, ferner Wälle, Gräben, Räume durch Dächer eingeschlossen, ꝛc. sein; diese sind entweder vollständige oder abgekürzte Pyramiden; vollständige Pyramiden sind manche Zelte, Thürme ꝛc., unvollständige Pyramiden sind manche Gestalten der Thürme ꝛc. Andere Körpergestalten können hier nicht zur Berechnung gezogen werden, weil dieselben tiefere Kenntniß der Stereometrie voraussetzen, als hier beiläufig mitgetheilt werden kann; doch hoffe ich, daß die Bearbeitung dieses Stoffes für das gewöhnliche Leben genügen werde. Nun ist noch zu bemerken, daß die Rechnungen zuerst in der Art vorgenommen werden können, daß man aus den gegebenen Dimensionen den körperlichen Inhalt, und dann, daß man aus dem gegebenen Körperinhalte und einer oder zwei Dimensionen die übrigen berechnet.

1. Ein Knabe hat von Pappe ein Kästchen in Gestalt eines Parallelepipedon gemacht, seine Länge beträgt 18, seine Breite 9 und seine Höhe 8 Zoll; dieses will er mit buntem Papiere bekleben; es ist nun die Frage, wie viele Quadratzoll Papier er dazu brauche, und wie groß der Inhalt des Kästchens sei? Die oberste Fläche, an Stelle des Deckels, wird mitgerechnet.

Der Länge nach ist eine Seitenfläche des Kästchens $= 8.18 = 144$ Quadratzoll, weil alle Ebenen Rechtecke sind; solcher Seitenflächen giebt es zwei; daher ist ihr Flächeninhalt $= 2.144 = 288$ □Zoll.

Der Breite nach ist eine Seitenfläche $= 8.9 = 72$ □Zoll, und da es 2 derselben giebt, so ist ihr Inhalt $= 2.72 = 144$ □Zoll.

Der Inhalt der einen Grundfläche beträgt $9.18 = 162$ □Zoll; also beider $= 2.162 = 324$ □Zoll. Folglich ist die Oberfläche des ganzen Kästchens $= 288 + 144 + 324 = 756$ □Zoll.

Rechnet man die Länge eines Bogens Papier 16, seine Breite 18 Zoll, so braucht der Knabe zum Ueberzuge seines Kästchens $\frac{7.6.6}{16.18} = 2\frac{5}{8}$ Bogen.

Der kubische Inhalt des Kästchens mit Inbegriff des Papiers beträgt $18.9.8 = 1296$ Kubikzoll $= \frac{3}{4}$ Kubikfuß.

Rechnet man die Dicke des Papp-Papieres $\frac{1}{4}$ Linie, so ist der innere Inhalt des Kästchens $= 17\frac{3}{4}.8\frac{3}{4}.7\frac{3}{4} = 1280\frac{4.2.9.5}{1.8.4.4}$ Kubikzoll; denn jede Dimension verliert durch die Dicke des Papieres an jedem Ende $\frac{1}{4}$ Linie, also im Ganzen $\frac{1}{2}$ Linie $= \frac{\frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{24}$ Zoll.

2. Ein Haus ist von außen gemessen 80 Fuß lang, 40 Fuß breit, und bis zum Dache 45 Fuß hoch. Die Mauern sind $1\frac{1}{2}$ Fuß dick; die oberste Decke ist $\frac{1}{2}$ Fuß dick. Welchen kubischen Inhalt faßt das Gebäude bis zum

Digitized by Google

Dache, wie groß ist der innere Raum, wie viel beträgt der kubische Inhalt der Mauern?

Der kubische Inhalt des ganzen Hauses mit Einschluß der Mauern bis zum Dache gerechnet beträgt $80 . 40 . 45 = 144\,000$ Kubikfuß.

Den innern Raum des Hauses zu finden, muß man zuerst die innern Dimensionen berechnen.

Es ist nun klar, daß sowohl die Länge als auch die Breite durch die Dicke der Mauer an jedem Ende $1\frac{1}{2}$ Fuß verliert; daher ist die innere Länge $= 77$, die innere Breite $= 37$ Fuß. Die Höhe wird nur um die Dicke der obersten Decke vermindert, also ist die innere Höhe $= 44\frac{1}{2}$ Fuß; folglich ist der innere Raum des Hauses $= 77 . 37 . 44\frac{1}{2} = 126\,780\frac{1}{2}$ Kubik-Fuß.

Nimmt man den innern Raum von dem ganzen hinweg, so behält man den kubischen Inhalt der Mauern sammt dem der obersten Decke $= 17\,219\frac{1}{2}$ Kubikfuß; davon noch den kubischen Inhalt der obersten Decke $= 77 . 37 . \frac{1}{2} = 1424\frac{1}{2}$ Kubikfuß hinweggenommen, läßt den kubischen Inhalt der Mauern $= 15\,795$ Kubikfuß. Denselben Inhalt kann man aber auch unmittelbar auf folgende Weise finden.

Eine Wand der Länge nach hat zu ihren Dimensionen 80 Fuß Länge, 45 Fuß Höhe, $1\frac{1}{2}$ Fuß Dicke; daher ihr Inhalt $= 80 . 45 . 1\frac{1}{2}$, und da die ihr gegenüberstehende eben so groß ist, so betragen beide zusammen $80 . 45 . 3 = 10\,800$ Kubikfuß.

Eine Mauer der Breite nach hat zu ihren Dimensionen 37, 45 und $1\frac{1}{2}$ Fuß, also beide Mauern zusammen $= 37 . 45 . 3 = 4995$ Kubikfuß; also der kubische Inhalt der 4 Mauern zusammen $= 15\,795$ Kubikfuß, wie vorher gefunden.

3. Das Innere des Gebäudes der vorigen Aufgabe wird durch zwei Mauern, die sich unter rechten Winkeln durchkreuzen, in 4 Räume zertheilt; diese Mauern haben eine Dicke von einem Fuße. Wie groß ist der kubische Inhalt dieser innern Mauern, und des innern leeren Raumes?

Die Mauer der Länge nach hat zu ihrer Länge 77, zu ihrer Höhe $44\frac{1}{2}$ und zu ihrer Dicke 1 Fuß; daher ist ihr kubischer Inhalt $= 77 . 44\frac{1}{2} . 1 = 3426\frac{1}{2}$ Kubikfuß. Die Mauer der Breite nach hat zu ihrer Länge 37 Fuß, an derselben verliert sie aber durch die Dicke der vorigen Mauer noch einen Fuß, also hat sie zu ihrer Länge nur 36 Fuß, zur Höhe $44\frac{1}{2}$ Fuß und zu ihrer Dicke einen Fuß; daher ist ihr Inhalt $36 . 44\frac{1}{2} . 1 = 1602$ Kubikfuß, also haben beide innern Mauern zusammen $5028\frac{1}{2}$ Kubikfuß. Um diesen Raum wird der innere vermindert; daher beträgt der innere leere Raum des Hauses $126\,780\frac{1}{2} - 5028\frac{1}{2} = 121\,752$ Kubikfuß.

4. Der innere Raum des in den vorstehenden Aufgaben gedachten Hauses wird durch zwei horizontale Decken oder Mauern in drei Stock getheilt. Jede dieser Mauern ist wieder ein Fuß dick. Nun ist die Frage,

Digitized by Google

wie viel diese Decken an kubischem Inhalte fassen, und wie groß noch der innere leere Raum ist?

Jede Decke verliert sowohl an ihrer Länge wie auch an ihrer Breite durch die äußern und innern Mauern 4 Fuß; daher hat die eine Decke zu ihren Dimensionen 76 Fuß Länge, 36 Fuß Breite und 1 Fuß Dicke, also der Inhalt beider $= 76 . 36 . 1 . 2 = 5472$ Kubikfuß; diese von dem innern Raume der vorigen Aufgabe hinweggenommen, läßt den innern leeren Raum $= 121\,752 - 5472 = 116\,280$ Kubikfuß.

Wären die innern 12 Räume unter einander gleich, so müßte jeder 9690 Kubikfuß fassen.

Diese Größe kann man auch unmittelbar, ohne Berechnung der innern Mauern und Decken finden.

Denn die Länge des innern leeren Raumes verliert durch die Dicke der äußern und innern Mauern 4, eben so viel die Breite; also ist die Länge desselben 76 und seine Breite 36 Fuß; dieses giebt für eine der 12 gleichen Abtheilungen 38 Fuß zur Länge und 18 Fuß zur Breite.

Durch die Dicke der 3 Decken verliert der innere leere Raum an seiner Höhe $2\frac{1}{2}$ Fuß, also bleiben für seine Höhe $45 - 2\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}$ Fuß; daher ist die Höhe einer Abtheilung $= \frac{1}{3} . 42\frac{1}{2} = 14\frac{1}{6}$ Fuß; folglich der innere leere Raum einer der zwölf gleichen Abtheilungen $= 38 . 18 . 14\frac{1}{6} = 9690$ Kubikfuß.

5. Vorschriftsmäßige Ziegel sollen $11\frac{1}{2}$ Zoll lang, $5\frac{1}{2}$ Zoll breit und $2\frac{1}{2}$ Zoll dick sein; dann nimmt jeder, den Mörtel und Kalk mit eingerechnet, der zwischen den Ziegeln zu ihrer Befestigung liegt, einen Raum von 12 Zoll Länge, 6 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke ein. Nehmen wir aber nur den kubischen Inhalt der Ziegel, weil nicht wenige durch Ungeschicklichkeit der Handlanger ꝛc. unbrauchbar werden, so fragt es sich, wie viele Ziegeln zur Aufführung der äußern und der beiden innern senkrechten Mauern erforderlich sind?

Der kubische Inhalt eines Ziegels ist also $= 11\frac{1}{2} . 5\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2} = \frac{1265}{8}$ Kubikzoll; so vielmal nun dieser Inhalt in dem der Mauern enthalten ist, so viele Ziegel sind erforderlich. Es war nun der Inhalt der äußern Mauern $= 15\,795$, und der der innern $= 5028\frac{1}{2}$, also zusammen $= 20\,823\frac{1}{2}$ Kubikfuß $= 20\,823\frac{1}{2} . 1728$ Kubikzoll; daher ist die gesuchte Zahl der Ziegel $= \frac{20\,823\frac{1}{2} . 1728}{\frac{1265}{8}} = 227\,560\frac{664}{1265}$ Ziegel.

6. Angenommen, daß jenes in der zweiten Aufgabe erwähnte Gebäude ein Speicher wäre, so wird sein innerer Raum ohne Decke und innere Mauern wie viele Last zu $56\frac{1}{2}$ und dann zu 60 Scheffel gerechnet fassen?

Ein Scheffel $= 3072$ Kubikzoll.

Der innere Raum dieses Speichers beträgt also $77 . 37 . 45 = 128\,205$ Kubikfuß.

Digitized by Google

Da 1 Scheffel = 3072 Kubikzoll = $\frac{3072}{1728}$ Kubikfuß; so sind $56\frac{1}{2}$ Scheffel = $56\frac{1}{2} \cdot \frac{3072}{1728} = \frac{204}{9}$ Kubikfuß; daher faßt der innere Raum des Speichers $128\,205 : \frac{204}{9} = 1276\frac{341}{904}$ Last zu $56\frac{1}{2}$ Scheffeln.

Eine Last zu 60 Scheffeln = $\frac{60 \cdot 3072}{1728} = \frac{320}{3}$ Kubikfuß; also enthält der gedachte innere Raum des Speichers $\frac{128205 \cdot 3}{320} = 1201\frac{59}{64}$ Last zu 60 Scheffeln.

7. Die Höhe des Daches vorher erwähnten Hauses sei 20 Fuß; so ist die Frage, welchen Raum das Dach mit der obersten Decke begrenzt, wenn derselbe die Gestalt eines dreiseitigen Prisma's darstellt.

Die Grundflächen dieses dreiseitigen Prisma's sind Dreiecke, deren Grundlinien 40 Fuß und ihre Höhen 20 Fuß betragen; daher ist der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke $\frac{40 \cdot 20}{2} = 400$ □Fuß; und diese Fläche mit der Länge des Hauses = 80 Fuß multiplicirt, giebt den innern Raum durch das Dach und die oberste Decke begrenzt (ll.) = 80 . 400 = 32 000 Kubikfuß.

8. Ein Wall ist 960 Fuß lang, 20 Fuß hoch, oben 12 Fuß, unten 48 Fuß breit; wie groß ist sein kubischer Inhalt?

Man kann diesen Wall als ein Prisma betrachten, dessen Grundflächen Paralleltrapeze sind.

Da nun der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes gleich ist dem Produkte aus seiner Höhe und der halben Summe seiner Parallelseiten; so ist der Flächeninhalt erwähnter Grundfläche = $20 \cdot \left(\frac{12+48}{2}\right) = 20 \cdot 30 =$ 600 □Fuß; folglich der Inhalt des Walles = 960 . 600 = 576 000 Kubikfuß.

Anmerk. Auf gleiche Weise wird der Inhalt eines Gartens berechnet; denn er hat auch die Gestalt eines Prisma's, dessen Grundflächen Paralleltrapeze sind.

9. Sei ABCDS eine Pyramide, Viereck abcd parallel der Grundfläche ABCD der Pyramide, so ist auch abcdS eine Pyramide, und der Körper ABCDabcd heißt dann eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. (Fig. 37.)

Sei Sf senkrecht auf der Ebene abcd, und die Verlängerung der Sf treffe die Ebene ABCD in F, so ist auch SF senkrecht auf der Ebene ABCD, und Sf ist die Höhe der kleinen Pyramide abcdS, SF die Höhe der großen Pyramide ABCD, fF die Höhe der abgekürzten Pyramide.

Die Geometrie lehrt nun folgenden Satz:

Das Quadrat der Höhe der kleinen Pyramide, Sf . Sf, verhält sich zum Quadrate der Höhe der großen Pyramide, SF . SF, wie sich die Grundfläche der kleinen Pyramide, abcd, zur Grundfläche der großen Pyramide, ABCD, verhält; also Sf . Sf : SF . SF = □ abcd : □ ABCD.

Man finde z. B. durch Messung Sf = 9 und SF = $21\frac{1}{2}$, so ist □ abcd : □ ABCD = 9 . 9 : $21\frac{1}{2} \cdot 21\frac{1}{2}$ = 324 : 1849; und findet man □ ABCD = 48, so ist □ abcd = $\frac{48 \cdot 324}{1849} = 8\frac{760}{1849}$.

Digitized by Google

Daraus ergiebt sich Pyramide abcdS $= \frac{1}{3} . 9 . 8\frac{7\,6\,9}{1\,8\,4\,9} = 25\frac{4\,3\,1}{1\,8\,4\,9}$, Pyramide ABCDS $= \frac{1}{3} . 21\frac{1}{2} . 48 = 334$; daher abgekürzte Pyramide ABCDabcd $= 334 - 25\frac{4\,3\,1}{1\,8\,4\,9} = 308\frac{1\,4\,1\,8}{1\,8\,4\,9}$.

Sind die Grundfläche ABCD der abgekürzten Pyramide, ihre obere Platte abcd und ihre Höhe fF gegeben, so kann man ihren kubischen Inhalt finden, indem man aus den gegebenen Größen die Höhe Sf der kleinen Pyramide berechnet. Zur Berechnung dieser Höhe aus den genannten Daten ist aber die Ausziehung der Quadratwurzel erforderlich, und da die Kenntniß dazu bis jetzt noch mangelt, weil das Verfahren noch nicht vorgetragen ist, so kann diese Berechnung hier keine Anwendung finden. Daher wollen wir uns auf andere Mittel beschränken.

Gesetzt die abgekürzte Pyramide ABCDabcd wäre gegeben, und man suche ihren kubischen Inhalt.

Man messe AB und finde sie $= 16$; nun nehme man eine Seite der Platte, welche gleichliegend mit AB, also ihr auch parallel ist; diese ist ab, und man finde sie $= 7$; ferner finde man die Höhe fF der abgekürzten Pyramide $= 22$, so hat man folgende Proportion:

$$Sf : SF = ab : AB \text{ oder } Sf : Sf + fF = ab : AB$$

und hierin die durch Messung gefundenen Werthe gesetzt, giebt $Sf : Sf + 22 = 7 : 16$; daraus folgt durch Trennung $Sf : 22 = 7 : 9$; also $Sf = \frac{2\,2 \cdot 7}{9} = 17\frac{1}{9}$; daher ist $SF = 22 + 17\frac{1}{9} = 39\frac{1}{9}$.

Nun messe man die erforderlichen Stücke der Parallelogramme ABCD, abcd; da man AB, ab als ihre Grundlinien bereits durch Messung gefunden hat, so messe man noch ihre Höhen; und man finde die Höhe des Parallelogramms ABCD $= 9$, so muß die Höhe des $\square$abcd $(16 : 7 = 9 : \frac{6\,3}{1\,6}) = \frac{6\,3}{1\,6} = 3\frac{1\,5}{1\,6}$ sein; daher

Pyramide ABCDS $= \frac{1}{3} . 39\frac{1}{9} . 9 . 16 = 1877\frac{1}{3}$ Kuben

„ abcdS $= \frac{1}{3} . 17\frac{1}{9} . \frac{6\,3}{1\,6} . 7 = 157\frac{5}{9\,6}$ „

daher abgekürzte Pyramide $= 1720\frac{1}{8}$ Kuben.

10. In der Berechnung des Raumes, welcher durch das Dach und die oberste Decke des Hauses begrenzt wird, nahmen wir an (siehe 7te Aufgabe), daß dieser Raum die Gestalt eines vollständigen Prisma's habe; diese Annahme findet aber in den wenigsten Fällen statt, meistens ist er ein unvollständiges Prisma, d. h. seine Grundflächen sind nicht parallel, sondern gegen einander geneigt, wie in Fig. 38. AD und BC. Nun könnte man zwar daraus leicht ein vollständiges Prisma bilden, indem man CE parallel AD zieht, so wäre AECD ein Parallelogramm, und man hätte dadurch das Dach in ein vollständiges Prisma und in eine Pyramide zerlegt, aber diese Zerlegung ist nicht sehr vortheilhaft, weil man aus den gegebenen Stücken nicht die Höhe, oder was hier dasselbe ist, nicht die Länge des vollständigen Prisma's finden kann; daher wird es unserm Zwecke und unsern zum Gebrauche stehenden Mitteln günstiger sein, wenn wir von C und D Lothe auf AB

Digitized by Google

fällen, wie CF und DG; denn dadurch zerlegen wir auch das unvollständige Prisma in ein gerades und in zwei Pyramiden. (Fig. 39.)

Man denke sich das Auge gerade über dem Kamme des Daches, so werden die Seitenflächen des Daches ABCD und HIDC, die Flächen an den Enden des Daches ADI und BCH und CD der Kamm des Daches sein. Sei nun CF, DG lothrecht auf AB, und CK, DL lothrecht auf HI, so sind auch die Ebenen CFK, DGL lothrecht auf der Ebene ABHI; daher ist Prisma CFKDGL ein gerades und seine Länge ist gleich CD = FG = LK; und außer diesem Prisma hat man noch zwei Pyramiden, AGLID und BHKFC, die man sich zu einem einzigen mit den Seitenflächen, CFK, DGL, die in allen Stücken einander gleich sind, zusammengeschoben denken kann. Nun ist die Berechnung leicht. Denn es sei AB = 80 Fuß = HI, AI = BH = 40 Fuß, die senkrechte Höhe des Daches = 20 Fuß, und CD = 60 Fuß; so ist der Flächeninhalt des △ CFK = $\frac{40 \cdot 20}{2}$ = 400 □Fuß; also Prisma CFKDGL = 60 . 400 = 24 000 Kubikfuß.

Die Grundflächen der beiden Pyramiden FBHKC, AGLID betragen zusammen 20 . 40 = 800 □Fuß = □ FBHK + □ AGLI, weil AI = BH = 40, und AG + FB = 80 − 60 = 20 Fuß, und die Höhen dieser Pyramiden sind 20 Fuß; daher ist der Inhalt beider Pyramiden = $\frac{1}{3}$. 20 . 800 = 5333$\frac{1}{3}$ Kubikfuß; folglich ist der ganze Raum durch die Dächer und die oberste Decke begrenzt = 24 000 + 5333$\frac{1}{3}$ = 29 333$\frac{1}{3}$ Kubikfuß.

11. Auf gleiche Weise kann man den Rauminhalt einer Fähre berechnen. Sei ABCD ein senkrechter Durchschnitt der Fähre ihrer Länge nach, DE, CF senkrecht auf AB; so ist Rechteck CDEF eine der Seitenflächen eines Parallelepipedon, eine andere ist der horizontale Boden der Fähre, und ADE, BCF sind Grundflächen dreiseitiger Prismen; hieraus ergiebt sich eine leichte Berechnung des gesuchten Inhalts. (Fig. 40.)

Die obere Länge AB der Fähre sei = 28 Fuß, die untere CD = 20 Fuß, die Höhe DE = CF ihrer Seitenwand = 2 Fuß, ihre Breite = 8 Fuß.

Nun kann man Rechteck CDEF als die Grundfläche des Parallelepipedon's betrachten, so ist seine Höhe (oder Länge) 8 Fuß; □ CDEF = 20 . 2 = 40 □Fuß, also ist der Inhalt des gedachten Parallelepipedon's = 8 . 40 = 320 Kubikfuß.

Vom △ AED kann man AE = 4 Fuß als seine Grundlinie ansehen, so ist seine Höhe DE = 2 Fuß; daher △ ADE = $\frac{4 \cdot 2}{2}$ = 4 □Fuß, welches die Grundfläche eines dreiseitigen Prisma's bildet, dessen Höhe = 8 Fuß ist; daher ist gedachtes Prisma = 8 . 4 = 32 Kubikfuß. Ein eben so großes Prisma stellt sich auf dem andern Ende der Fähre dar; folglich ist der Inhalt der Fähre = 320 + 2 . 32 = 384 Kubikfuß.

Diese Berechnung ist aber zu weitschweifig; denn man kann den ganzen innern Raum der Fähre als ein Prisma betrachten, dessen eine Grund-

Digitized by Google

fläche eine Seitenwand ABCD der Fähre und deſſen Höhe die Breite derſelben iſt.

Nun iſt Viereck ABCD ein Paralleltrapez $= DE.\left(\frac{AB+CD}{2}\right) = 2.\left(\frac{28+20}{2}\right) = 48$ □Fuß; daher iſt der Inhalt der Fähre $= 8.48 = 384$ Kubikfuß.

2) Körper von krummen Flächen begrenzt.

12. Ein Preuß. Scheffel, 3072 Kubikzoll faſſend, hat die Geſtalt eines Cylinders, deſſen Durchmeſſer geſetzlich 22 Zoll betragen ſoll; wie groß wird die Höhe desſelben ſein?

Da der Inhalt eines Cylinders gleich dem Produkte aus ſeiner Grundfläche und Höhe iſt (IV.), ſo muß man zunächſt den Inhalt der Grundfläche ſuchen.

Nun verhält ſich das Quadrat des Radius des Kreiſes zur Kreisfläche $= 1 : 3{,}_{14159}$; weil der Durchmeſſer des Scheffels $= 22$ Zoll iſt, ſo iſt der Radius der Grundfläche $= 11$ Zoll; daher 11.11 : Kreisfläche $= 1 : 3{,}_{14159}\ldots$, folglich Kreisfläche $= 11.11.3{,}_{14159} = 380{,}_{13239}$ □Zoll; dieſe mit der Höhe des Scheffels multiplicirt, giebt 3072 Kubikzoll; daher iſt die geſuchte Höhe $= \frac{3072}{380{,}_{13239}} = 8{,}_{0813956}$ Zoll $= 8$ Zoll $0{,}_{89674}$ Linien. Die Höhe des Scheffels im Innern (im Lichten) muß alſo 8 Zoll und $0{,}_{89674}$ Linien, alſo nahe 8 Zoll 1 Linie betragen.

13. Man hat eine gußeiſerne Röhre, deren kubiſchen Inhalt man ſucht. Der Durchmeſſer des leeren Raumes der Röhre beträgt 3 Zoll, die Dicke der Röhre iſt $\frac{1}{4}$ Zoll und die Länge derſelben 60 Fuß. Wie groß iſt der leere Raum der Röhre und das Metall derſelben?

Der leere Raum der Röhre iſt ein Cylinder, deſſen Grundfläche zum Radius $1\frac{1}{2}$ Zoll hat; daher iſt dieſe Grundfläche $= \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.3{,}_{14159}$ □Zoll, und da die Höhe dieſes Cylinders $= 60$ Fuß iſt, ſo iſt ſein Inhalt $= \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.3{,}_{14159}.60.12$ Kubikzoll $= 5089{,}_{3758}$ Kubikzoll $= 2$ Kubikfuß $1633{,}_{3758}$ Kubikzoll.

Die ganze Röhre mit Einſchluß des Metalls hat zum Durchmeſſer $3\frac{1}{2}$ Zoll, alſo beträgt der Radius $\frac{7}{4}$ Zoll; daher iſt die Grundfläche des Cylinders $= \frac{7}{4}.\frac{7}{4}.3{,}_{14159}$ Quadratzoll; folglich der Inhalt desſelben $= \frac{7}{4}.\frac{7}{4}.3{,}_{14159}.60.12$ Kubikzoll, und davon den Cylinder des leeren Raumes $= \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.3{,}_{14159}.60.12$ Kubikzoll hinweggenommen, läßt den Inhalt des Metalls $= (\frac{7}{4}.\frac{7}{4} - \frac{3}{2}.\frac{3}{2}).3{,}_{14159}.60.12 = \frac{13}{16}.3{,}_{14159}.60.12 = 1837{,}_{83015}$ Kubikzoll.

Digitized by Google

14. Ein Hut Zucker hat die Gestalt eines Kegels; der Durchmesser seiner Grundfläche beträgt 12 Zoll, seine Höhe 16 Zoll; welchen Inhalt hat dieser Hut Zucker?

Da der Inhalt eines Kegels gleich $\frac{1}{3}$ des Produkts seiner Grundfläche und Höhe (V.), seine Grundfläche $= 6.6.3{,}_{14159}$, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{3}.6.6.3{,}_{14159}.16 = 603{,}_{18528}$ Kubikzoll.

Anmerk. Da das specifische Gewicht des Zuckers $1{,}_{606}$ beträgt, so wiegt dieser Hut Zucker $36{,}_{86}$ Pfunde.

15. Ein Haufen Heu, in Gestalt eines Kegels, ist 24 Fuß hoch, sein Umfang am Erdboden beträgt 51 Fuß; wie viele Kubikfuß Heu enthält er?

Zur Berechnung dieser Aufgabe hat man zunächst den Radius der Grundfläche des Kegels zu suchen. Nun weiß man, daß sich der Durchmesser eines Kreises zur Peripherie desselben wie 1 zu $3{,}_{14159}$ verhält, daher hat man

$$3{,}_{14159} : 1 = 51 \text{ Fuß} : \text{gesuchten Durchmesser} = \frac{51}{3{,}_{14159}} \text{ Fuß};$$

also der gesuchte Radius $= \frac{51}{2.3{,}_{14159}}$ Fuß; daher die Grundfläche des Heuhaufens $= \frac{51}{2.3{,}_{14159}} \cdot \frac{51}{2.3{,}_{14159}} . 3{,}_{14159}$ Quadratfuß; folglich der Inhalt des Haufens $= \frac{1}{3} \cdot \frac{51}{2.3{,}_{14159}} \cdot \frac{51}{2.3{,}_{14159}} . 3{,}_{14159} . 24$ Kubikfuß $= \frac{51.51.2}{3{,}_{14159}} = 1655{,}_{85}$ Kubikfuß.

16. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden. Sei ABS ein Kegel, dessen Grundfläche ADB und Spitze S, seine Axe oder Höhe SC ist. (Fig. 41.)

Nun denke man sich eine schneidende Ebene parallel der Grundfläche gelegt, welche den Kegel in der Ebene adb durchschneidet; so ist adb ein Kreis, und der Körper adbS ist wieder ein Kegel; nimmt man diesen von dem ganzen Kegel hinweg, so ist der übrig bleibende Körper ADBadb ein abgekürzter Kegel, ADB ist seine Grundfläche, adb ist seine obere Platte und cC ist seine Höhe; AC = CB ist der Radius seiner Grundfläche, ac = cb ist der Radius seiner obern Platte oder der Grundfläche des kleinern Kegels, dessen Höhe Sc ist, und man hat folgende Proportion:

$$Sc : SC = ac : AC,$$

d. h. die Höhe des abgeschnittenen Kegels verhält sich zur Höhe des ganzen Kegels, wie der Radius der Grundfläche des ersten zum Radius der Grundfläche des andern Kegels.

Aus vorstehender Proportion leitet man durch Trennung folgende ab:

$$Sc : SC - Sc = ac : AC - ac, \text{ oder}$$
$$Sc : cC = ac : AC - ac,$$

Digitized by Google

d. h. die Höhe des abgeschnittenen Kegels verhält sich zur Höhe des abgekürzten Kegels, wie sich der Radius der Grundfläche des abgeschnittenen Kegels zur Differenz zwischen dem genannten Radius und dem Radius der Grundfläche des ganzen Kegels verhält.

Es sei nun AC = 15, ac = 6, eC = 24 Zoll, so ist

Sc : 24 = 6 : 9; also Sc = 16 Zoll.

Nach diesen Annahmen ist die Grundfläche des ganzen Kegels = 15 . 15 . 3,14159 □Zoll, seine Höhe = 24 + 16 = 40 Zoll; daher ist sein Inhalt = $\frac{1}{3}$. 15 . 15 . 3,14159 . 40 = 9424,77 Kubikzoll.

Die Grundfläche des abgeschnittenen Kegels ist 6 . 6 . 3,14159 Quadratzoll, und daher sein Inhalt = $\frac{1}{3}$. 6 . 6 . 3,14159 . 16 = 603,18528 Kubikzoll. Hieraus ergiebt sich der Inhalt des abgekürzten Kegels, wenn man den des abgeschnittenen von dem des ganzen hinwegnimmt, = 8821,58472 Kubikzoll.

17. Man hat einen Mastbaum in Gestalt eines abgekürzten Kegels und sucht seinen kubischen Inhalt. Zu dem Zwecke mißt man seine Länge und findet sie gleich 48 Fuß; darauf mißt man den Durchmesser seines Stamm- und Zopfendes und findet den ersten = 3 Fuß, den andern = 9 Zoll.

Aus dem Vorhergehenden ist es klar, daß man zur Lösung dieser Aufgabe zwei Kegel, den kleinen, abgeschnittenen, und den ganzen Kegel berechnen muß, so ist die Differenz beider der abgekürzte Kegel. Hiezu ist aber die Höhe des kleinen Kegels erforderlich, und diese findet man durch die oben angezeigte letzte Proportion, nämlich »die Höhe des kleinen Kegels verhält sich zur Höhe des abgekürzten, wie sich der Radius der Grundfläche jenes zur Differenz zwischen diesem und dem Radius der Grundfläche des ganzen Kegels verhält«; also: gesuchte Höhe : 48 Fuß = $\frac{9}{4}$ Zoll : 18 Zoll — $\frac{9}{2}$ Zoll, oder: gesuchte Höhe : 48 F. = $4\frac{1}{2}$: 18 — $4\frac{1}{2}$ = 1 : 3; daher ist die gesuchte Höhe = 16 Fuß.

Die Grundfläche des ganzen Kegels = $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}$. 3,14159 □Fuß, folglich sein Inhalt = $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2}$. 3,14159 . 64 = 150,79632 Kubikfuß.

Der Radius der Grundfläche des kleinen Kegels = $\frac{9}{2}$ Zoll = $\frac{\frac{9}{8}}{12}$ = $\frac{9}{24}$ = $\frac{3}{8}$ Fuß; daher diese Grundfläche = $\frac{3}{8}$. $\frac{3}{8}$. 3,14159, und der Inhalt desselben = $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{3}{8}$. 3,14159 . 16 = 2,35619 Kubikfuß; folglich der Inhalt des Mastbaumes = 148,44013 Kubikfuß.

18. Ein Gefäß hat die Gestalt eines Cylinders, sein äußerer Durchmesser beträgt 2 Fuß 9 Zoll, sein innerer 2 Fuß 8 Zoll 3 Linien: die äußere Höhe desselben ist 2 Fuß 4 Zoll, seine innere 2 Fuß 2 Zoll 6 Linien. Wie groß ist der innere Raum dieses Gefäßes in Quart ausgedrückt, wenn ein Quart = 64 Kubikzoll ist? Und wie viel beträgt das Holz desselben?

Die Grundfläche des ganzen Gefäßes = $\frac{33}{24}$. $\frac{33}{24}$. 3,14159 □Zoll; daher dessen Inhalt = $\frac{33}{24}$. $\frac{33}{24}$. 3,14159 . 28 = 23948,34057 Kubikzoll.

Digitized by Google

Die Grundfläche des innern Cylinders $= 16\frac{1}{8} \cdot 16\frac{1}{8} \cdot 3{,}14159$ □Zoll, also sein Inhalt $= 16\frac{1}{8} \cdot 16\frac{1}{8} \cdot 3{,}14159 \cdot 26\frac{1}{2} = 21\,646{,}85591$ Kubikzoll; daher ist die Quantität des Holzes gleich der Differenz beider Cylinder $= 2301{,}48466$ Kubikzoll $= 1$ Kubikfuß $573{,}48466$ Kubikzoll.

Der innere Raum des Gefäßes faßt $\frac{21\,646{,}85591}{64} = 338{,}5446$ Quart.

19. Jemand hat einen silbernen Becher in Gestalt eines abgekürzten Kegels, dessen Volumen er in Hinsicht seines innern Raumes und seines Silbers zu erfahren wünscht. Durch genaue Messung findet er den obern äußern Durchmesser 3 Zoll 5 Linien, den innern 3 Zoll 4 Linien, den äußern Durchmesser des Bodens 2 Zoll 3 Linien, die äußere Höhe 5 Zoll 4 Linien, die innere 5 Zoll $2\frac{1}{2}$ Linien. Welche Resultate hat er nach diesen Angaben durch Rechnung herausgebracht?

Da der Becher die Form eines abgekürzten Kegels hat, so hat man zunächst die Höhe des fehlenden Kegels zu suchen. (Siehe Aufg. 16.)

Gesuchte Höhe : $5\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{7}{2}$ Linien : $(\frac{41}{4} - \frac{7}{2})$ Linien $= 27 : 14$;

daher gesuchte Höhe $= \frac{5\frac{1}{2} \cdot 27}{14} = \frac{7}{7}^2 = 10\frac{2}{7}$ Zoll.

Daher ist der Inhalt des fehlenden Kegels $= \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 3{,}14159 \cdot \frac{7}{7}^2$,

der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \frac{41}{24} \cdot \frac{41}{24} \cdot 3{,}14159 \cdot 15\frac{13}{21}$;

also der Inhalt des abgekürzten Kegels $=$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3{,}14159 \cdot \frac{8}{7} \cdot (\frac{41}{3} \cdot \frac{41}{3} \cdot \frac{41}{3} - 9 \cdot 9 \cdot 9) = 3{,}14159 \cdot \frac{3517}{12 \cdot 27} =$
$34{,}10177$ Kubikzoll.

Nun hat man die Höhe des fehlenden Kegels zum innern abgekürzten Kegel zu suchen.

Gesuchte Höhe : $1\frac{2}{4}\frac{5}{4} = 13$ Linien : $(20 - 13)$ Linien $= 13 : 7$;

also gesuchte Höhe $= 1\frac{2}{4}\frac{5}{4} \cdot \frac{13}{7} = 9\frac{113}{168}$ Zoll.

Inhalt des fehlenden Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot 3{,}14159 \cdot 9\frac{113}{168}$,

Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot 3{,}14159 \cdot 14\frac{37}{432}$,

also Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3{,}14159 \cdot \frac{12}{432}^5 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 - \frac{13}{4} \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{13}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3{,}14159 \cdot \frac{125}{6} \cdot \frac{829}{64} = 31{,}39923$ Kubikzoll.

Verwandelt man diese Kubikzoll in Quart $= 64$ Kubikzoll, so erhält man den innern Raum des Bechers $= 0{,}490613$ Quart, also faßt der Becher sehr nahe $\frac{1}{2}$ Quart.

Nimmt man den innern abgekürzten Kegel von dem ganzen abgekürzten Kegel hinweg, so erhält man das Volumen des Silbers dieses Bechers $= 2{,}70254$ Kubikzoll.

Anmerk. Kennt man die Feinheit des Silbers, so kann man sowohl das Gewicht als auch den Werth des Bechers, ohne die Kosten des Verfertigens, berechnen. Denn das Silber des Bechers sei 12löthig. Nun ist das specifische Gewicht des Silbers $= 10{,}5$, das des Kupfers $= 8{,}788$; 1 Kubikfuß Wasser $= 66$ Pfund, also 1 Kubikzoll Wasser $= \frac{11}{8}$ Loth; daher 1 Kubikzoll Silber $= 10{,}5 \cdot \frac{11}{8} =$

Digitized by Google

$12,_{8333}\ldots$ Loth; 1 Kubikzoll Kupfer $= \frac{11}{9} \cdot 8,_{788} = 10,_{7409}$ Loth. Da im 12löthigen Silber $\frac{3}{4}$ Silber und $\frac{1}{4}$ Kupfer enthalten ist, so hat das Silber des Bechers $\frac{3}{4} \cdot 2,_{70254} = 2,_{026905}$ Kubikzoll, welche ein Gewicht von $\frac{77}{6} \cdot 2,_{026905} = 26,_{012}$ Loth haben, und das Kupfer im Becher beträgt $0,_{675635}$ Kubikzoll, deren Gewicht $= 10,_{7409} \cdot 0,_{675635} = 7,_{257}$ Loth; daher das Gewicht des Bechers gleich der Summe der Gewichte des Silbers und Kupfers $= 33,_{269}$ Loth. Da nun 16 Loth dieses Silbers $10\frac{1}{2}$ Thlr. Preuß. Courant betragen; so ist der Werth des Bechers, ohne Arbeitslohn, $= \frac{33,_{269}}{16} \cdot 10\frac{1}{2} = 21,_{8328}$ Thaler $=$ 21 Thlr. 24 Sgr. $11,_{8}$ Pf.

20. Es ist früher der Durchmesser des Erdäquators $= 1718,_{8734}$ Meilen gefunden; so fragt es sich nun, wie groß der kubische Inhalt der Erde sei?

Da nun (VI.) der Inhalt einer Kugel der sechste Theil vom Kubus ihres Durchmessers mit $\pi = 3,_{14159}$ multiplicirt ist, so ist der Inhalt der Erde $= \frac{1}{6} \cdot 1718,_{8734} \cdot 1718,_{8734} \cdot 1718,_{8734} \cdot 3,_{14159} =$
$\frac{1}{6} \cdot 5078\,455\,747,_{46429\,78309\,04} \cdot 3,_{14159} =$
$2659\,070\,965,_{27939\,39037\,64949\,56}$ Kubikmeilen.

Anmerk. Für diejenigen habe ich das vollständige Resultat der Rechnung zur Vergleichung aufgezeichnet, welche sich das Vergnügen machen wollen, die angezeigte Multiplikation auszuführen.

21. Man sucht die Oberfläche der Erdkugel, deren Durchmesser $= 1718,_{8734}$ Meilen ist.

Da die Oberfläche einer Kugel das Vierfache ihres größten Kreises ist (VI.), so ist die Oberfläche der Erde $= 4 \cdot \frac{1718,_{8734}}{2} \cdot \frac{1718,_{8734}}{2} \times 3,_{14159} = 9\,281\,908,_{59878\,12502\,204}$ Quadratmeilen.

22. Wie groß ist der Theil der Erdoberfläche, der durch zwei Meridiane, die um 10 Grade von einander abstehen, begrenzt wird?

Die Fläche, deren Größe man sucht, wird durch zwei Halbkreise begrenzt und heißt Kugelzweieck. Nun lehrt die Mathematik, daß sich ein Kugelzweieck zur ganzen Kugeloberfläche, wie die Zahl der Grade des Zweiecks sich zu 360° verhält; daher hat man zur Berechnung des gedachten Zweiecks folgende Proportion:

Kugelzweieck : Kugeloberfläche $= 10° : 360° = 1 : 36$,

also Kugelzweieck $= \frac{1}{36} \cdot 9\,281\,908,_{59878} = 257\,830,_{7944}$ Quadrat-Meilen.

23. Bekanntlich ist die Erde keine vollkommene Kugel, sondern sie ist unter den Polen abgeplattet. Nun können wir die Abplattung als dadurch entstanden betrachten, daß ein Stück der Erdkugel abgeschnitten ist; dieser Kugelabschnitt soll nun berechnet werden. (Fig. 42.)

Sei ACBE ein größter Durchschnitt der Kugel; eine Ebene, welche einen Kugelabschnitt bildet, durchschneidet jenen größten Kreis in einer Geraden

Digitized by Google

AB, so daß ACB den Durchschnitt durch den Kugelabschnitt darstellt. Gehe MC senkrecht durch AB, so heißt CD die Höhe des Kugelabschnitts.

Jeder Kugelabschnitt ist nun gleich einem Cylinder, dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel, und dessen Grundfläche zum Radius die Höhe des Kugelabschnitts hat, und diesen Cylinder um das Zweifache einer Kugel vermindert, deren Durchmesser gleich der Höhe des Kugelabschnittes ist.

Daher Kugelabschnitt ACB $=$ CD . CD . MA . $\pi - 2 . \frac{\text{CD . CD . CD}}{6} . \pi$.

Die Höhe des Kugelabschnittes CD sei $=$ h, der Radius MA der Kugel $=$ R, so ist Kugelabschnitt $=$ h . h . R . $\pi - 2 . \frac{\text{h . h . h}}{6} . \pi$.

Die Größe der Erdabplattung wird verschieden angegeben; wir wollen sie $= \frac{1}{300}$ des Durchmessers derselben annehmen; so ist der Radius der Grundfläche des vorher erwähnten Cylinders $= \frac{1718,8734}{300}$, $=$ der Höhe des Erdkugelabschnitts, der Radius der Erdkugel $= \frac{1718,8734}{2}$; daher der Inhalt des gedachten Cylinders $= \frac{1718,8734}{300} . \frac{1718,8734}{300} . 3,14159 \times \frac{1718,8734}{2} = 14\,772,61647\,37744$ Kubikmeilen.

Die Kugel, dessen Durchmesser gleich der Höhe des Kugelabschnittes $=$ der Abplattung ist, ist $= \frac{1}{6} . \frac{1718,8734}{300} . \frac{1718,8734}{300} . \frac{1718,8734}{300} . 3,14159 = 16,41401\,630419$, und diese doppelte Kugel $= 32,82803\,66084$, diese von jenem Cylinder hinweggenommen, läßt den Erdkugelabschnitt $= 14\,739,78843\,7166$ Kubikmeilen.

Da nun die Erde an beiden Polen abgeplattet ist, so muß man diesen doppelten Kugelabschnitt von dem oben berechneten Inhalte der Erde hinwegnehmen, um ihren eigentlichen Inhalt zu erhalten, und daher ist derselbe $=$ 2 659 041 485,70251 9572 Kubikmeilen.

24. Wie groß ist der kubische Inhalt der Planeten, wenn der Durchmesser des Merkur $= 584$, der der Venus $= 1633$, der des Mars $= 963$, der der Vesta $= 58$, der der Juno $= 303$, der der Pallas $= 440$, der der Ceres $= 344$, der des Jupiters $= 18\,917$, der des Saturnus $= 16\,769$, der des Uranus $= 7270$, der der Sonne $= 187\,796$ und der des Mondes $= 481$ Meilen ist?

Der kubische Inhalt der Sonne $= 3467\,648\,768\,079\,368,1057$ Kubikmeilen $= 1\,304\,045$ Erden, wie ihr Inhalt in der 20sten Aufgabe berechnet ist.

25. Die Abplattung des Mars beträgt $\frac{1}{16}$ seines Durchmessers, die des Jupiters $= \frac{1}{14}$ seines Durchmessers, die des Saturns $= \frac{1}{11}$ seines

Digitized by Google

Durchmessers. Betrachtet man jede Abplattung als einen Kugelabschnitt, so ist die Frage, wie groß diese Kugelabschnitte sind?

26. Zwei Parallelebenen AB, FG mögen eine Kugel durchschneiden, so heißt das zwischen ihnen liegende Stück der Kugel eine Zone (Zona ein Gürtel, Erdgürtel, Erdstrich). Der Gürtel ABGF ist gleich der Differenz der Kugelabschnitte ACB und FACBG; also Zone ABGF = Kugelabschnitt FACBG — Kugelabschnitt ACB. (Fig. 43.)

Die Höhe der Zone ist gleich der Differenz, DH, der Höhen der genannten Kugelabschnitte.

Es sei CD = 6, DH = 8, HM = 4 Zoll, so ist der Radius MC der Kugel = 18 Zoll.

Nun ist der Kugelabschnitt ACB = dem Cylinder, dessen Grundfläche zum Radius CD hat, und dessen Höhe = MC ist weniger der doppelten Kugel, deren Durchmesser = CD ist. Daher Kugelabschnitt ACB = $CD \cdot CD \cdot \pi \cdot MC - 2 \cdot \frac{CD \cdot CD \cdot CD}{6} \cdot \pi = 6 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 18 - \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{3} \cdot \pi$ $= 576 \cdot 3{,}_{14159} = 1809{,}_{55584}$ Kubikzoll.

Kugelabschnitt FACBG = Cylinder, dessen Grundfläche CH zum Radius hat, und dessen Höhe MC ist, weniger der doppelten Kugel, deren Durchmesser CH ist $= CH \cdot CH \cdot \pi \cdot MC - 2 \cdot \frac{CH \cdot CH \cdot CH}{6} \cdot \pi = 14 \cdot 14 \times$ $\pi \cdot 18 - 2 \cdot \frac{14 \cdot 14 \cdot 14}{6} \cdot \pi = 8210{,}_{021866}..$ Kubikzoll. Daher Zone ABGF $= 8210{,}_{02186} - 1809{,}_{55584} = 6400{,}_{466}$ Kubikzoll.

27. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts ist gleich einem Kreise, dessen Radius gleich der Sehne ist, die den Scheitel des Kugelabschnitts mit der Peripherie seiner Grundfläche verbindet. Daher Oberfläche des Kugelabschnittes ACB = Kreis, dessen Radius = AC ist. Oder: die Oberfläche eines Kugelabschnittes ist gleich einem Kreise, auf dessen Radius das Quadrat gleich dem Rechtecke unter der Höhe des Kugelabschnitts und dem Durchmesser der Kugel ist. Folglich Oberfläche des Kugelabschnitts ACB = dem Kreise, auf dessen Radius das Quadrat = dem Rechtecke unter CD und CE; daher AC . AC = CD . CE, oder CD : CA = AC : CE. Da in vorigem Beispiele CD = 6, CM = 18, also CE = 36; so ist CA . AC = 6 . 36 = 216; daher Oberfläche des Kugelabschnitts ACB = 216 . $3{,}_{14159}$ = $678{,}_{58344}$ Quadratzoll.

28. Die Oberfläche einer Zone ist gleich der Differenz der Oberflächen zweier Kugelabschnitte. Oberfläche der Zone ABGF = Oberfläche des Kugelabschnitts FCG weniger Oberfläche des Kugelabschnitts ACB.

Oberfläche des Kugelabschnitts FCG = FC . FC . π = HC . CE . π.

Oberfläche des Kugelabschnitts ACB = AC . CA . π = DC . CE . π; daher Oberfläche der Zone ABGF = FC . FC . π — AC . CA . π =

Digitized by Google

$HC \cdot CE \cdot \pi - DC \cdot CE \cdot \pi = (HC - CD) \cdot CE \cdot \pi = HD \cdot CE \cdot \pi$, d. h. die Oberfläche einer Zone ist gleich einem Kreise, auf dessen Radius das Quadrat gleich dem Rechtecke unter der Höhe der Zone und dem Durchmesser der Kugel ist. Folglich ist nach obigem Beispiele Oberfläche der Zone $ABGF = 8 \cdot 18 \cdot 3{,}_{14159} = 452{,}_{38896}$ Quadratzoll.

29. In folgenden Aufgaben betrachte man die Erde als eine vollständige Kugel. N, S seien die Pole der Erde; jeden Pol umgiebt ein Kreis, Polarkreis, im Abstande von ungefähr 23° 27′ 50″. Die Ebene dieses Polarkreises bildet einen Kugelabschnitt, dessen Höhe =? (Fig. 44.)

Der Radius PC = CK dieses Kreises ist =?

Daher ist der Umfang dieses Kreises =?

Die Gerade AQ gehe durch den Mittelpunkt der Erde, so ist AQ der Durchmesser des Aequators = 1718,$_{8734}$ Meilen. Parallel dem Aequator, im Abstande von 23° 27′ 50″, gehen die Wendekreise um die Erde, deren Durchmesser WD, wd seien; ihre Ebenen theilen die Erdkugel in Zonen.

Es sei also PN = NK = pS = Sk = 23° 27′ 50″; so sind die Oberflächen der Erdkugelabschnitte PNK, pSk die kalten Gegenden; sei AW = QD = Qd = Aw = 23° 27′ 50″; so ist die Oberfläche der Erdkugelzone WDdw die heiße Zone; folglich WP = KD = dk = pw = 43° 4′ 20″, und die Oberflächen der Erdkugelzonen WPKD, wpkd sind die gemäßigten Zonen.

Durch trigonometrische Rechnung findet man nun, unter der Annahme, daß der Durchmesser der Erde = 1718,$_{8734}$ Meilen:

NC = SH = 71,$_{0658}$ Meilen; CK = 342,$_{2028}$ Meilen.
CE = FH = 446,$_{1681}$ Meilen; ED = 788,$_{3710}$ Meilen.
EM = MF = 342,$_{2028}$ Meilen.

Hieraus ergiebt sich mit Anwendung der vorher entwickelten Sätze:

Kugelabschnitt PNK = Kugelabschnitt pSk = 13 260 081,$_{777}$ Kubikmeilen.
Zone WPKD = Zone wpkd = 564 165 820,$_{886}$ Kubikmeilen.
Zone AWDQ = Zone AwdQ = 752 109 579,$_{975}$ Kubikmeilen.
Daher Zone WDdw = 1 504 219 159,$_{950}$ Kubikmeilen.
Oberfläche PNK = Oberfläche pSk = $NC \cdot NS \cdot \pi$ = 383 755 Quadratmeilen.
Oberfläche der Zone WPKD = Oberfläche der Zone wpkd = 2 409 305,$_{7}$ Quadratmeilen.
Oberfläche der Zone AWDQ = Oberfläche der Zone AwdQ = 1 847 893,$_{57}$ Quadratmeilen.
Daher ist die kalte Gegend = 767 510 Quadratmeilen;
die gemäßigte Zone = 4 818 611 „
die heiße Zone = 3 693 787 „

30. Viele Gefäße, wie Eimer, Bottiche ꝛc., haben einen elliptischen Boden. Eine Ellipse erhält man, wenn man entweder einen geraden Kegel

Digitized by Google

oder einen Cylinder vermittelst einer Ebene so schneidet, daß dieser Schnitt nicht parallel der Grundfläche geht; der Schnitt muß aber beide entgegengesetzten Seiten, sowohl des Kegels als des Cylinders treffen. Denn geschieht dieses nicht, so darf der Schnitt nicht eine Ellipse sein; er ist beim Kegel eine Parabel, wenn der Schnitt parallel einer Seite des Kegels geht, eine Hyperbel, wenn der Schnitt mit der geschnittenen Seite des Kegels einen kleinern Winkel, als der an der Spitze des Kegels ist, bildet. Beim Cylinder entsteht ein Rechteck, wenn der Schnitt parallel einer Seite oder der Axe des Cylinders geht. (Fig. 45 und 46.)

Sei AKBS ein gerader Kegel; eine Ebene schneide beide Seiten AS, SB dieses Kegels und bringe den Schnitt CEDF hervor, so ist dieser Schnitt eine vollkommene Ellipse. Eine andere Ebene durchschneide den Kegel parallel der Seite AS desselben, und bringe den Schnitt KGH zum Vorscheine, so ist derselbe eine Parabel und Winkel BGN = Winkel BSA. Würde aber Winkel BGN kleiner als Winkel BSA, so würde der Schnitt KGH eine Hyperbel sein.

Die Ellipse (Fig. 45.) ist auf beiden Seiten ACB und ADB, wie auch an beiden Enden A und B gleich stark gekrümmt, natürlich aber an den Enden stärker als an den Seiten. Es giebt zwei Linien in der Ellipse, von denen die eine, AB, unter allen die längste ist; sie verbindet die äußersten Enden der Ellipse und heißt ihre große Axe; die andere ist unter allen die kürzeste, sie verbindet die Mitten der Seiten der Ellipse und halbirt die große Axe rechtwinklig, wie CD, diese heißt die kleine Axe.

Jede Ellipse ist nun einem Kreise gleich, auf dessen Radius das Quadrat gleich dem Rechtecke unter der halben großen und halben kleinen Axe ist.

Sei AB = 30, CD = 19 Zoll, so ist die Ellipse ACBD $= \frac{30}{2} . \frac{19}{2} . \pi$ $= 15 . \frac{19}{2} . 3{,}14159 = 447{,}67657$ Quadratzoll.

Die Wand eines Gefäßes möge nun senkrecht oder schief auf seiner Grundfläche stehen, so wird man, mit Hilfe der früher über Cylinder und Kegel entwickelten Begriffe, seinen Inhalt leicht berechnen können. Steht die Wand eines Gefäßes senkrecht auf seinem elliptischen Boden, so kann man dasselbe als einen Cylinder behandeln; wenn aber die Wand schiefwinklig auf dem elliptischen Boden steht, so wird man dasselbe als einen abgekürzten Kegel zu betrachten haben.

Ein Bottich sei 18 Fuß lang, 12 Fuß breit und 6 Fuß hoch, seine Wand stehe senkrecht auf seinem Boden; wie groß ist sein innerer Raum, und wie viele Tonnen zu 100 Quart faßt derselbe?

Die Grundfläche dieses Bottichs ist gleich $\frac{18}{2} . \frac{12}{2} . \pi$, also der kubische Inhalt des Bottichs $= 9 . 6 . \pi . 6 = 1017{,}87516$ Kubikfuß $=$ $1017{,}87516 . 1728$ Kubikzoll $=$ 274 Tonnen 82,62 Quart.

Digitized by Google

Eine Wanne sei oben 3 Fuß 8 Zoll lang, 2 Fuß 9 Zoll breit, unten im Boden 2 Fuß 10 Zoll lang und 1 Fuß 8 Zoll hoch. Wie groß ist der innere Raum dieser Wanne?

Dieses Gefäß muß man also als einen abgekürzten Kegel behandeln.

Eine Dimension des Bodens ist in der Aufgabe nicht angegeben, diese fehlende kann man aber leicht nach Proportion der obern finden; nämlich: obere Länge 44 Zoll : unterer Länge 34 Zoll = obere Breite 33 Zoll : zur gesuchten untern Breite; daher Breite des Bodens $= \frac{34 \cdot 33}{44} = 25\frac{1}{2}$ Zoll.

Nun hat man die Höhe des abgeschnittenen Kegels zu suchen; also

Gesuchte Höhe : 20 Zoll $= 34 : 44 - 34 = 34 : 10$;

folglich gesuchte Höhe $= \frac{20 \cdot 34}{10} = 68$ Zoll.

Die Grundfläche des abgeschnittenen Kegels ist $= \frac{34}{2} \cdot \frac{25\frac{1}{2}}{2} \cdot \pi = 17 \cdot \frac{51}{4} \cdot \pi$, und daher ist der Inhalt desselben $= \frac{1}{3} \cdot 17 \cdot \frac{51}{4} \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot 17 \cdot \frac{51}{4} \cdot 3{,}14159 \cdot 68$ Kubikzoll.

Die Grundfläche des ganzen Kegels $= \frac{44}{2} \cdot \frac{33}{2} \cdot \pi$, also der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3} \cdot 11 \cdot 33 \cdot 3{,}14159 \cdot 88$ Kubikzoll; folglich ist der Inhalt des abgekürzten Kegels oder der Wanne $= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot (11 \cdot 11 \cdot 22 - 17 \cdot \frac{17}{4} \cdot 17) \cdot 3{,}14159 = 18001{,}3107$ Kubikzoll $= 10$ Kubikfuß $721{,}3107$ Kubikzoll.

Zweites Kapitel.

Die Maße der Schwere oder die Gewichte.

Die Schwere stellt sich nicht allein auf der Erde dar, sondern sie erscheint im ganzen Weltenraume, und ist diejenige Kraft im Universum, welche die himmlischen Körper in ihren Bahnen erhält. Die Schwere (gravitas) ist nichts anderes, als die Ursache der gegenseitigen Anziehung der Körper, oder eigentlich ihrer Materie, aus welcher sie bestehen; und nicht zieht etwa die Erde allein die auf ihr befindlichen Körper an sich an, sondern auch umgekehrt, zieht jeder Körper die Erde nach sich; da aber diese Anziehung im geraden Verhältnisse der Masse erfolgt, und die Masse jedes irdischen Körpers in Vergleichung mit der Masse der Erde verschwindet, so verschwindet auch die Anziehung jedes irdischen Körpers in Bezug auf die Erde, d. h. die irdischen Körper müssen dem Zuge der Erde folgen, sich also dieser nähern. Die gegenseitige Anziehung der Körper erfolgt aber nicht nach dem einzigen Gesetze, nämlich nach dem geraden Verhältnisse ihrer Massen, sondern auch nach dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernungen. Zur Erläuterung dieses Gesetzes diene Folgendes. (Fig. 47.)

Die Körper A, B, C seien Würfel, deren eine Seite 2, 6, 1 sei; so ist die Masse des Körpers $A = 2.2.2 = 8$, die des $B = 6.6.6 = 216$,

Digitized by Google

die des C = 1 . 1 . 1 = 1; alle drei Körper seien von einerlei Masse; die Entfernung AC = 5, die BC = 9, so ist das Quadrat auf AC = 25, und das auf BC = 81; so ziehen die Körper A und B den Körper C nicht allein im geraden Verhältnisse ihrer Massen = 8 : 216, sondern auch noch im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernungen von C an, also noch im Verhältnisse von 81 : 25, und daher stehen die Kräfte der Anziehung von A und B in Bezug auf C im zusammengesetzten Verhältnisse, nämlich in dem von 8 . 81 : 216 . 25 = 3 : 25; es kann also der Körper C nicht dem Zuge von A, sondern muß dem von B und zwar mit der Kraft 25 — 3 = 22 folgen, welche aber mit der Annäherung des C an B wachsen muß. Denn ist z. B. der Körper C im Punkte D angelangt, wo AD = 12, BD = 3, so ziehen A, B den Körper C im Verhältnisse von 8 . 9 : 216 . 144 = 1 : 432 an. Befände sich aber C im Punkte E, so ist AE = 2, BE = 13, so ziehen A, B den C im Verhältnisse von 8 . 169 : 216 . 4 = 169 : 108 an, und in diesem Falle überwiegt die Anziehung von A die von B und es muß daher C dem A folgen.

Wer hierüber genauere Belehrung haben will, der muß die Dynamik studiren; hier kann nur von den Gewichten die Rede sein.

A. Eintheilung der Gewichte.

Die Einheit des Preuß. Gewichts ist das Pfund, welches der gesetzlichen Verordnung nach dem Gewichte des 66sten Theiles eines Preuß. Kubikfußes reinen oder destillirten Wassers bei 15 Graden Reaumur gleich sein soll.

Das Pfund theilt man in 32 gleiche kleinere Gewichte, und jeder derselben heißt ein Loth; das Loth wieder in 4 gleiche, noch kleinere Gewichte getheilt, giebt die Quentchen; daher ist 1 Pfund (℔) = 32 Loth, 1 Loth = 4 Quentchen.

22 ℔ machen einen kleinen, 33 ℔ einen großen Stein. 1 Centner = 110 ℔; eine Schiffslast = 4000 ℔, ein Schiffpfund = 3 Centnern. Diese Gewichte werden unter dem Namen Handelsgewicht begriffen.

Ein anderes Gewicht braucht man zum Wägen der edlen Metalle (Gold, Silber, Platina und Iridium); die Einheit des Gewichts zu diesem Zwecke heißt Mark, und daher haben die dahingehörigen Gewichte den Namen Markgewicht. Eine Mark ist genau = ½ eines Preuß. Pfundes.

Für Silber theilt man die Mark in 16 Loth, und jedes Loth in 18 Grän; daher die Mark in 288 Grän.

Für Gold theilt man die Mark in 24 Karat, und jedes Karat in 12 Grän, also ist die Mark wieder = 288 Grän.

Früher theilte man die Kölnische Mark, welche zum allgemeinen Ausmünzungsgewichte in Deutschland gebraucht wurde, in 8 Unzen, 16 Loth,

Digitized by Google

64 Quent, 256 Pfennige, 912 Heller, 4020 As, 4352 Eschen und 65 536 Richtpfennigstheile.

Zur Wägung kleinerer und kostbarerer Dinge als die edlen Metalle, nämlich der Edelsteine (Diamanten, Rubinen ꝛc.) und der Perlen bedient man sich des Edelstein-, Diamanten- oder Perlengewichts auch Juwelengewicht genannt. Dieses besteht in dem Karat = 4 Gran, welcher auch in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ und $\frac{1}{64}$ getheilt wird. 160 Karat = 9 Quentchen Preuß. Gewicht.

Endlich hat man noch ein anderes Gewicht zum Abwägen der Ingredienzien einer Medicin; daher heißt es das Medicinal- oder Apothekergewicht.

Durch die neue Maß- und Gewichtsordnung ist das Medicinalpfund in Preußen = $\frac{3}{4}$ des Preuß. Handelspfundes gesetzt, und hat folgende Unterabtheilungen: 1 Pfund = 12 Unzen, 1 Unze = 8 Drachmen, 1 Drachme = 3 Skrupel, 1 Skrupel = 20 Gran.

B. Rechnung mit den Gewichten.

a) Gegenseitige Verwandlungen.

1) Resolution.

1. Wie viele Loth und Quentchen betragen $\frac{7}{9}$ Pfunde?
   $\frac{7}{9}$ ℔ = $\frac{7 \cdot 32}{9}$ Loth = 24 Loth $3\frac{5}{9}$ Quentchen.
2. $\frac{11}{12}$ Centner sind wie viele Pfunde, Loth und Quentchen?
   $\frac{11}{12}$ Ctr. = $\frac{11 \cdot 110}{12}$ ℔ = 100 ℔ 26 Loth $2\frac{2}{3}$ Quentchen.
3. Jemand soll $\frac{17}{19}$ Mark Silber abwägen; da er dieses nicht kann, so verwandelt er die Quantität in Loth und Grän und erhält?
   $\frac{17}{19}$ Mark = $\frac{17 \cdot 16}{19}$ Loth = 14 Loth $5\frac{3}{19}$ Grän.
4. Die Mark, aus welcher Friedrichsd'or geprägt werden, enthält nur $\frac{65}{72}$ reines Gold; wie viele Karat und Grän?
   $\frac{65}{72}$ Mark = $\frac{65 \cdot 24}{72}$ Karat = 21 Karat 8 Grän reines Gold.
5. $\frac{24}{25}$ Medicinalpfunde sind wie viele untergeordnete Gewichte?
   $\frac{24}{25}$ ℳ℔ = $\frac{24 \cdot 12}{25}$ Unzen = 11 Unzen 4 Drachmen $9\frac{3}{4}$ Grän.
6. $\frac{26}{27}$ Karat Edelsteingewicht sind wie viele 64stel Karat?
   $\frac{26}{27}$ = $\frac{26 \cdot 64}{27}$ = $61\frac{17}{27}$ Vierundsechszigstel Karat.

2) Reduktion.

1. 4, 12, 20, 28 Loth betragen welchen Bruch eines Pfundes?
   4 Loth = $\frac{1}{8}$ ℔, 12 Loth = $\frac{3}{8}$ ℔, 20 Loth = $\frac{5}{8}$ ℔, 28 Loth = $\frac{7}{8}$ ℔.
2. $16\frac{1}{13}$ Pfund sind welcher Bruch eines Centners?
   $16\frac{1}{13}$ ℔ = $\frac{16\frac{1}{13}}{110}$ = $\frac{209}{13 \cdot 110}$ = $\frac{19}{130}$ Ctnr.
3. Das Silber, aus welchem Baiern Speciesthaler prägt, ist so beschaffen, daß eine Mark von demselben 13 Loth 6 Grän reines Silber enthält; Franz.

Digitized by Google

Franken werden aus solchem Silber geprägt, davon eine Mark 14 Loth $7\frac{1}{3}$ Grän reines Silber enthält. Das reine Silber ist welcher Bruch einer Mark?

6 Grän $= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ Loth; $13\frac{1}{3}$ Loth $= \frac{13\frac{1}{3}}{16} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$ Mark.

$7\frac{1}{3}$ Grän $= \frac{7\frac{1}{3}}{18} = \frac{30}{3.18} = \frac{2}{3}$ Loth; $14\frac{2}{3} = \frac{14\frac{2}{3}}{16} = \frac{72}{3.16} = \frac{9}{10}$ Mark.

4. Baierische Karolinen, alte Franz. Louisd'or, Franz. 40-Frankenstücke, Engl. Guineen, Engl. Sovereigns nach Berliner Probe, Päbstliche Zecchinen, Nordamerikanische Adler (Eagles) nach Engl. Probe, Oestreichische Dukaten nach Berliner Probe, Portug. Dobraon nach Berliner Probe, Portug. Crusaden nach Engl. Probe, Russ. Imperial-Dukaten nach Engl. Probe, Genuesische Genovine nach Franz. Probe, Neapol. 6-Dukatistücke nach Franz. Probe, Span. Quadruples nach Franz. Probe, Toskanische Ruspone nach Franz. Probe, Venetianische Dukato d'oro nach Franz. Probe, werden aus einem Golde geprägt, von dem eine Mark 18 Karat 6 Grän, 21 Karat 9 Grän, 21 Karat $7\frac{1}{2}$ Grän, 22 Karat, 21 Karat $11\frac{1}{2}$ Grän, 23 Karat 8 Grän, 21 Karat $10\frac{1}{2}$ Grän, 23 Karat $7\frac{1}{2}$ Grän, 21 Karat 11 Grän, 21 Karat $10\frac{1}{2}$ Grän, 23 Karat $6\frac{3}{4}$ Grän, 21 Karat $11\frac{1}{4}$ Grän, 21 Karat $5\frac{1}{4}$ Grän, 21 Karat $9\frac{3}{4}$ Grän, 23 Karat $11\frac{1}{4}$ Grän, 23 Karat $10\frac{3}{4}$ Grän; welchen Bruch beträgt dieses Gold von einer Mark? Diesen Bruch nennt man auch den Feingehalt des Goldes.

Der Feingehalt der Baier. Karolinen $= \frac{37}{48}$, der alten Franz. Louisd'or $= \frac{29}{32}$, der Franz. 40-Frankenstücke $= \frac{9}{10}$, der Engl. Guineen $= \frac{11}{12}$, der Engl. Sovereigns $= \frac{527}{576}$, der Päbstl. Zecchinen $= \frac{71}{72}$, der Nordamerikanischen Adler $= \frac{1756}{1920}$, der Oestreich. Dukaten $= \frac{63}{64}$, der Portug. Dobraon $= \frac{2633}{2880}$, der Crusaden $= \frac{2333}{2560}$, der Russ. Imperial-Dukaten $= \frac{377}{384}$, der Genovine $= \frac{1175}{1280}$, der 6-Dukatistücke $= \frac{343}{384}$, der Span. Quadruples $= \frac{349}{384}$, der Ruspone $= \frac{363}{384}$, der Venetian. Dukato d'oro $= \frac{1147}{1280}$.

5. 4 Skrupel $10\frac{18}{19}$ Grän sind welcher Bruch eines Medicinalpfundes?

4 Skrupel $10\frac{18}{19}$ Grän $= 90\frac{18}{19}$ Grän $= \frac{1728}{19}$ Grän; 1 ℔ $= 5760$ Grän; also sind 4 Skrupel $10\frac{18}{19}$ Grän $= \frac{1728}{19.5760} = \frac{3}{190}$ ℔.

b) Anwendung der vier Species.

1) Addition.

Zur Anfertigung einer Medicin sind erforderlich 2 Unzen 4 Drachmen 1 Skrupel 12 Grän der Ingredienz A, 3 Unzen 7 Drachmen 2 Skrupel 16 Grän der Ingr. B, 4 Unzen 5 Drachmen 2 Skrupel 18 Grän der Ingr. C, 6 Unzen 6 Drachmen 1 Skrupel 15 Grän der Ingr. D, 7 Unzen 7 Drachmen 2 Skrupel 14 Grän der Ingr. E. Welches Gewicht hat dieses Mixtum?

Digitized by Google

A =	2	Unzen	4	Drachmen	1	Skrupel	12	Grän
B =	3	»	7	»	2	»	16	»
C =	4	»	5	»	2	»	18	»
D =	6	»	6	»	1	»	15	»
E =	7	»	7	»	2	»	14	»
	2 ℔	2	Unzen	0	2	Skrupel	15	Grän.

2) Subtraktion.

Ein Banquier hat drei Beutel mit goldnen Münzen, die zusammen 78 Mark 8 Karat 9 Grän wiegen; zuerst versendet er den Beutel F mit Friedrichd'or, der 25 Mark 18 Karat 2 Grän wiegt, darauf den Beutel L mit Louisd'or, der 34 Mark 21 Karat 9 Grän wiegt. Wie schwer ist der dritte Beutel?

F =	25	Mark	18	Karat	2	Grän	
L =	34	»	21	»	9	»	
	60	»	15	»	11	»	
	78	»	8	»	9	»	
	17	Mark	16	Karat	10	Grän	= Gewicht des dritten Beutels.

3) Multiplikation.

Man soll 95 Centner 78 Pfunde 29 Loth 3 Quentchen mit 379 multipliciren; welches Gewicht wird man erhalten?

95 Centner 78 Pfund 29 Loth 3 Quentchen
379

1895	3032	3411	1137 Q.
3411	2653	758	8
36005 Ctr.	29562 ℔	10991 Lth.	33
271	352	284	32
36276 Ctr.	29914	11275	17
	22	96	16
	79	167	1 Q.
	77	160	
	21	75	
	11	64	
	104 ℔	11 Lth.	

Das Produkt ist also 36 276 Ctnr. 104 ℔ 11 Loth 1 Quentchen.

4) Division.

Nelkenbrecher berichtet, daß 11 500 Stück doppelte Braunschweiger Carlsd'or von verschiedenen Jahren zusammen 652 Mark 10 Loth nach einer 1831 in Berlin vorgenommenen Valvation gewogen haben, daß 10 500 Hannöversche doppelte Georgsd'or von 1825 596 Mark 5½ Loth und 17 500 Stück

Digitized by Google

von verschiedenen Jahren, mit Ausschluß von 1825, 994 Mark $4\frac{1}{2}$ Loth nach einer in Berlin gemachten Valvation gewogen haben; welches Gewicht hat jedes dieser Goldstücke?

10 Loth $= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ Mark; $652\frac{5}{8}$ Mark $= 652\frac{5}{8} \cdot 24 = 15\,663$ Karat, diese durch 11 500 dividirt, giebt 1 Karat; den Rest in Grän verwandelt $= 49\,936$ Grän und durch die Zahl der Carlsd'or dividirt, giebt 4,344 Grän; also ist das Gewicht eines Braunschw. doppelten Carlsd'or $=$ 1 Karat 4,344 Grän. Auf ähnliche Weise findet man das Gewicht eines Georgsd'or von 1825 $=$ 1 Karat 4,1664 Grän, von verschiedenen Jahren $=$ 1 Karat 4,363 Grän.

e) Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

In Nelkenbrecher dem Jüngern findet man folgende Angaben: 1 Preuß. Pfund Handelsgewicht (H.G.) $=$ 467,71 Grammen; Amsterdam: 1 Pond H.G. $=$ 1 Kilogramme; Athen: 1 Oka $=$ 1,329 Kilogr.; Augsburg: 1 Pfund H.G. $=$ 560 Grammen; Bremen: 1 Pfund H.G. $=$ 498½ Grammen; Konstantinopel: 1 Oka $=$ 1283,032 Grammen; Frankfurt a. M.: 1 Pfund Leichtgewicht $=$ 467,914 Grammen; Genua: 1 Libbra $=$ 348,66 Grammen; Hamburg: 1 Pfund $=$ 484,17 Grammen; Kopenhagen: 1 Pfund $=$ 499,309 Grammen; Leipzig: 1 Pfund $=$ 467,625 Grammen; Lissabon: 1 Libra $=$ 458,92 Grammen; Livorno: 1 Libbra $=$ 339,5 Grammen; London: 1 Pfund H.G. (Avoir du poids) $=$ 453,5 Grammen; Madrid: 1 Libra $=$ 460,1 Grammen; Neapel: 1 Libbra $=$ 320,76 Grammen; Paris: der Kubik-Centimeter destillirten Wassers wiegt einen Gramme; Petersburg: 1 Pfund $=$ 409,527 Grammen; Rom: 1 Lira $=$ 339,161 Grammen; Stockholm: 1 Pfund Viktualien-Gewicht $=$ 425,439 Grammen; Warschau: 1 Pfund $=$ 405,504 Grammen; Wien: 1 Pfund $=$ 560,012 Grammen.

Wie verhält sich nach diesen Angaben das Preuß. Pfund, als Einheit angenommen, zu den übrigen?

$$1 \text{ Pr. Pfund} : 1 \text{ Amsterd. Pond} = \frac{467,71}{467,71} : \frac{1000}{467,71} = 1 : 2,138.$$

Anmerk. Muncke erklärt: »Das Gewicht eines Kubik-Decimeter destillirten Wassers auf den luftleeren Raum reducirt im Punkte seiner größten Dichtigkeit wurde unter dem Namen Kilogramm als Normaleinheit angenommen.«

Das Wasser hat seine größte Dichtigkeit bei 4° C. (Celsius oder Centesimal-Scala) $= 3\frac{1}{2}$° R. (Reaumur).

Destilliren kommt her von destillare herabträufeln, und dieses wieder von stiria ein gefrorener hangender Tropfen Wasser, auch jeder hangende Tropfen.

Destillirtes Wasser ist solches, welches von allen frembartigen Beimischungen gereinigt ist, und dieses wird dadurch erreicht, daß man es in einem Gefäße mäßig erwärmt; über diesem Gefäße befindet sich ein anderes, von größerm Volumen;

Digitized by Google

aus diesem führt eine Röhre, die durch kaltes Wasser geleitet wird. Durch die Erwärmung des Wassers im Gefäße über dem Feuer steigt es als Dampf in das obere Gefäß, aus diesem dringt der Dampf in die Röhre, an deren kalten Wänden verwandelt es sich in Tropfen, die längs der Röhre, die nach unten zu geht, herabgleiten, und in ein unter der Oeffnung der Röhre stehendes Becken hineintröpfeln; daher destilliren. Als destillirtes Wasser kann man auch Regenwasser, wenn es bereits eine gewisse Zeit hindurch geregnet hat und als feiner Regen herabfällt, betrachten.

2) Proportionen.

Aus Nelkenbrecher dem Jüngern: Amsterdam: 1 Schiffpfund = 3 Ctr. à 100 ℔; Athen: der Cantaro hat 44 Okas à 400 Drachmen; Augsburg: 1 Ctr. = 5 Stein à 20 ℔; Bremen: 1 Ctr. = 116 ℔ à 32 Loth à 4 Quent; Konstantinopel: 44 Oken = 1 Cantaro à 100 Rottoli; Frankfurt a. M.: 1 Ctr. = 100 ℔ Schwergewicht = 108 ℔ Leichtgewicht; Genua: Peso grosso, für schwere und grobe, Peso sottile, für feine Waaren; 1 Peso grosso = 5 Cantari à 6 Rubbi oder 100 Rottoli à $1\frac{1}{4}$ Libbre, 1 Rubbo (sottile) = 25 Libbre; Hamburg: 1 Ctr. = 112 ℔ à 32 Loth; 1 Schiffpfund = 20 Liespfund à 14 ℔, 1 Schiffslast = 4000 ℔; Kopenhagen: 1 Ctr. = 100 ℔ à 32 Loth; Leipzig: 1 Ctr. = 110 ℔ à 32 Loth; Lissabon: 1 Quintal = 4 Arrobas à 32 ℔; Livorno: 1 Cantaro = 100 Libbre; London: 1 Hundredweight (avoir du poids) = 4 Quarters à 28 ℔; Madrid: 1 Quintal = 4 Arrobas à 25 ℔; Neapel: 1 Cantaro = 100 Rotoli = $277\frac{1}{9}$ Libbre; Paris: 10 Grammes = 1 Dekagramme, 10 Dekagrammes = 1 Hektogramme, 10 Hektogrammes = 1 Kilogramme, 10 Kilogrammes = 1 Myriagramme; Petersburg: 1 Berkowitz = 10 Pud, 1 Pud = 40 ℔ à 96 Solotnik; Rom: 1 Cantaro grosso = 10 Cantari sottile = 1000 Lire; Stockholm: für den Handel giebt es viererlei Gewichte: a) das Viktualien- oder Schalgewicht, 1 Ctr. = 120 ℔ V.G. à 425,439 Grammen, b) das Eisen-Stapelstädter oder Ausschiffungsgewicht, 1 ℔ = 340,27 Grammen, ein Schiffpfund = 400 ℔, c) das Pfund Bergwerksgewicht = 375,826 Grammen, d) das Pfund Landstädter-Gewicht = 357,957 Grammen; Warschau: 1 Ctr. = 100 ℔ = 4 Stein à 25 ℔ à 32 Loth; Wien: 1 Ctr. = 100 ℔ à 32 Loth.

Jedes dieser größern Gewichte beträgt wie viele Preußische Centner à 110 Preuß. Pfund?

Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, daß man diese Art Aufgaben auf dreifache Weise, durch Schlüsse, Zusammensetzung der Proportionen und den Kettensatz lösen könne. Da die Schlüsse immer dieselben bleiben, die benannten Zahlen nach Belieben genommen, so wird eine Auflösung jeder Art genügen.

Zu diesen Rechnungen muß man die Angaben der vorstehenden Aufgabe zu Hilfe nehmen.

Digitized by Google

a) Da 1 Amsterd. Schiffpfund = 300, und 1 Pfund = 1000 Grammen, so ist 1 Schiffpfund = 300.1000 = 300 000 Grammen. Nun machen $467,_{71}$ Grammen 1 Pr. Pfund; daher wird 1 Amsterd. Schiffpfund so viele Pr. Pfunde enthalten, wie vielmal die 300 000 Gramme die $467,_{71}$ Gramme in sich fassen; also 1 Amsterd. Schiffpfund = $\frac{300\,000}{467,_{71}}$ Pr. Pfunde, da nun 110 Pr. Pfunde = 1 Pr. Ctr., so ist 1 Amsterd. Schiffpfund = $\frac{300\,000}{110\,.\,467,_{71}} = 5,_{381}$ Pr. Ctr.

b)
1 Athen. Cantaro	: 1 Oka	=	44	: 1
1 Oka	: 1 Gramme	=	$152,_9$	: 1
1 Gramme	: 1 Pr. ℔	=	1	: $467,_{71}$
1 Pr. ℔	: 1 Pr. Ctr.	=	1	: 110
1 Athen. Cantaro	: 1 Pr. Ctr.	=	4 . 1529	: 46 771

daher 1 Athen. Cantaro = $0,_{1308}$ Pr. Ctr.

c)
x Pr. Ctr.	=	1 Augsburg. Ctr.	Wie viele Pr. Ctr. = 1 Augsb. Ctr., wenn dieser = 100 ℔, wenn 1 Augsb. ℔ = 560 Grammen, wenn $467,_{71}$ Grammen = 1 Pr. ℔, wenn 110 Pr. ℔ = 1 Pr. Centner.	
1	=	100 ℔		
1	=	560 Grammen		
$467,_{71}$	=	1 Pr. ℔		
110	=	1 Pr. Ctr.		

514 481 | 560 000 | $1,_{0884}$ Pr. Ctr.

Anmerk. Libra ein Pfund, auch eine Wage; daher kommt das Italienische Libra, Libbra, die Römische Lira, die Spanische Libra ꝛc. und dieses Wort Libra oder libra, abgekürzt ist lb., daraus entsteht leicht das Zeichen ℔.

Pondus, von pendere wägen, das Gewicht, die Last, die Schwere; daher das Franz. Poids das Gewicht, die Schwere, Last, das Engl. Pound, und auch sehr wahrscheinlich unser Pfund.

As ein Pfund Erz, eine Römische Münze, anfangs = 1 Pfund, dann immer leichter, auch bedeutet es ein Ganzes im Gegensatz zu seinen Theilen, daher unser As, und man schreibt also richtig As, unrichtig Aß; auch muß es nicht heißen Eschen, sondern Aeschen (siehe die Eintheilung der Gewichte).

d) Geometrische und arithmetische Verhältnisse.

Aufgaben mit arithmetischen und geometrischen Verhältnissen sind mannigfaltiger Art beim Flächeninhalt gegeben, ähnliche kann man über Gewichte aufstellen; daher sollen hier nur einige folgen.

1. Acht Unterofficiere erhalten zusammen 3 große Stein 3 Pfunde Fleisch, die sie unter ihre Mannschaften gleichmäßig vertheilen sollen; ihre Korporalschaften bestehen nach der Reihe aus 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Mann; wie viel erhält jeder Soldat?

Die Zahl der gesammten Mannschaft der 8 Unterofficiere beträgt 68; daher haben sie zusammen das 68fache einer Rate = 102 Pfund; also

1 Rate $= \frac{10}{6\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$ Pfund. Jeder Soldat hat also $1\frac{1}{2}$ Pfund Fleisch zu empfangen.

2. Man hat 12 Gewichte, die zusammen 1 Centner von 110 ℔ und 28 ℔ wiegen; jedes Gewicht wiegt $1\frac{1}{4}$ Pfund mehr als das zunächst leichtere. Welches sind diese Gewichte?

Das leichteste Gewicht wird eine gewisse Schwere haben, die das Einfache sei, so haben die darauf folgenden schwerern Gewichte das Einfache $+ 1\frac{1}{4}$ ℔, das Einfache $+ 2\frac{1}{2}$ ℔, das Einfache $+ 3\frac{3}{4}$ ℔, das Einfache $+ 5$ ℔, das Einfache $+ 6\frac{1}{4}$ ℔, das Einfache $+ 7\frac{1}{2}$ ℔, das Einfache $+ 8\frac{3}{4}$ ℔, das Einfache $+ 10$ ℔, das Einfache $+ 11\frac{1}{4}$ ℔, das Einfache $+ 12\frac{1}{2}$ ℔, das Einfache $+ 13\frac{3}{4}$ ℔; daher haben alle 12 Gewichte zusammen das 12fache $+ 82\frac{1}{2}$ ℔ $= 138$ ℔; also das 12fache $= 55\frac{1}{2}$ ℔; also das Einfache $= \frac{55\frac{1}{2}}{12}$ $= \frac{111}{24} = 4\frac{7}{8}$ ℔. Das leichteste Gewicht wiegt also $4\frac{7}{8}$ ℔ $= 4$ ℔ 20 Loth. Hieraus kann man die übrigen Gewichte leicht finden.

3. Ein Schmied hat drei Stangen Eisen von verschiedener Schwere gekauft; dieselben, nach Hause gebracht, wägt er, ihr Gewicht zu erfahren; vermittelst seiner Gewichte kann er aber keine Stange einzeln wägen, wohl aber immer je zwei derselben, und dadurch findet er, daß die Stangen A und B zusammen 3 Centner 3 ℔, B und C zusammen 3 Centner 68 ℔, A und C zusammen 3 Centner 23 ℔ wiegen; wie schwer ist jede Stange?
1 Ctr. $= 110$ ℔.

Das Gewicht der Stangen B und C ist um das mehr als der Stangen A und B, um was das Gewicht der Stange C mehr als das der A beträgt; daher wiegt C 65 ℔ mehr als A. (Fig. 48.)

Denn das Gewicht von A sei $=$ ab $=$ hk, das von B $=$ bc $=$ de, das von C $=$ ef $=$ gh.

Mache dm $=$ ae, so ist de $=$ bc, em $=$ ab, also wiegt C um mf $=$ 3 Ctr. 78 ℔ weniger 3 Ctr. 3 ℔ $= 65$ ℔ mehr als A.

Mache fn $=$ gk, so ist fe $=$ gh, en $=$ hk, also ist dn das, um was B mehr als A wiegt, und dieses beträgt also 3 Ctr. 68 ℔ weniger 3 Ctr. 23 ℔ $= 45$ ℔.

Daher ist das Gewicht von B $=$ dem Gewichte von A und 45 ℔, also beider Gewicht zusammen $=$ dem doppelten Gewichte von A $+ 45$ ℔ $= 3$ Ctr. 3 ℔ $= 333$ ℔; also das doppelte Gewicht der A $= 288$; daher das Gewicht von A $= 144$ ℔ $= 1$ Ctr. 34 ℔. Daraus ergiebt sich nun leicht das Gewicht von B $= 189$ ℔ $= 1$ Ctr. 79 ℔, und das von C $= 1$ Ctr. 99 ℔.

4. Ein Kaufmann hat zwei Säcke mit Kaffeebohnen erhalten, die sich ihrem Werthe nach wie 12 zu 17 und also auch eben so ihrem Gewichte nach verhalten müssen, da die Bohnen von gleicher Güte sind. Er kennt aber nicht genau das Gewicht dieser Säcke, und daher wägt er sie gegen-

Digitized by Google

seitig ab, und findet, daß er zum Gewichte des Sackes B 23 Pfund 24 Loth hinzulegen muß, die Wage ins Gleichgewicht zu bringen, d. h. das Gewicht des Sackes A zu erhalten. Wie schwer ist jeder Sack? (Fig. 49.)

Das Gewicht des Sackes A sei = ab, das des B = cd, und sei ce = ab, so ist de = 23 ℔ 24 Loth.

Nun ist ab : cd = 17 : 12, also hat A = ab das 17fache und B = cd das 12fache einer und derselben Quantität, daher A das 5fache mehr als B und zwar 23 ℔ 24 Loth; daher ist das 5fache = 23 ℔ 24 Loth, also das Einfache = 4 ℔ 24 Loth; also A = 17 . (4 ℔ 24 Loth) = 80 ℔ 24 Loth und B = 12 . (4 ℔ 24 Loth) = 57 ℔.

5. Ein Silberarbeiter erhält zu einer wichtigen Arbeit 4 Stücke Silber von verschiedenem Gewichte, die zusammen 24 Mark 15 Loth 8 Grän wiegen. Da das Silber dieser Stücke von ungleichem Gehalte ist, so muß er deren Gewicht genau kennen, um den verlangten Gehalt durch Zusatz von Kupfer hervorbringen zu können. Er wägt je zwei dieser Stücke, und findet, daß A und B zusammen 10 Mark 12 Loth 1 Grän, B und C zusammen 12 Mark 14 Loth, C und D zusammen 14 Mark 3 Loth 7 Grän wiegen. Hieraus glaubt er, das Gewicht jedes Stückes berechnen zu können; welche Resultate wird er erhalten? (Fig. 50.)

Sei ab = A, bc = de = B, ef = gh = C und hk = D.

Mache em = ab = A, so ist df um fm größer als ac, oder da ed = bc, so ist ef um fm größer als ab, d. h. C um fm größer als A. Nun ist df = 12 Mark 14 Loth, ac = 10 Mark 12 Loth 1 Grän, also fm = 12 Mark 14 Loth weniger 10 Mark 12 Loth 1 Gr. = 2 Mark 1 Loth 17 Gr.; daher ef = ab + fm, d. h. C = A + 2 Mark 1 Loth 17 Gr.

Mache hn = de = B, so ist D um das größer als B, um was gk größer als df, d. h. um was C + D größer als B + C, oder um was 14 Mark 3 Loth 7 Grän größer als 12 Mark 14 Gr. ist; daher ist D um 1 Mark 5 Loth 7 Gr. größer als B; also ist D = B + 1 Mark 5 Loth 7 Gr.

Man hat also die Differenz zwischen A und C und zwischen B und D gefunden; mehr läßt sich aus diesen Angaben nicht herausbringen; denn wollte man ac von gk hinwegnehmen, so würde man nur die Summe der Differenzen zwischen A und C und zwischen B und D erhalten, die aber bereits bekannt sind. Daher ist die Aufgabe unter den gegebenen Bedingungen unbestimmt, und man kann eins der 4 Stücke nach Belieben annehmen, so findet man leicht die übrigen.

Setzt man z. B. A = 1 Mark, so ist B = 9 Mark 12 Loth 1 Gr., daher C = 3 Mark 1 Loth 17 Gr., und D = 11 Mark 1 Loth 8 Gr.

&c. &c.

Anmerk. Jede gerade Zahl unbekannter Größen nach vorstehendem Beispiele kombinirt führt auf unbestimmte Aufgaben, nur die ungeraden Zahlen derselben liefern bestimmte Aufgaben.

Digitized by Google

6. Ein Goldarbeiter hat zwei Goldstangen, die zusammen 6 Mark 14 Karat 1 Grän wiegen. Darauf nimmt er $\frac{1}{3}$ der einen Stange A und $\frac{1}{4}$ der andern Stange B und diese wiegen zusammen 1 Mark 21 Karat 1 Gr. Wie schwer ist jede Stange? (Fig. 51.)

Sei ab = der Stange A, bc = der Stange B, so ist ac = 6 Mark 14 Karat 1 Grän.

Ferner sei ab durch d, e in 3, bc durch f, g, h in 4 gleiche Theile getheilt, und mn = $\frac{1}{3}$ ab = ad, no = $\frac{1}{4}$ bc = bf, so ist mo = 1 Mark 21 Karat 1 Grän.

Mache pq = ad = $\frac{1}{3}$ ab = $\frac{1}{3}$ A, qr = bk = $\frac{1}{4}$ bc = $\frac{1}{4}$ B, so ist pr = $\frac{1}{3}$ ab + $\frac{1}{4}$ bc = $\frac{1}{3}$ ac = $\frac{1}{3}$ (A + B) = 2 Mark 4 Karat 8$\frac{1}{3}$ Grän.

Nun ist pr um $\frac{1}{12}$ bc größer als mo, zugleich um 7 Karat 7 Grän größer als mo, also ist $\frac{1}{12}$ bc = $\frac{1}{12}$ B = 7 Karat 7$\frac{1}{3}$ Gr.; daher B = 12 . (7 Karat 7$\frac{1}{3}$ Gr.) = 3 Mark 19 Karat 4 Gr., und daher A = 2 Mark 18 Karat 9 Grän.

Anmerk. Folgenden Satz veranschauliche der Lehrer durch Linien.

Wenn man von jeder zweier Größen A, B die Hälfte nimmt, so hat man die Hälfte von der Summe beider Größen.

Wenn man von jeder zweier Größen $\frac{1}{3}$ nimmt, so erhält man $\frac{1}{3}$ von der Summe beider Größen.

Wenn man $\frac{2}{3}$ von jeder zweier Größen nimmt, so hat man $\frac{2}{3}$ von der Summe beider Größen.

Wenn man $\frac{1}{4}$ von jeder zweier Größen nimmt, so hat man $\frac{1}{4}$ von der Summe beider Größen.

Wenn man $\frac{3}{4}$ von jeder zweier Größen nimmt, so hat man $\frac{3}{4}$ von der Summe beider Größen. ꝛc.

Allgemein: Wenn man Gleichvielfache von gleichnamigen Theilen jeder zweier Größen nimmt, so hat man dasselbe Vielfache von demselben gleichnamigen Theile von der Summe beider Größen.

e) Berechnung der Tara, des Netto, Brutto und Gutgewichts.

Tara und Gutgewicht werden in der Regel nach Procent bestimmt, daher muß dieser Begriff zuerst vollkommen deutlich gemacht werden.

Pro für, anstatt, nach Beschaffenheit; centum hundert; daher pro cento für 100, oder Procent.

Wenn es nun heißt: 1 Procent ($\frac{0}{0}$) von einer Zahl, so muß man so vielmal 1 nehmen, als diese Zahl 100 enthält.

Wie viel beträgt also 1 $\frac{0}{0}$ von 300, 700, 1000, 20 000, 400 000, 5 000 000?

Zuerst suche ich also, wie vielmal 100 die Zahl enthält, und dann nehme ich eben so vielmal 1.

Nun ist 300 = 3 mal 100, also muß ich 3 mal 1 nehmen, daher ist 1 $\frac{0}{0}$ von 300 = 3.

Weil 700 = 7 . 100, so ist 1 $\frac{0}{0}$ von 700 = 7 . 1 = 7.

Digitized by Google

$1000 = 10 . 100$, also $1\,\%$ von $1000 = 10 . 1 = 10$.
$20\,000 = 200 . 100$, folglich $1\,\%$ von $20\,000 = 200 . 1 = 200$.
$400\,000 = 4000 . 100$, daher $1\,\%$ von $400\,000 = 4000 . 1 = 4000$.
$5\,000\,000 = 50\,000 . 100$, also $1\,\%$ von $5\,000\,000 = 50\,000 . 1 = 50\,000$.

Man erhält also $1\,\%$ einer Zahl, wenn man die Zahl durch 100 dividirt, oder den hundertsten Theil der Zahl nimmt.

Wie viel beträgt 1 Procent von 5, 10, 20, 25, 40, 45, 50, 60, 70, 75, 80, 90, 96?

$1\,\%$ von $5 = \frac{5}{100} . 1 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.
$1\,\%$ von $10 = \frac{10}{100} . 1 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.
$1\,\%$ von $20 = \frac{20}{100} . 1 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.
$1\,\%$ von $25 = \frac{25}{100} . 1 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Aus demselben Grunde ist $1\,\%$ von $40 = \frac{2}{5}$, von $45 = \frac{9}{20}$, von $50 = \frac{1}{2}$, von $60 = \frac{3}{5}$, von $70 = \frac{7}{10}$, von $75 = \frac{3}{4}$, von $80 = \frac{4}{5}$, von $90 = \frac{9}{10}$, von $96 = \frac{24}{25}$.

Wie groß ist $1\,\%$ von 120, 150, 175, 225, 375, 460?

$1\,\%$ von $120 = \frac{120}{100} . 1 = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Eben so ist $1\,\%$ von $150 = 1\frac{1}{2}$, von $175 = 1\frac{3}{4}$, von $225 = 2\frac{1}{4}$, von $375 = 3\frac{3}{4}$, von $460 = 4\frac{3}{5}$.

Wie viel beträgt 1 Procent von $11\frac{1}{9}$, $21\frac{3}{7}$, $66\frac{2}{3}$, $38\frac{6}{13}$, $38\frac{4}{17}$, $37\frac{17}{19}$, $116\frac{2}{3}$?

$1\,\%$ von $11\frac{1}{9} = \frac{11\frac{1}{9}}{100} = \frac{100}{9.100} = \frac{1}{9}$.

Eben so findet man $1\,\%$ von $21\frac{3}{7} = \frac{150}{7.100} = \frac{3}{7.2} = \frac{1}{14}$, von $66\frac{2}{3} = \frac{200}{3.100} = \frac{2}{3}$, von $38\frac{6}{13} = \frac{500}{13.100} = \frac{5}{13}$, von $38\frac{4}{17} = \frac{650}{17.100} = \frac{13.2}{17.2} = \frac{13}{34}$, von $37\frac{17}{19} = \frac{720}{19.100} = \frac{36}{19.5} = \frac{36}{95}$, von $116\frac{2}{3} = \frac{350}{3.100} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Soll man nun 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. Procent einer Zahl berechnen, so wird man zuerst 1 Procent suchen, und dieses 2, 3, 4, 5, 6 mal ꝛc. nehmen, oder $1\,\%$ der Zahl mit 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. multipliciren.

Wie groß sind 2 Procent von 480, 540, 660?

$1\,\%$ von $480 = \frac{480}{100} = \frac{24}{5}$, daher $2\,\%$ derselben Zahl $= 2 . \frac{24}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

Eben so findet man $2\,\%$ von $540 = 2 . \frac{540}{100} = 2 . \frac{27}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$; $2\,\%$ von $660 = 2 . \frac{660}{100} = 2 . \frac{33}{5} = 13\frac{1}{5}$.

Wie viel betragen 3 Procent von 15, 35, 55, 85?

$3\,\%$ von $15 = 3 . \frac{15}{100} = \frac{3.3}{20} = \frac{9}{20}$.
$3\,\%$ von $35 = 3 . \frac{35}{100} = \frac{3.7}{20} = 1\frac{1}{20}$.
$3\,\%$ von $55 = 3 . \frac{55}{100} = \frac{3.11}{20} = 1\frac{13}{20}$.
$3\,\%$ von $85 = 3 . \frac{85}{100} = \frac{3.17}{20} = 2\frac{11}{20}$.

Wie viel betragen $3\frac{1}{2}$ Procent von 80, 196, 256?

$1\,\%$ von $80 = \frac{80}{100}$, daher sind $3\frac{1}{2}\,\%$ von derselben Zahl $= 3\frac{1}{2} . \frac{80}{100} = \frac{7}{2} . \frac{4}{5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$.

Digitized by Google

$1\frac{0}{0}$ von $196 = \frac{196}{100}$, also $3\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ derselben $= \frac{7}{2} \cdot \frac{196}{100} = \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{25}$ $= \frac{343}{50} = 6\frac{43}{50}$.

$1\frac{0}{0}$ von $256 = \frac{256}{100} = \frac{64}{25}$, also $3\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ derselben $= \frac{7}{2} \cdot \frac{64}{25} =$ $\frac{7 \cdot 32}{25} = 8\frac{24}{25}$.

Diese Beispiele werden, meiner Meinung nach, zur Genüge die Berechnung der Procente einer Zahl erläutert haben, daher schreite ich zur Anwendung dieser Begriffe.

Die wenigsten Waaren können ohne Einhüllung, sondern die meisten müssen in Etwas verpackt versandt werden. Die Sachen nun, in welche Waaren zur Versendung eingepackt werden, heißen Packgut oder Emballage.

Das Gewicht einer Waare, mit Inbegriff ihres Packgutes, heißt das Brutto-Gewicht.

Das Gewicht einer Waare, ohne das ihrer Emballage, heißt das Netto-Gewicht.

Das Gewicht des Packguts, ohne das der Waare, heißt Tara.

Aus diesen Erklärungen geht hervor; daß das Brutto-Gewicht einer Waare gleich dem Netto-Gewichte derselben nebst ihrer Tara ist. Daraus ergiebt sich ferner, daß das Netto-Gewicht gleich dem Brutto-Gewicht weniger der Tara ist, und daß die Tara gleich dem Brutto-Gewichte weniger dem Netto-Gewichte ist. Z. B.

Man wäge ein Faß voll Korinthen und finde das Gewicht desselben 48 Pfund; darauf wäge man das leere Faß und finde sein Gewicht = 8 Pfund; so müssen die Korinthen allein, ohne das Faß, 40 Pfund wiegen. Hier sind also 48 Pfund das Brutto-Gewicht, 8 Pfund die Tara und 40 Pfd. das Netto-Gewicht der Korinthen.

Anmerk. Brutto kommt wahrscheinlich von dem Lateinischen brutus her, welches eigentlich thierisch, einfältig, dumm bezeichnet, dafür man auch sagen kann: roh und ungebildet; also eine brutto Waare eine solche, welche noch in ihrem natürlichen Zustande, also noch roh und unbearbeitet, noch nicht gereinigt von vielen fremdartigen oder schlechten, unbrauchbaren Theilen ist.

Unter der Rubrik «Usancen beim Waarenhandel» macht Nelkenbrecher folgende Bemerkungen: Barcelona: Tara. Alle Waaren in Fässern werden Netto gewogen; man bewilligt jedoch, um das Stürzen zu verhüten, auf Butter, Cacao und Kaffee $10\frac{0}{0}$, auf Engl. Vitriol in Kruken $18\frac{0}{0}$, auf Franz. Vitriol $25\frac{0}{0}$, und auf Oel in Pipen $20\frac{0}{0}$ für Netto-Tara. Waaren in Säcken werden gewöhnlich gestürzt, wo nicht, so werden $3\frac{0}{0}$ für Tara bewilligt; Havannahzucker in Kisten giebt $13\frac{0}{0}$ Tara.

Die Procente Netto-Tara muß man von dem Netto-Gewichte berechnen, sie zu dem letztern addiren, so hat man das Brutto-Gewicht.

a) Ein Faß Butter wiegt Brutto 66 Pfund, Netto-Tara beträgt $10\frac{0}{0}$. Wie groß ist die Tara und das Netto-Gewicht?

Digitized by Google

Rechnet man das Nettogew. 100, so ist die Tara $= 10 . \frac{100}{100} = 10$, daher das Bruttogew. $100 + 10 = 110$; folglich ist das 110fache eines gewissen Gewichts $= 66$ ℔; also das Einfache $= \frac{66}{110} = \frac{3}{5}$ ℔. Nun hat das Nettogew. das 100fache davon, also ist es $= 100 . \frac{3}{5} = 60$ ℔, und Tara $= 10 . \frac{3}{5} = 6$ ℔.

b) Ein Faß Cacao wiegt 2 Quintal 2 Arrobas 20 ℔ Brutto; Netto-Tara wird $10\frac{0}{0}$ gerechnet. Wie groß ist das Nettogewicht? 1 Quintal $=$ 4 Arrobas à 25 ℔.

Ist das Nettogew. das 100fache einer gewissen Quantität, so ist die Netto-Tara $=$ dem 10fachen derselben; also Bruttogew. $=$ dem 110fachen derselben.

Nun sind 2 Quintal $= 200$ ℔, 2 Arrobas $= 50$ ℔, dazu noch 20 ℔, sind zusammen $= 270$ ℔; also ist das 110fache $= 270$ ℔, daher das Einfache $= \frac{270}{110} = \frac{27}{11}$ ℔. Daher ist das Nettogew. $= 100 . \frac{27}{11}$ ℔ $= 245\frac{5}{11}$ ℔.

Nach Muncke ist 1 Libra (℔) $= 2$ Marcos $= 16$ Onças à 8 Ochavos oder 16 Adarmes. Daher ist das Nettogew. $= 2$ Quintal 1 Arroba 20 ℔ 7 Onças 2 Ochavos.

c) Engl. Vitriol in Kruken wiegt 177 Pfund Brutto; Netto-Tara wird $18\frac{0}{0}$ bewilligt; wie groß ist das Nettogewicht des Vitriols?

Das Nettogew. habe das 100fache, so hat Netto-Tara das 18fache, also Bruttogew. das 118fache $= 177$ ℔; daher das Einfache $= \frac{177}{118} = \frac{3}{2}$ ℔; daher das Nettogew. $= 100 . \frac{3}{2} = 150$ ℔.

d) Franz. Vitriol wiegt 195 Pfund Brutto, Netto-Tara $= 25\frac{0}{0}$; welches ist das Nettogewicht?

Ist Nettogew. $=$ dem 100fachen, so ist N.T. $=$ dem 25fachen; also B.G. $=$ dem 125fachen $= 195$ ℔; daher N.G. $= \frac{100 . 195}{125} = 156$ ℔.

e) Das Bruttogewicht von Oel in Pipen beträgt 636 Pfund, Netto-Tara wird $20\frac{0}{0}$ gerechnet; welches ist das Nettogewicht?

N.G. $= \frac{100 . 636}{120} = 530$ ℔.

f) Das Bruttogewicht von Kaffee in Säcken beträgt $978\frac{1}{2}$ Pfund, Netto-Tara ist $3\frac{0}{0}$; welches ist das Nettogewicht?

$$\text{N.G.} = \frac{100 . 978\frac{1}{2}}{103} = 950 \text{ ℔}.$$

g) Das Bruttogewicht von Havannahzucker in Kisten ist $1619\frac{2}{3}$ Pfund, Netto-Tara $= 13\frac{0}{0}$; so ist das Nettogewicht?

$$\text{N.G.} = \frac{100 . 1619\frac{2}{3}}{113} = 1433\frac{1}{3} \text{ ℔}.$$

Gutgewicht ist dasjenige Gewicht, welches man als Ersatz dafür giebt, was im Kleinhandel (im Detailverkaufe zu Lothen, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ꝛc. Pfunden) verloren geht. Nicht allein kann eine Waare, im Großen eingekauft, durch ungenaues Abwägen im Kleinhandel an ihrem Gewichte im Ganzen einen

Digitized by Google

Verlust erleiden, sondern auch durch Austrocknung und auch dadurch, daß manche Theilchen derselben zerstreut ꝛc. werden. Diesen Verlust ungefähr zu ersetzen oder zu vergüten, wird nun dem Käufer einer Waare im Großen ein Gewicht derselben, dafür er Nichts zu zahlen hat, bewilligt, und eben dieses Gewicht, das er also gratis (d. h. ohne Vergeltung, nur für bloßen Dank) empfängt, wird Gutgewicht genannt.

Nelkenbrecher: »Als Ersatz beim Einwiegen (Einwägen) im Detailverkauf wird Gutgewicht in Hamburg gegeben von feinen Waaren, oder von denen, die im Preis-Courant per Pfund notirt sind, $\frac{1}{2}$ pCt. (Procent); von solchen hingegen, die man pr. 100 Pfund notirt, 1 pCt. vom Hundert und vom Nettobetrag gerechnet.«

a) Eine Waare A ist im Preis-Courant per Pfund notirt, ihr Nettogewicht beträgt 78 Pfund, für Gutgewicht wird $\frac{1}{2}\,\%$ bewilligt; für wie viele Pfunde hat man zu bezahlen?

Man berechne $\frac{1}{2}\,\%$ von 78 ℔, ziehe dieses von dem Nettogewichte ab, so hat man das Gewicht, für welches zu zahlen ist. $\frac{1}{2}\,\%$ von 78 ℔ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{78}{100} = \frac{19}{100}$ ℔, welches das Gutgewicht ist; daher hat man für $78 - \frac{39}{100} = 77\frac{61}{100} = 77$ ℔ 19 Loth 2 Quent zu zahlen.

Anmerk. Die genaue Rechnung giebt $2{,}_{08}$ Quent; da man aber $0{,}_{08}$ Quent nicht abwägen kann, so wird es nicht berücksichtigt. Ueberhaupt wird jeder Bruch von den kleinsten Maßen, Gewichten und Münzen, der weniger als $\frac{1}{2}$ ist, vernachlässigt; jeder Bruch, der $\frac{1}{2}$ oder mehr als $\frac{1}{2}$ ist, für ein Ganzes gerechnet.

b) Eine Waare B, deren Nettogewicht 875 Pfund wiegt, wird gekauft; ihr Werth ist per 100 Pfund notirt, daher gestattet man $1\,\%$ Gutgewicht vom Nettobetrag. Für wie viele Pfunde hat man zu zahlen?

$1\,\%$ von 875 ℔ $= \frac{875}{100} = 8\frac{3}{4}$ ℔ Gutgewicht; daher hat man für $875 - 8\frac{3}{4} = 866\frac{1}{4}$ ℔ zu zahlen.

c) Das Bruttogewicht einer Waare beträgt 895 Hamb. Schiffpfund à 20 Liespfund à 14 Pfund; für Netto-Tara rechnet man $13\frac{1}{3}\,\%$, für Gutgewicht vom Nettobetrage $1\frac{1}{5}\,\%$; für wie viele Pfunde hat man zu zahlen?

895 Hamb. Schiffpfund $= 895 \,.\, 20 \,.\, 14$ Pfund.

Hat nun das Nettogew. das 100fache eines gewissen Gewichts, so beträgt die N.T. das $13\frac{1}{3}$fache desselben Gewichts; daher hat das Bruttogew. das $113\frac{1}{3}$fache $= 895 \,.\, 20 : 14$ ℔., also das Einfache $= \frac{895 \,.\, 20 \,.\, 14}{113\frac{1}{3}}$, daher das Nettogewicht $= \frac{100 \,.\, 895 \,.\, 20 \,.\, 14}{113\frac{1}{3}} = \frac{100 \,.\, 895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340}$ ℔.

Da nun Gutgewicht $= 1\frac{1}{5}\,\%$, so ist es $= 1\frac{1}{5} \,.\, \frac{100 \,.\, 895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{100 \,.\, 340} = \frac{6}{5} \,.\, \frac{895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340}$ Pfund, und folglich hat man für $\frac{100 \,.\, 895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340} - \frac{6}{5} \,.\, \frac{895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340} = (100 - \frac{6}{5}) \,.\, \frac{895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340} = \frac{494}{5} \,.\, \frac{895 \,.\, 20 \,.\, 14 \,.\, 3}{340} = \frac{494 \,.\, 179 \,.\, 14 \,.\, 2}{17}$ Pfund $= 218\,464\frac{4}{17}$ Hamb. Pfund zu zahlen.

Digitized by Google

Im bürgerlichen Verkehre kommt es sehr häufig vor, daß man zu untersuchen hat, wie viele Procente eine Größe von einer andern beträgt; daher müssen auch diese Verhältnisse hier untersucht werden.

Eine Waare hat ein Bruttogewicht von 1921 Pfund, für Tara werden 221 Pfund gerechnet; wie groß ist das Nettogewicht, und wie viele Procente beträgt die Tara davon?

Da das Bruttogewicht = dem Nettogewichte nebst der Tara ist, so ist das N.G. = dem B.G. weniger der Tara, also ist das N.G. = 1921 Pfd. − 221 = 1700 Pfund.

Wie oft nun das Nettogewicht 100 enthält, so oft muß die Tara die Tara-Procente enthalten; daher ist $\frac{1700}{100} = \frac{221}{\text{T. pCt.}}$ oder 1700 : 100 = 221 : Tara-Procente; hieraus folgt Tara-Procent = $100 . \frac{221}{1700} = \frac{221}{17}$ = 13; also hat man 13 $\frac{0}{0}$ für Netto-Tara gerechnet.

Aus dieser Berechnung, die in allen Fällen auf gleiche Weise ausgeführt wird, leitet man folgenden allgemeinen Satz ab: Um die Procente der Netto-Tara zu erhalten, sucht man den Bruch, welchen die Tara vom Nettogewichte ist, und multiplicirt denselben mit 100. Oder: Man bildet einen Bruch, der zum Zähler die Tara und zum Nenner das Nettogewicht hat, und multiplicirt denselben mit 100.

Diesen Satz werden wir künftig noch allgemeiner aussprechen können.

Das Nettogewicht einer Waare beträgt 144, 162, 324 Pfund, für Tara werden 24 Pfund gerechnet; wie viele Procente ist die Tara vom Nettogewichte?

$\frac{24}{144} . 100 = \frac{100}{6} = 16\frac{4}{6}\frac{0}{0}$; $\frac{24}{162} . 100 = \frac{400}{27} = 14\frac{22}{27}\frac{0}{0}$; $\frac{24}{324} . 100 = \frac{200}{27} = 7\frac{11}{27}\frac{0}{0}$.

Die Zahlen 8, 9, 10, 12, 16, 21 betragen wie viele Procente von den Zahlen 64, 108, 125, 156, 256, 441?

Wie vielmal 64 die Zahl 100 enthält, eben so oft muß 8 die gesuchten Procente in sich begreifen; daher ist $\frac{64}{100} = \frac{8}{\text{Procente}}$, oder 64 : 100 = 8 : Procenten, also sind die Procente = $\frac{8}{64} . 100 = \frac{100}{8} = 12\frac{4}{2}\frac{0}{0}$. Eben so findet man, daß 9 von 108 = $\frac{9}{108} . 100 = \frac{100}{12} = 8\frac{4}{3}\frac{0}{0}$, 10 von 125 = $\frac{10}{125} . 100 = 8\frac{0}{0}$, 12 von 156 = $\frac{12}{156} . 100 = 7\frac{9}{13}\frac{0}{0}$, 16 von 256 = $\frac{16}{256} . 100 = 6\frac{4}{4}\frac{0}{0}$, 21 von 441 = $\frac{21}{441} . 100 = 4\frac{16}{21}\frac{0}{0}$ beträgt.

Allgemeiner Satz: Man findet die Procente, welche eine Größe von einer andern beträgt, wenn man einen Bruch, der zum Zähler die erste und zum Nenner die andere Größe hat, bildet, und denselben mit 100 multiplicirt.

Preuß. Thalerstücke, $\frac{1}{3}$ Thalerstücke, $\frac{1}{6}$ Thalerstücke, $\frac{1}{12}$ Thalerstücke, Silbergroschen werden aus Silber geprägt, von dem eine Mark 12 Loth,

Digitized by Google

192 Grän, 150 Grän, 108 Grän, 64 Grän fein Silber, Friedrichsd'or aus Gold, von dem die Mark 260 Grän fein Gold enthält. Wie viele Procente beträgt das Silber oder Gold von dem Münzsilber oder Münzgolde einer Mark?

Die Mark = 16 Loth = 24 Karat = 288 Grän.

Das Silber der Thalerstücke $= \frac{12}{16} . 100 = 75\ \frac{0}{0}$; das der $\frac{1}{2}$ Thalerstücke $= \frac{192}{288} . 100 = 66\frac{2}{3}\ \frac{0}{0}$; das der $\frac{1}{6}$ Thalerstücke $= \frac{150}{288} . 100 = 52\frac{1}{12}\ \frac{0}{0}$; das der $\frac{1}{12}$ Thalerstücke $= \frac{108}{288} . 100 = 37\frac{1}{2}\ \frac{0}{0}$; das der Silbergroschen $= \frac{64}{288} . 100 = 22\frac{2}{9}\ \frac{0}{0}$. Das Gold der Friedrichsd'or $= \frac{260}{288} . 100 = 90\frac{5}{18}\ \frac{0}{0}$.

Nelkenbrecher bemerkt bei London: »Bei Kohlenverkäufen im Großen (über 5 Chaldrons) wird der 21ste Chaldron gratis gegeben, man nennt dies Hafenmaß.« Wie viele Procent beträgt also das Hafenmaß?

Man erhält auf 20 Chaldrons das 21ste gratis, daher zahlt man nur für 20, und folglich beträgt das Hafenmaß $\frac{1}{20} . 100 = 5\frac{0}{0}$.

Bei Berlin macht Nelkenbrecher folgende Bemerkung: »Netto-Tara rechnet man bei Kaffee, Rüböl und Talg, bei Rosinen, Bordeauzer und Engl. Syrup, und Schwefel in Kisten 10 pCt.; bei Zantischen und Triester Corinthen 14 pCt.; bei Baumöl über 1000 Pfd. 14 pCt., 500 Pfd. 16 pCt., unter 500 Pfd. 18 pCt., und Hanföl 15 pCt. Tara, ohne Kalk an dem Boden.« Hat man also Netto 456 Pfd. Kaffee, 936 Pfd. Rüböl, 852 Pfd. Talg, 555 Pfd. Rosinen, 808 Pfd. Bordeauzer Syrup, 1028 Pfd. Engl. Syrup, 758 Pfd. Zantische, 815 Pfd. Triester Corinthen, 2824 Pfd., 596 Pfd., 322 Pfd. Baumöl, 438 Pfd. Hanföl gekauft, so beträgt die Tara von jeder Waare wie viele Pfunde?

Die Tara beträgt von Kaffee $= 10 . \frac{456}{100} = 45\frac{3}{5}$ Pfd., von Rüböl $= 10 . \frac{936}{100} = 93\frac{3}{5}$ Pfd., von Talg $= 10 . \frac{852}{100} = 85\frac{1}{5}$ Pfd., von Rosinen $= 10 . \frac{555}{100} = 55\frac{1}{2}$ Pfd., von Bordeauzer Syrup $= 10 . \frac{808}{100} = 80\frac{4}{5}$ Pfd., von Engl. Syrup $= 10 . \frac{1028}{100} = 102\frac{4}{5}$ Pfd., von Zantischen Corinthen $= 14 . \frac{758}{100} = 106\frac{3}{25}$ Pfd., von Triester Corinthen $= 14 . \frac{815}{100} = 114\frac{1}{10}$ Pfd., von Baumöl $= 14 . \frac{2824}{1000} = 395\frac{9}{25}$ Pfd., $16 . \frac{596}{100} = 95\frac{9}{25}$ Pfd., $18 . \frac{322}{100} = 57\frac{24}{25}$ Pfd., von Hanföl $= 15 . \frac{438}{100} = 65\frac{7}{10}$ Pfd.

Sehr häufig wird der Unterschied der Maße, Gewichte und Münzen in Procenten ausgedrückt, und hiebei ist es nothwendig zu wissen, ob die Procente von der kleinern oder der größern Größe zu nehmen sind. Dieses wollen wir an einigen Beispielen untersuchen, die ich aus Nelkenbrecher anführe. Einleitung. »Die Berliner Elle ist um 17,9 pCt. größer als die Leipziger Elle.« Die Berl. Elle ist $= 295{,}65$ Par. Linien, die Leipz. Elle $= 250{,}6$ Par. Linien; also ist ihr Unterschied $= 45{,}05$ Par. Linien. Sucht man nun, wie viele Procente dieser Unterschied von der Berl. Elle beträgt, so ist er $= \frac{45{,}05}{295{,}65} . 100 = 15{,}2\ \frac{0}{0}$, und berechnet man denselben von

der Leipz. Elle, so findet man ihn $= \frac{45,_{04}}{250,_{6}} . 100 = 17,_{9}\ \%$, welches mit der Angabe übereinstimmt, und man muß also die Procente von der kleinern Elle nehmen.

Nelkenbr. Einleitung: «Das Wiener Gewicht ist 19,8 pCt. schwerer als das Berliner Gewicht.»

Das Berl. Pfd. $= 467,_{711}$ Grammen, das Wiener Pfd. $= 560,_{06}$ Grammen; also Differenz $= 92,_{349}$ Grammen. Diesen Unterschied in pCt. des Berl. Pfunds ausgedrückt, giebt $19,_{74}\ \%$, in pCt. des Wiener Pfunds ergiebt sich derselbe $= \frac{92,_{349}}{560,_{06}} . 100 = 16,_{49}\ \%$.

Auch dieses Beispiel lehrt, daß man die pCt. von dem kleinern Pfund berechnen müsse.

Nelkenbr. Alexandrien: «Der Ardeb für Getreide wird zu 168, für Reis zu 156 Oken (Gewichte) angegeben und soll 5 % geringer als ein Engl. Quarter sein, enthält also 13 956,» Franz. Kubikzoll. Der Engl. Quarter $= 14\,654,_{2}$ Franz. Kubikzoll.»

Differenz $= 4,_{7}\ \%$ vom Quarter und 5 % vom Ardeb.

Man hat also den Unterschied in Procenten von der kleinern Größe auszudrücken

Kennt man den Inhalt des Quarters, so kann man sogleich den des Ardeb finden. Denn der Inhalt des Ardeb sei das Einfache, so sind 5 pCt. davon $= \frac{1}{100} . 5 = \frac{1}{20}$ des Einfachen; daher $1\frac{1}{20}$ des Einfachen $=$ 14 654,2 Franz. Kubikzoll; daher das Einfache $= \frac{14654,_{2}}{1\frac{1}{20}} = \frac{20.14654,_{2}}{21}$ $= 13\,956,_{39}$ Franz. Kubikzoll, das mit der Angabe übereinstimmt.

Nelkenbr. Ancona: «Das Handelsgewichtspfund wiegt genau 5093,5 Engl. Grän, und ist $2\frac{3}{4}$ pCt. leichter als das Römische.» Ferner setzt Nelkenbrecher das Röm. Pfund $= 5234$ Engl. Grän. Differenz $= 2,_{69}$ in pCt. vom Römischen, $= 2,_{76}$ in pCt. vom Anconischen Pfunde, also mußte man wieder vom kleinern Pfunde die pCt. berechnen.

Nelkenbr. Frankfurt a. M.: «Der Fuß hat $126\frac{1}{4}$ Franz. Linien und ist $9\frac{3}{8}$ pCt. kleiner als der Rheinl. Fuß.»

Der Rheinl. Fuß $= 139,_{13}$ Franz. Linien.

Differenz $= 12,_{96}$ Franz. Linien $= 9,_{315}\ \%$ in Rheinländ. Fuß, $= 10,_{072}\ \%$ in Frankfurter Fuß; $9\frac{3}{8}\ \% = 9,_{375}\ \%$; die erste Rechnung stimmt genauer als die andere mit der Angabe, und Nelkenbr. ist sich also hier nicht konsequent geblieben.

Nelkenbr. Nürnberg: «Der Fuß hält 134,7 Franz. Linien und ist $3\frac{1}{4}$ pCt. kürzer als der Rheinl.» $(= 139,_{13}$ Frz. L.)

Die Differenz $= 4,_{43}$ Franz. Linien $= 3,_{19}\ \%$ vom Rheinl. $= 3,_{28}$ vom Nürnb. Fuß, also kommt das letztere Resultat der Angabe näher als das erste.

Digitized by Google

Nelkenbr. Schweden: „Das Apothekergewichtspfund wiegt 356,392 Grammen und ist $\frac{1}{2}$ pCt. leichter als das gewöhnliche Deutsche Apothekerpfund.“ Das gewöhnliche Deutsche Apothekerpfund ist das Nürnb. = 357,854 Gr. Differenz = 1,462 Grammen = 0,409 % vom Nürnberger = 0,412 vom Schwedischen, und das letzte Resultat kommt wieder der Angabe näher als das erste.

Aus den angeführten und noch vielen andern Beispielen kann man also die Regel ziehen: Soll man den Unterschied zweier ungleichen Größen in Procenten ausdrücken, so muß dieses in Bezug auf die kleinere Größe geschehen, d. h. man bildet einen Bruch, der zum Zähler den Unterschied und zum Nenner die kleinere Größe hat, und multiplicirt denselben mit 100.

Zur Lösung einer solchen Aufgabe ist es aber nicht immer nothwendig, daß man zuerst den Unterschied der ungleichen Größen suche, und dann denselben in Procente von der kleinern Größe verwandle, sondern man kann unmittelbar die größere Größe in Procente der kleinern ausdrücken, und dann die Differenz zwischen den erhaltenen Procenten und 100 nehmen. Z. B. Das Preuß. Pfund ist = 467,71, das Hamb. Pfund = 484,12 Grammen, um wie viele pCt. ist das eine Pfund größer als das andere?

$\frac{484,12}{467,71} . 100 = 103,506$; daher ist das Hamb. Pfd. um 3,506 % größer als das Preuß. Pfund.

Die Preuß. Kölnische Mark = 233,855, und die Wiener Kölnische Mark = 280,644 Grammen; um wie viele pCt. ist die Wiener Mark größer als die Preuß.?

$\frac{280,644}{233,855} = 120,0077$; daher ist die Wiener Mark um 120,0077 — 100 oder um 20,0077 % größer als die Preuß. Mark.

Man kann ohne erheblichen Fehler 120 Preuß. Mark = 100 Wiener Mark, oder 6 Preuß. = 5 Wiener Mark setzen, und diese Gleichung findet in Wirklichkeit statt.

Da die größere zweier ungleichen Größen gleich der kleinern und dem Unterschiede beider ist, so wird man eine Gleichung zwischen zwei ungleichen Größen, deren Unterschied in Procenten der kleinern ausgedrückt ist, erhalten, wenn man die größere mit 100, und die kleinere mit der Summe von 100 und den Unterschieds-Procenten multiplicirt.

Denn im letzten Beispiele war $\frac{280,644 \text{ Grammen} \times 100}{233,855 \text{ Grammen}} = 120,0077$; nun sind aber 280,644 Grammen = 1 Wiener Mark, und 233,855 Grammen = 1 Preuß. Mark; daher kann man auch setzen $\frac{1 \text{ Wiener Mark} \times 100}{1 \text{ Preuß. Mark}}$

Digitized by Google

$= 120{,}_{0077}$, und da der Dividendus stets gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten ist, so ist

1 Wiener Mark $\times 100 = 100$ Wiener Mark $= 120{,}_{0077}$ Pr. Mark; d. h. man hat die größere Größe mit 100 und die kleinere mit der Summe von 100 und den Unterschieds-Procenten ($= 20{,}_{0077}$) multiplicirt.

Das Preuß. Pfund ist um $14{,}_{285}$ % schwerer als das Russ. Pfund; wie stellt sich aus diesen Angaben die Gleichung heraus?

100 Preuß. Pfd. $= (100 + 14{,}_{285})$ Russ. Pfd. $= 114{,}_{285}$ Russ. Pfd.

Dieses kann man auch durch Rechnung aus folgenden Angaben finden. 1 Preuß. Pfd. $= 467{,}_{71}$, 1 Russ. Pfd. $= 409{,}_{27}$ Grammen.

Anmerk. Durch Rechnung wird man eigentlich 100 Preuß. ℔ $= 114{,}_{2908}$ Russ. ℔ finden, weil der Unterschied nach Nelkenbr. Rechnung gegeben ist, und die Angaben in Grammen von Muncke herrühren.

Nelkenbr. hat 1 Preuß. ℔ $= 9728$ und 1 Russ. ℔ $= 8512$ Holländ. As und dieses giebt in der That 100 Preuß ℔ $= 114{,}_{285}$ Russ. ℔.

Bei Rechnung mit Procenten ist noch auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam zu machen; man kann nämlich entweder in oder auf 100 rechnen; in 100 rechnet man, wenn man die gegebenen Procente von 100 subtrahirt, auf 100 rechnet man, wenn man die gegebenen Procente zu 100 addirt. Beide Rechnungsarten kommen häufig im Geschäftsleben vor; eine allgemeine Regel kann hierin aber nicht aufgestellt werden, sondern man muß sich den Gebrauch gewisser Orte und in gewissen Geschäften durch Erfahrung merken. So führt Nelkenbrecher bei Frankfurt a. M. Folgendes an: »Im Großhandel gewährt der Verkäufer dem Käufer 1 pCt. Gutgewicht, und rechnet 100 Pfund für 99, so daß also der Käufer anstatt 108 hier $109\frac{1}{11}$ Pfund erhält.«

Hier ist also die Rechnung in 100 geführt.

Jemand kauft 2850 Pfd. einer Waare und erhält $1\frac{1}{2}$ pCt. Gutgewicht; für wie viele Pfunde hat er zu zahlen, wenn die Procente a) in 100, b) auf 100 gerechnet werden?

a) Wird $1\frac{1}{2}$ % in 100 gerechnet, so giebt man dem Käufer stets 100 ℔ und fordert Bezahlung nur für $100 - 1\frac{1}{2} = 98\frac{1}{2}$ ℔; so oft also das Gewicht der Waare 100 ℔ enthält, eben so vielmal hat der Käufer für $98\frac{1}{2}$ zu zahlen; daher sind $\frac{2850}{100} \cdot 98\frac{1}{2} = \frac{57 \cdot 197}{2 \cdot 2} 2807\frac{1}{4}$ zahlbar.

b) Werden die $1\frac{1}{2}$ % auf 100 gerechnet, so giebt man stets dem Käufer $101\frac{1}{2}$ ℔ und verlangt Bezahlung für 100 ℔; so oft also das Gewicht der Waare $101\frac{1}{2}$ ℔ enthält, eben so oft hat man für 100 zu zahlen; daher sind $\frac{2850}{101\frac{1}{2}} \cdot 100 = 2807{,}_{88177}$ ℔ zahlbar.

Man hat also im zweiten Falle für $0{,}_{63177}$ ℔ mehr als im ersten zu bezahlen.

Digitized by Google

Rechnet man die Tara vom Nettogewicht, so muß man auf 100 rechnen, wenn das Bruttogewicht gegeben ist.

Z. B. Das Bruttogewicht einer Waare beträgt 2090 ℔, man rechnet die Tara 10 pCt. vom Nettogewicht. Wie groß ist die Tara und das Nettogewicht?

Hat das Nettogewicht das 100fache eines Gewichts, so hat die Tara das 10fache desselben Gewichts. Nun ist das Bruttogewicht gleich dem Nettogewichte nebst der Tara; daher ist das 110fache = 2090 ℔, also das Einfache = $\frac{2090}{110}$ = 19 ℔, folglich ist die Tara = 190 und das Nettogewicht = 1900 ℔.

Wird die Tara nach Procenten des Bruttogewichts bestimmt, so muß man, das Nettogewicht zu finden, in 100 rechnen. Z. B. Nelkenbr. Genua: Alaun, Kupfer, Häute, Eisen, Blei, Reis und Zinn in Stangen verkauft man per Cantaro zu 100 Rotoli, oder 150 ℔ Peso sottile, mit der wirklichen Tara. Zimmt, Chinarinde, Cochenille, Cacao, Kaffee, Nelken, Droguen, Gummi, Indigo, Liquiritiensaft, Muskatnüsse, Taback und Thee (pr. Pfd.) geben 6 Pfund Gutgewicht (von 106) außer der wirklichen Tara. Baumwolle, Stockfische, Cabeljau werden pr. Cantaro sottile mit 4 pCt. Tara verhandelt. Auf Zucker bewilligt man Tara: von Brasilianischem in Kisten 20 pCt., St. Domingo in Oxhoften 13 pCt., Martinique 11 pCt., Havannah 14 pCt., Brittisch. Westind. Moscovaden 14 pCt., sämmtlich mit 6 pCt. Gutgewicht. Auf Brotzucker vergütet man für Papier und Bindfaden 2 pCt.

Ferner bemerkt Nelkenbr.: 1 Peso grosso = 5 Cantari, 1 Cantaro = 100 Rotoli, das Peso sottile ist 10 pCt. leichter als das Peso grosso; 100 ℔ Peso grosso = 34,889 Kilogramm; 100 ℔ Peso sottile = 31,717 Kilogramm. 1 ℔ Peso sottile = 316,93 Grammen nach Kelly. 1 Preuß. Pfund = 467,71 Grammen.

a) 360 Cantari Reis Bruttogewicht mit 5 pCt. Tara vom Bruttogew. gerechnet, haben welches Nettogewicht nach Preuß. Gewichte und wie viele Pfunde sind zahlbar, wenn 6 pCt. Gutgewicht auf 100 gerechnet werden?

Zuerst vergleiche man die Genuesischen Pfunde unter einander. Da das ℔ Peso sottile um 10 pCt. leichter als das ℔ Peso grosso sein soll, so müssen nach dem Vorhergehenden 110 ℔ Peso sottile = 100 ℔ Peso grosso sein, und weil 100 ℔ Peso grosso = 34,889 Kilogr., so sind 110 ℔ Peso sottile auch = 34,889 Kilogr., also 1 ℔ P. sottile = $\frac{34,889}{110}$, und 100 ℔ P. sottile = $\frac{100 \cdot 34,889}{110}$ = 31,7172 Kilogr., also mit der Angabe Nelkenbr. übereinstimmend.

Ferner, da 1 ℔ P. sottile = 316,93 Grammen, so sind 110 ℔ P. sottile = 110 . 316,93 = 34862,2 Grammen = 100 ℔ P. grosso, also 100 ℔ P. grosso = 34,8623 Kilogr. nach Kelly, und die Angabe nach

Digitized by Google

Kelly soll auch zur Verwandlung der Genuesischen Pfunde in Preußische dienen.

Die Aufgabe kann, wie aus dem Vorhergehenden bekannt ist, auf drei Arten aufgelöset werden, nämlich durch Schlüsse, zusammengesetzte Proportionen und den Kettensatz, und diese drei Arten müssen auch fortwährend geübt werden. Ich werde sie nach der Reihe zur Lösung verschiedener Aufgaben anwenden.

Da Tara 5 pCt. vom Brutto ist, so muß, wenn Brutto das 100fache eines Gewichts hat, Tara das 5fache desselben Gewichts haben. Da nun Netto = Brutto weniger Tara, so ist Netto = dem 100fachen weniger dem 5fachen = dem 95fachen, also Netto = $\frac{95}{100}$ = $\frac{19}{20}$ Brutto = $\frac{19}{20}$. 360 Cantari = 342 Cantari. Da nun 5 Cantari = 1 Peso grosso, so sind 342 Cantari = $\frac{342}{5}$ Peso grosso, und weil 100 Pfd. Peso grosso = 3486,$_{23}$ Grammen, 1 Peso grosso = 750 Libbre (Pfund), so sind $\frac{342}{5}$ Peso grosso = $\frac{342}{5}$. $\frac{750}{100}$. 3486,$_{23}$ Grammen. Nun ist 1 Preuß. Pfd. = 467,$_{71}$ Grammen; daher sind die 342 Cantari Netto = $\frac{342}{5}$. $\frac{750}{100}$ × $\frac{3486,_{23}}{467,_{71}}$ Preuß. Pfd. = $\frac{171 . 3 . 3486,_{23}}{467,_{71}}$ = 3823,$_{814}$ Preuß. Pfd.

Jetzt ist das Gutgewicht in Rechnung zu bringen, und da dieses 6 pCt. auf 100 beträgt, so giebt man immer 106 und fordert für 100 Bezahlung; daher ist für $\frac{100}{106}$ der ganzen Quantität zu zahlen = $\frac{100}{106}$. 3823,$_{814}$ = 3607,$_{3717}$ Pfd. zahlbar.

b) Ein Preuße kauft 150 Libbre Peso sottile Brutto mit 4 pCt. Tara und 6 pCt. auf 100 Gutgewicht, für wie viele Pfunde hat er zu zahlen, und wie viele Preuß. Pfunde beträgt das Nettogewicht?

100 Pfd. Brutto	: 96 Pfd. Netto	= 150 Pfd. Brutto	: A Pfd. Netto
106 »	: 100 » Gutgw.	= A	: B » Ggw.
53	: 48	= 150 Pfd.	: B Pfd. Gutgew.

= $\frac{48 . 150}{53}$ = 135,$_{85}$ Libbre Peso sottile zahlbar.

100 Pfd. Brutto	: 96 Pfd. Netto	= 150 Pfd. Brutto	: A Pfd. Netto
1 » P. sottile	: 1 Gramme	= 316,$_{93}$	: 1
1 Gramme	: 1 Preuß. Pfd.	= 1	: 467,$_{71}$
1	: 48	= 3 . 316,$_{93}$	: 467,$_{71}$ A;

daher A = $\frac{48 . 3 . 316,_{93}}{467,_{71}}$ = 97,$_{577}$ Preuß. Pfunde Netto.

c) Ein Berliner kauft 840 Cantari sottile Brutto mit 4 pCt. Tara und 6 pCt. von Netto Gutgewicht; wie viel ist zahlbar und wie viele Preußische Pfund Netto? 1 Cantaro = 150 Libbre.

Digitized by Google

	= 840 Cantari Brutto			= 840 Cantari sottile Brutto	
100 =	96 »	Netto	100 =	96 » »	Netto
106 =	100 »	Gutgewicht	1 =	150 Libbre »	
53 |	40320 |	760,755 Cantari zahlbar.	1 =	316,93 Grammen	
			467,71 =	1 Pfd. Preuß.	
			467,71 |	38335852,80 |	81965,0057 Pr. Pfde.

Anmerk. Dieses Kapitel enthält das Hauptsächlichste von den Gewichten, weiter darf ich es nicht ausdehnen, wenn dieses Buch nicht zu voluminös werden soll; und nach den gegebenen Beispielen wird auch jeder Lehrer leicht Aufgaben ähnlicher Art geben können, besonders auch deswegen, weil ich in manchen Aufgaben einen reichlichen Stoff absichtlich zu diesem Zwecke zusammengetragen habe; ich eile nun zu der dritten Gattung ungleichartiger Größen, nämlich zu den Münzen.

Drittes Kapitel.

Der allgemeine Geldwerth der Dinge oder die Münzen.

A. Allgemeine Bemerkungen.

Moneta heißt die Münze, das Geld, auch die Münzstätte, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß unser Wort Münze von moneta herrühre; diese Vermuthung bleibe dahin gestellt; doch wird Jeder wissen, was man unter Münze versteht, und ich will daher sogleich das Wesentlichste von denselben hervorheben.

Der Werth der Münzen hängt theils von ihrer Größe, theils von ihrem Feingehalte und theils von ihrem Stoffe ab.

Die Größe der Münzen kann entweder durch ihr Volumen oder durch ihr Gewicht bestimmt werden. Zur Bestimmung des Volumens eines Körpers gehören Messungen seiner Dimensionen, und da diese nicht mit der Schärfe ausgeführt werden können, welche man vermittelst der Gewichte zu erreichen vermag, so bestimmt man die Größe der Münzen nach ihrem Gewichte. Um jedoch nicht scheinbar die Messungen der Dimensionen der Münzen zu weit zurückzusetzen, so will ich vorstehende Behauptung etwas beleuchten, und dieses auch aus dem Grunde, daß diese Untersuchung Resultate herbeiführen wird, die nicht allein jedem Lehrer nützlich, sondern auch angenehm zu wissen sein werden.

Zuerst bemerke ich, daß die gesetzliche Bestimmung des Durchmessers der Vereinsmünze (des $\frac{1}{4}$ Markstückes oder Doppelthalers) denselben = 41 Millimeter, den des Einthalerstückes = 34 Millimeter und den des $\frac{1}{6}$ Thalerstückes = 23 Millimeter festsetzt. Nun sind 1000 Millimeter = 1 Meter, und 1 Meter = 443,296 Pariser Linien, 139,13 Pariser Linien = 1 Prß.

Digitized by Google

Fuße, hieraus findet man durch einfache Schlüsse der Rechnung 1 Millimeter $= 0{,}45881\ 27928$ Preuß. Linien, deren $144 = 1$ Preuß. Fuß sind.

Ferner ergiebt sich durch Rechnung der Durchmesser des 2 Thalerstücks $= 18{,}8113$ Preuß. Linien $= 1$ Zoll $6{,}8113$ Preuß. Linien, der Durchmesser des Einthalerstücks $= 15{,}5996$ Linien $= 1$ Zoll $3{,}5996$ Linien Preuß. und der Durchmesser des $\frac{1}{6}$ Thalerstücks $= 10{,}55269$ Preuß. Linien. Da diese Münzen die Gestalt eines Cylinders haben, und wir den Durchmesser der Grundflächen kennen, so brauchen wir noch, den kubischen Inhalt derselben zu finden, ihre Höhe; diese der Münzen, oder ihre Dicke, kann aber mit keiner Genauigkeit gemessen werden, indem dieses ihr Gepräge, welches Erhöhungen und Vertiefungen zum Vorschein bringt, nicht gestattet, und schon aus diesem Grunde ist die Messung der Dimensionen der Münzen, also die Bestimmung ihres Volumens, nicht zulässig. Es ist aber noch ein anderer Grund vorhanden, welcher die Verwerfung des Volumens zur Bestimmung der Größe der Münzen anräth, und dieser ist das specifische Gewicht.

Das Genauere über das specifische Gewicht lese man im folgenden Abschnitte im ersten Kapitel nach, wo man eine deutliche Auseinandersetzung desselben finden wird, hier kann ich nur eine Anwendung desselben machen.

Die genannten Münzen bestehen aus einer Mischung des reinen oder feinen Silbers mit Kupfer, welches Münzsilber heißt. Das Münzsilber der $\frac{1}{7}$ Markstücke hat $\frac{9}{10}$ feines Silber und $\frac{1}{10}$ Kupfer, das der Einthalerstücke $\frac{3}{4}$ feines Silber und $\frac{1}{4}$ Kupfer und das der $\frac{1}{6}$ Thalerstücke $\frac{25}{48}$ feines Silber und $\frac{23}{48}$ Kupfer. Um diese Untersuchung nicht zu weit auszudehnen, so will ich nur die Vereinsmünze genauer betrachten. Da 7 Vereinsmünzen $=$ 1 Mark $= 16$ Loth, und diese $\frac{9}{10}$ feines Silber hat, so ist 1 Vereinsmünze $= \frac{16}{7} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{35}$ Loth f. S. $+ \frac{8}{35}$ Loth Kupfer.

Muncke giebt nun das specifische Gewicht des gehämmerten Silbers $= 10{,}622$, das des gehämmerten Kupfers $= 9{,}000$ an; ich wähle dieses specifische Gewicht, weil das Prägen der Münzen dem Hämmern gleich zu halten ist. Ferner ist ein Kubikfuß destillirten Wassers $= 66$ Pfd., also ein Kubikzoll $= \frac{66}{1728} = \frac{11}{288}$ Loth; daher 1 Kubikzoll Silber $= 10{,}622 \cdot \frac{11}{9}$ $= 12{,}98244\ldots$ Loth und 1 Kubikzoll Kupfer $= 9 \cdot \frac{11}{9} = 11$ Loth.

Da nun die Vereinsmünze $\frac{72}{35}$ Loth Silber hat, so ist der kubische Inhalt desselben $\frac{72}{35} : \frac{10{,}622 \cdot 11}{9} = 0{,}1584558$ Kubikzoll. Der kubische Inhalt des Kupfers der Vereinsmünze $= \frac{8}{35} : 11 = 0{,}0207792$ Kubikzoll; daher ist der kubische Inhalt der Vereinsmünze gleich der Summe dieser Volumen $= 0{,}179235$ Kubikzoll. Dividirt man diesen Inhalt durch die Grundfläche der Münze, so muß man ihre Dicke erhalten. Da nun die gedachte Grundfläche ein Kreis, dessen Durchmesser, wie oben erwähnt, $= 18{,}8113$ Preußische Linien ist; so ist der Inhalt dieses Kreises $=$

Digitized by Google

$9{,}_{40565} \cdot 9{,}_{40565} \cdot 3{,}_{14159} = 277{,}_{92469}$ Quadratlinien. Folglich ist die Dicke der Vereinsmünze $= \frac{0{,}_{179235} \cdot 1728 \text{ Kubiklinien}}{277{,}_{92469} \text{ Quadratlinien}} = 1{,}_{1144}$ Linien.

Würde man nun beim Messen der Dimensionen dieser Münze nur um ein halbes Zehntel einer Linie $= 0{,}_{05}$ derselben fehlen, was leicht möglich ist, so würde ihr Durchmesser $= 18{,}_{7613}$ und ihre Dicke $1{,}_{0644}$ Linien sein; daraus ergiebt sich ihr Inhalt $= 9{,}_{38065} \cdot 9{,}_{38065} \cdot 3{,}_{14159} \times 1{,}_{0644} = 294{,}_{25255}$ Kubiklinien, also um $15{,}_{46553}$ Kubiklinien kleiner als vorher; denn ihr voriger Kubikinhalt ist $= 309{,}_{71808}$ Kubiklinien.

Nun kann man leicht das Gewicht dieser Differenz finden.

Denn da der kubische Inhalt der Münze $= 309{,}_{71808}$ Kubiklinien $= \frac{16}{7}$ Loth $= \frac{16.288}{7}$ Grän, so ist das Gewicht einer Kubiklinie $= \frac{16.288}{7.309{,}_{71808}}$ Grän, und daher das Gewicht der Differenz $= \frac{15{,}_{46553} \cdot 16 \cdot 288}{7 \cdot 309{,}_{71808}} = 32{,}_{96}$ Grän.

Da man nun eine Münze bis auf ein Grän mit Leichtigkeit abwägen kann, so ist ein Fehler von nahe 33 Grän selbst beim rohesten Wägen nicht zu begehen, und es findet daher die Bestimmung der Größe einer Münze nach ihrem Gewichte den entschiedensten Vorzug vor der durch das Volumen derselben.

Die Bestimmung der Größe einer Münze durch ihr Gewicht wird auf zweifache Weise ausgeführt, entweder dadurch, daß man die Zahl der Münzstücke festsetzt, welche aus einem gegebenen Gewichte geprägt werden sollen, oder dadurch, daß man das Gewicht jeder einzelnen Münze einer Art bestimmt.

Die letzte Bestimmungsart, nämlich die Festsetzung des Gewichts jeder einzelnen Münze einer Art, findet nur in Frankreich und in der Schweiz und zwar in denjenigen Kantonen statt, welche sich 1825 zu einem Münz-Konkordate vereinigt haben und demselben später beigetreten sind. Die zum Münz-Konkordate seit 1825 gehörigen Kantone sind: Aargau, Basel, Bern, Freiburg, Lucern, Solothurn und Waadt.

Die Bestimmung der Zahl der Münzen einer Art, welche aus einem gegebenen Gewichte geprägt werden sollen, findet in allen übrigen Europäischen Staaten ihre Anwendung; und von den Außer-Europäischen Staaten ist, mit Ausnahme der Amerikanischen und derjenigen Afrikanischen und Asiatischen, welche mit Europäischen in naher Verbindung, wie im Verhältnisse des Mutter- zum Tochterlande, stehen, wenig Befriedigendes zu sagen, indem selbst die gerühmte Kultur der Chinesen in dieser Hinsicht weit im Rückstande ist.

Das Gewicht nun, welches in den Münzstätten zum Abwägen der Metalle, aus welchen Münzen geprägt werden sollen, zum Grunde gelegt wird, ist wieder entweder ein solches, das nur zu diesem Zwecke bestimmt ist, oder

Digitized by Google

ein solches, das auch zum Abwägen anderer Waaren dient. Jenes ist unter dem Namen: Mark, dieses unter dem: Pfund bekannt.

Alle Deutschen Staaten, ohne Ausnahme, wägen das Münzmetall nach Marken, und außer diesen noch Schweden, Norwegen, Dänemark, Spanien, Portugal und alle Italienischen Staaten, mit Ausnahme des Königreichs beider Sicilien, des Kirchenstaates und des Großherzogthums Toskana, und Polen. Die übrigen Europäischen Staaten, nämlich Großbritannien, das Königreich beider Sicilien, der Kirchenstaat, das Großherzogthum Toskana, das Kaiserthum Rußland gebrauchen zur Abwägung des Münzmetalls das Pfund. So wie aber die Pfunde in den verschiedenen Ländern verschieden sind, eben so sind es die Marken.

Griechenland und die Türkei habe ich vergessen zu erwähnen, aber der Griechische Staat ist erst im Werden begriffen, und in der Türkei herrscht in jeder Hinsicht, also auch in Ausprägung der Münzen, despotische Willkür, so daß der Türkische Piaster von 16,28 Sgr. bis auf 3¾ Sgr. herabgesunken ist, wie Nelkenbrecher angiebt, und diese Willkür und Despotie wird so lange prädominiren, bis endlich das Türkische Volk aus seinem Geistesschlafe erwacht; denn nicht von oben nach unten herab, sondern von unten nach oben hinauf steigt die wahre Volksbildung.

In Hinsicht gleicher Gewichte ist von den Zollvereins-Staaten ein sehr erfreulicher Anfang gemacht worden; denn nach der allgemeinen Münz-Convention der zum Zoll- und Handelsvereine verbundenen Staaten heißt es im ersten Artikel: »Als Grundlage des gesammten Münzwesens soll in allen Münzstätten einerlei Münzmark angewendet werden, deren Gewicht mit dem Gewichte der in dem Königreiche Preußen und in den Süddeutschen Staaten des Zoll- und Handelsvereins bereits bestehenden Mark übereinstimmend, auf 233,855 Gramme festgesetzt wird.« Die Anwendung dieser Münzmark hat mit dem 1. Januar 1841 ihren Anfang erhalten.

Nicht allein aber findet man gegenwärtig in den Zollvereins-Staaten einerlei Münzmark, sondern auch in allen diesen Staaten einen gleichen Zoll-Centner, der nämlich = 50 Kilogrammen, also = 106,904 Preußischen Pfunden ist.

Der Stoff der Münzen ist Kupfer, Silber, Gold und Platina. Nur Kupfer wird unvermischt mit andern Metallen in Europa zum Prägen der Münzen verbraucht; die übrigen genannten Metalle, welche auch edle Metalle heißen, werden mit schlechtern Metallen vermischt, welches durch Zusammenschmelzen geschieht, und das Beschicken oder Legiren heißt.

Reines edles, nicht mit andern Metallen vermischtes, Metall heißt feines Metall (feines Silber oder Gold oder feine Platina), dagegen heißt solches edle Metall, das mit andern, und zwar schlechtern Metallen vermischt ist, rauhes Metall; eine Mark vom feinen Metall heißt eine feine Mark oder

Digitized by Google

eine Mark fein, und eine Mark vom rauhen Metall heißt eine rauhe Mark oder eine Mark rauh, oder eine Brutto-Mark oder eine Mark brutto.

Das mit andern Metallen vermischte Metall wird auch beschicktes oder legirtes Metall genannt.

Das Silber zum Münzen wird nur mit Kupfer legirt, Gold wird entweder mit Kupfer (rothe Legirung) oder mit Silber (weiße Legirung) oder mit Kupfer und Silber zusammen legirt.

Nelkenbrecher enthält folgende Vergleichung der Metalle in Hinsicht ihres Werthes: 1 Pfund Gold = 15 Pfunden Silber = 400 Pfunden Quecksilber = 1150 Pfunden Messing = 1350 Pfunden Kupfer = 1720 Pfunden Zinn = 8325 Pfunden Blei = 11 000 Pfunden Eisen.

Hienach verhält sich also der Werth des Goldes zu dem des Silbers = 1 : 15, der Werth des Goldes zu dem des Kupfers = 1 : 1350; der Werth des Silbers zu dem des Kupfers = 1 : 90.

Hieraus geht hervor, daß von zwei Goldmünzen, die gleiches Gewicht haben, diejenige einen höhern Werth hat, welche mehr Gold als die andere enthält; eben so daß von zwei Silbermünzen, die gleiches Gewicht haben, diejenige einen größern Werth hat, welche mehr Silber als die andere in sich begreift. Aus diesem Grunde wird der Werth des legirten edlen Metalls nach dem Verhältnisse bestimmt, welches das feine edle Metall, das sich in einer gegebenen Masse des legirten Metalls befindet, zu dieser gegebenen Masse legirten Metalls hat. Dieses oben erwähnte Verhältniß wird auf zweifache Weise ausgedrückt, und zwar entweder durch Angabe des Gewichts vom edlen Metall, das in einem gegebenen Gewichte des legirten Metalls enthalten ist, oder durch Angabe eines Bruches, welcher das Verhältniß anzeigt, das das Gewicht des feinen edlen Metalls zum Gewichte des legirten Metalls einer bestimmten Quantität hat. Diese allgemeinen Definitionen sollen nun durch einige Beispiele erläutert werden.

Schmilzt man 15 Loth feines Silber und 1 Loth Kupfer zusammen, so erhält man 16 Loth oder eine Mark, und diese Mark heißt 15löthiges Silber oder eine Mark 15 Loth fein.

Durch das Zusammenschmelzen von 14 Loth feinen Silbers und 2 Loth Kupfers, von 13 Loth feinen Silbers und 3 Loth Kupfers, von 12 Loth feinen Silbers und 4 Loth Kupfers, ꝛc. erhält man in jedem Falle 16 Loth oder eine Mark, und diese heißt 14löthiges, 13löthiges, 12löthiges ꝛc. Silber oder eine Mark 14 Loth fein, 13 Loth fein, 12 Loth fein ꝛc.

13½löthiges, 12¼löthiges, 10½löthiges ꝛc. Silber enthält wie viele Loth feines Silber und Kupfer?

Da das Silber nach der Zahl der Lothe feinen Silbers benannt wird, die sich in einer Mark befinden, so enthält 13½löthiges Silber 13½ Loth feines Silber und 16 — 13½ = 2½ Loth Kupfer, 12¼löthiges Silber 12¼ Loth

Digitized by Google

f. S. und $16 - 12\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$ Loth Kupfer, $10\frac{1}{4}$löthiges Silber $10\frac{1}{4}$ Loth f. S. und $16 - 10\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4}$ Loth Kupfer, ꝛc.

Wenn man ein Karat Kupfer und 23 Karat feines Gold zusammenschmilzt, so erhält man 24 Karat oder eine Mark Gold, und dieses Gold heißt dann 23karatiges Gold oder eine Mark Gold 23 Karat fein.

Durch das Zusammenschmelzen von 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. Karat Kupfer respektive von 22, 21, 20, 19, 18 ꝛc. Karat feinen Goldes erhält man 22karatiges, 21karatiges, 20karatiges 19karatiges, 18karatiges ꝛc. Gold oder eine Mark Gold 22 Karat fein, 21 Karat fein, 20 Karat fein, 19 Karat fein, 18 Karat fein ꝛc.

Wie viele Karat feinen Goldes und Kupfers enthält eine Mark Gold, welche 23 Karat 7 Grän fein, 23 Karat 6 Grän fein, 22karatig, 21 Karat 8 Grän fein, 20karatig, 19karatig, 18 Karat 6 Grän fein ist ꝛc.?

Da die Mark Gold nach dem Gewichte des feinen Goldes benannt wird, das sich in einer Mark befindet, so hat eine Mark, welche 23 Karat 7 Grän fein ist, 23 Karat 7 Grän feines Gold und $24 - 23\frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ Karat $= 5$ Grän Kupfer; welche 23 Kar. 6 Gr. fein ist, 23 Kar. 6 Grän f. G. und $24 - 23\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ Kar. $= 6$ Gr. Kupfer; welche 22karatig ist, 22 Kar. f. G. und $24 - 22 = 2$ Karat Kupfer; welche 21 Kar. 8 Grän fein ist, 21 Kar. 8 Gr. f. G. und $24 - 21\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$ Kar. $= 2$ Kar. 4 Gr. Kupfer; ꝛc. ꝛc.

Wenn eine Mark 12 Loth feines Silber und also 4 Loth Kupfer enthält, so ist das Gewicht des feinen Silbers von dem Gewichte der ganzen Mark $= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, und dann sagt man, der Feingehalt oder auch kurz der Gehalt des Silbers ist $\frac{3}{4}$ oder das Silber ist $\frac{3}{4}$ fein.

Welches ist dem zufolge der Feingehalt des 14löthigen, $13\frac{1}{2}$löthigen, $10\frac{1}{2}$löthigen ꝛc. Silbers? Der Feingehalt des 14löthigen Silbers $= \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$, der des $13\frac{1}{2}$löthigen $= \frac{5}{6}$, des $10\frac{1}{2}$löthigen $= \frac{2}{3}$, ꝛc.

Wie man den Feingehalt des Silbers bestimmt, eben so bestimmt man den des Goldes; daher ist der Feingehalt des 22karatigen Goldes $= \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$, der des $21\frac{3}{4}$karatigen $= \frac{87}{96}$, der des $21\frac{1}{3}$karatigen $= \frac{8}{9}$, der des 20karatigen $= \frac{5}{6}$, ꝛc.

Ist also der Feingehalt eines Silbers in Loth oder in Loth und Grän gegeben, so kann man denselben leicht in einen Bruch verwandeln. Zur Uebung noch einige Beispiele.

Preuß. Einthalerstücke werden aus 12löthigem Silber, $\frac{1}{2}$ Thalerstücke aus $10\frac{1}{2}$löthigem, $\frac{1}{4}$ Thalerstücke aus 9löthigem, $\frac{1}{8}$ Thalerstücke aus $8\frac{1}{2}$löthigem, $\frac{1}{12}$ Thalerstücke aus 6löthigem, Silbergroschen aus $3\frac{1}{3}$löthigem Silber geprägt. Welches ist der Feingehalt dieses Silbers durch einen Bruch ausgedrückt? Der Feingehalt ist $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{85}{96}$, $\frac{2}{3}$.

Dasjenige Münzsilber, dessen Feingehalt kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, heißt Billon. Daher ist das Silber der $\frac{1}{12}$ Thalerstücke und der Sgr. Billon.

Digitized by Google

Auf ähnliche Weise findet man den Feingehalt des Goldes durch einen Bruch bestimmt, wenn derselbe in Karat oder in Karat und Grän gegeben ist. Z. B.

Preuß. Friedrichd'or werden aus $21\frac{1}{2}$karatigem Golde, Holl. Dukaten aus einer Mark Gold 23 Kar. 7 Gr. fein, Oester. Dukaten aus $23\frac{1}{2}$karatigem Golde, Engl. Guineen, Sovereigns, Russ. Imperial aus 22karatigem Golde geprägt, so ist der Feingehalt dieses Goldes $\frac{6}{7\,2}$, $\frac{2\,8\,3}{2\,8\,8}$, $\frac{7\,1}{7\,2}$, $\frac{1\,1}{1\,2}$.

Umgekehrt kann man den durch einen Bruch ausgedrückten Feingehalt leicht für Silber in Loth und Grän, den für Gold in Karat und Grän verwandeln. Z. B.

Der Feingehalt der Deutschen Conventions-Speciesthaler ist $\frac{5}{6}$, der Baierischen Kronenthaler $\frac{1\,2\,5}{1\,4\,4}$, der Dänischen Reichsthaler-Species $\frac{7}{8}$, der Engl. Kronen und Schillinge $\frac{3\,7}{4\,0}$, der Spanischen Piaster früher $\frac{1\,1}{1\,2}$, jetzt $\frac{6\,5}{7\,2}$, der Russischen Rubel früher $\frac{3\,1}{3\,6}$, jetzt $\frac{1\,2\,5}{1\,4\,4}$, der Franz. Franken $\frac{9}{1\,0}$, ꝛc. Welches ist der Feingehalt dieser Silbermünzen in Loth und Grän ausgedrückt, da 1 Loth = 18 Grän ist?

Der Feingehalt des Silbers der Conv.-Speciesthaler $= \frac{5}{6} . 16 = 13\frac{1}{3}$ Loth $= 13$ Loth 6 Grän, der Baier. Kronenthaler $= \frac{1\,2\,5}{1\,4\,4} . 16 = \frac{1\,2\,5}{9}$ $= 13$ Loth 16 Grän, der Dän. Thlr. Spec. $= \frac{7}{8} . 16 = 14$ Loth, der Engl. Kronen $= \frac{3\,7}{4\,0} . 16 = 14$ Loth $14\frac{2}{5}$ Grän, der Span. Piaster früher $= \frac{1\,1}{1\,2} . 16 = 14$ Loth 12 Grän, jetzt $= \frac{6\,5}{7\,2} . 16 = 14$ Loth 8 Grän, der Russ. Rubel früher $= \frac{3\,1}{3\,6} . 16 = 13$ Loth 14 Grän, jetzt $= 13$ Loth 16 Gr., der Franz. Franken $= \frac{9}{1\,0} . 16 = 14$ Loth $7\frac{2}{5}$ Grän.

Der Feingehalt der alten Preuß. Friedrichd'or ist $\frac{2\,9}{3\,2}$, der Russ. Andreas-Dukaten von Peter I. $\frac{2\,3}{3\,2}$, der Braunschw. Carld'or $\frac{2\,3\,9}{2\,8\,8}$, der Dän. Courant-Dukaten $\frac{7}{8}$, der Engl. Guineen nach Berliner Probe $\frac{1\,1\,7}{1\,2\,8}$, der Span. alten Quadruples nach Franz. Probe $\frac{3\,4\,9}{3\,8\,4}$, der Franz. 20 Frankssstücke $\frac{9}{1\,0}$, ꝛc.

Welches ist der Feingehalt dieser Münzen in Karat und Grän ausgedrückt, da 1 Karat = 12 Grän?

Der Feingehalt der Preuß. alten Frd'or $= \frac{2\,9}{3\,2} . 24 = 21$ Kar. 9 Gr., der Russ. Andr.-Duk. $= 18$ Kar. 9 Gr., der Braunschweig. Carlsd'or $= 21$ Kar. 7 Gr., der Dän. Cour.-Duk. $= 21$ Kar., der Engl. Guineen nach Berl. Probe $= 21$ Kar. $11\frac{1}{4}$ Gr., der Span. alten Quadruples nach Frz. Probe $= 21$ Kar. $9\frac{3}{4}$ Gr., der Franz. 20 Frksstücke $= 21$ Kar. $7\frac{1}{5}$ Gr.

Das feine, edle Metall, welches eine Münze enthält, heißt ihr Korn, und ihre ganze legirte Masse das Schrot; daher heißt das Gewicht des feinen, edlen Metalls einer Münze ihr Korngewicht und das ganze Gewicht der Münze ihr Schrotgewicht.

Welches ist das Schrot- und Korngewicht der Preuß. Thaler, wenn $10\frac{1}{2}$ Thaler $= 1$ Mark 12löthigen Silbers sind, in Grammen angegeben, da 1 Preuß. Mark $= 233{,}855$ Grammen ist?

Digitized by Google

Da $10\frac{1}{2}$ Thaler $= 233{,}855$ Grammen, so ist das Schrotgewicht eines Thalers $= \frac{233{,}855}{10\frac{1}{2}} = \frac{467{,}71}{21} = 22{,}2719$ Grammen.

Der Feingehalt der Preuß. Thaler ist $\frac{3}{4}$, daher ist das Korngewicht der Preuß. Thaler $= \frac{3}{4}$ mal das Schrotgewicht $= 16{,}7039$ Grammen.

Welches ist das Schrot- und Korngewicht der Preuß. $\frac{1}{3}$ Thalerstücke, wenn 28 Stücke $= 1$ Mark $10\frac{2}{3}$löthigen Silbers, der $\frac{1}{5}$ Thalerstücke, wenn $39\frac{3}{8} = 1$ Mark 9löthigen Silbers, der $\frac{1}{6}$ Thalerstücke, wenn $43\frac{3}{4}$ Stücke $= 1$ Mark $8\frac{1}{2}$löthigen Silbers, der $\frac{1}{12}$ Thalerstücke, wenn 63 Stücke $= 1$ Mark 6löthigen Silbers, der Sgr., wenn $106\frac{2}{3}$ derselben $= 1$ Mark $3\frac{1}{9}$löthigen Silbers sind, in Grammen ausgedrückt?

Das Schrotgewicht der $\frac{1}{3}$ Thaler $= 8{,}352$, der $\frac{1}{5}$ Thaler $= 5{,}939$, der $\frac{1}{6}$ Thlr. $= 5{,}345$, der $\frac{1}{12}$ Thlr. $= 3{,}712$, der Sgr. $= 2{,}1924$ Grammen, und das Korngewicht dieser Münzen wird erhalten, wenn man ihr Schrotgewicht mit dem Bruche, welcher ihren Feingehalt ausdrückt, multiplicirt, daher ist es $5{,}568$; $3{,}34$; $2{,}763$; $1{,}392$; $0{,}4872$ Grammen.

Wie groß ist das Schrot- und Korngewicht der Preuß. Friedrichd'or, wenn 35 Stücke $= 1$ Mark $21\frac{7}{8}$karatigen Goldes sind, in Grammen ausgedrückt?

Das Schrotgewicht der Frd'or $= 6{,}68157$, und ihr Korngewicht $= 6{,}031973$ Grammen.

Wie groß ist das Schrot- und Korngewicht folgender Münzen in Grammen ausgedrückt, wenn $8\frac{1}{3}$ Deutsche Speciesthaler $= 1$ Mark $13\frac{1}{3}$löthigen, wenn $8\frac{3}{32}$ Dänische Reichsthaler Spec. $= 1$ Mark 14löthigen, wenn $7{,}93$ alte Franz. Laubthaler $= 1$ Mark $14\frac{2}{3}$löthigen, wenn $7{,}8$ Engl. Kronen nach gewöhnlicher Annahme $= 1$ Mark $14\frac{2}{3}$löthigen, wenn $25\frac{1}{2}$ Hamb. Markstücke $= 1$ Mark 12löthigen, wenn 9 Lombardische Scudi $= 1$ Mark $\frac{9}{10}$ fein, wenn $8\frac{2}{3}$ Mexikanische Pesos (Piaster, auch Dollar genannt) $= 1$ Mark $14\frac{1}{2}$löthigen, wenn $8{,}673$ Nordamerikanische Dollor (Piaster) $= 1$ Mark 14 Loth 5 Grän fein, wenn 35 Oester. 20 Kreuzerstücke $= 1$ Mark $9\frac{1}{2}$löthigen Silbers sind?

Welches Schrot- und Korngewicht haben folgende Goldmünzen in Grammen ausgedrückt, wenn 67 Deutsche Dukaten $= 1$ Mark $23\frac{3}{4}$karatigen, wenn 24 Deutsche Karolinen $= 1$ Mark $18\frac{1}{4}$karatigen, wenn 35 alte Französische Louisd'or $= 1$ Mark $21\frac{3}{4}$karatigen, wenn $18{,}124$ Franz. 40 Frankstücke $= 1$ Mark $\frac{9}{10}$ fein, wenn $28\frac{1}{2}$ Engl. Guineen $= 1$ Mark 22karatigen, wenn $68{,}223$ Römische Zecchinen $= 1$ Mark $23\frac{1}{3}$karatigen, wenn $21\frac{1}{4}$ Oestr. Souveraind'or $= 1$ Mark 22karatigen Goldes sind?

Anmerk. Eine Mark Gold der Karolinen enthält 18 Karat 6 Grän feines Gold, 3 Karat 8 Grän feines Silber und das Uebrige, nämlich 1 Karat 10 Grän Kupfer.

Mir sind nur zwei Arten Münzen bekannt, die aus einer Mischung des Goldes, Silbers und Kupfers geprägt werden, dieses sind die Deutschen Karolinen

Digitized by Google

und zwar in Baiern, Hohenzollern-Hechingen und Würtemberg, und die Baierischen Max'dor. Eine Mark der Max'dor enthält 18 Karat 6 Grän feines Gold, 4 Karat feines Silber und 1 Karat 6 Grän Kupfer. Außer den genannten Staaten findet man nur noch im Königreiche Sardinien geprägte Goldmünzen, welche auch Karolinen heißen, sie führen aber auch den Namen Doppien und gehören ihrem Gewichte und ihrer Feinheit nach zu der großen und ausgebreiteten Sorte von Goldmünzen, welche Pistolen heißen, und dürfen also nicht mit deutschen Karolinen verwechselt werden.

B. Rechnungen mit Münzen.

a) Gegenseitige Verwandlung der unter- und übergeordneten Münzen.

1) Resolution.

1. Durch Rechnung erhält Jemand den Bruch $\frac{854}{877}$ Thaler; da ein solcher Werth in Thalern nicht ausgezahlt werden kann, so verwandelt er den Thalerbruch in Sgr. und Pfenninge (Sgr.); wie viel wird derselbe betragen?

$\frac{854}{877}$ ℳ sind 854 ℳ durch 877 dividirt; aber 854 ℳ = 854 . 30 = 25 620 ßg.; daher sind $\frac{854}{877}$ ℳ = $\frac{25620}{877}$ ßg. = $29\frac{187}{877}$ ßg. Nun sind $\frac{187}{877}$ ßg. = $\frac{187 \cdot 12}{877}$ = 2,558 Sgr.; daher sind $\frac{854}{877}$ ℳ = 29 ßg. 2,558 Sgr. = 29 ßg. 3 Sgr.

Anmerk. Für jeden Bruch der kleinsten Münzen, Maße und Gewichte, der größer als $\frac{1}{2}$ ist, nimmt man im bürgerlichen Verkehre ein Ganzes derselben Größe, jeden andern, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, berücksichtigt man nicht. Daher setzt man für 0,558 Sgr. einen ganzen Pfennig.

2. Früher rechnete man in Ost- und Westpreußen nach Thalern zu 90 Groschen à 18 Pf.; wie viele Groschen und Pfennige wird also der Bruch $\frac{313}{324}$ Thaler betragen?

$\frac{313}{324}$ ℳ = $\frac{313 \cdot 90}{324}$ = $\frac{313 \cdot 5}{18}$ = $86\frac{17}{18}$ ℊ., $\frac{17}{18}$ ℊ = $\frac{17 \cdot 18}{18}$ = 17 Sgr., also sind $\frac{313}{324}$ ℳ = 86 ℊ 17 Sgr.

Anmerk. Decem = zehn, deni = je zehn; denarius, was zehn in sich begreift, Subst. Denarius, eine römische Münze, die 10 As galt. Von Denarius haben die geringsten Münzen in den meisten Ländern Italiens, besonders in Oberitalien und in einigen Gegenden des Kirchenstaates, Denari ihre Benennung, denn man rechnete 1 Lira (Libra, Libbra oder Pfund, in Frankreich Livre genannt) zu 20 Soldi à 12 Denari, in Spanien 1 Peoso oder Libra zu 20 Suldos à 12 Dineros, ehemals in Frankreich nach Livres zu 20 Sols à 12 Deniers; daher bezeichnet Denaro, Dinero, Denier das, was wir Deutsche einen Pfennig nennen. Behält man von jenen fremden Ausdrücken den Anfangsbuchstaben d oder d, und hängt ihm einen Haken an, ₰, so hat man ein sehr einfaches Zeichen zur Bezeichnung der Pfenninge, und es wird jetzt auch allgemein in allen Ländern zu diesem Zwecke gebraucht.

3. In der Mark Brandenburg und in den meisten Sächsischen Ländern rechnete man früher nach Thalern zu 24 Groschen à 12 Pf.; in Süddeutschland und Oestreich rechnet man jetzt noch nach Gulden zu 60 Kreu-

Digitized by Google

zern (Xr.) à 4 Pf.; im Lombardisch-Venetianischen Königreiche nach Lire austriaci zu 100 Centesimi, in Frankreich nach Francs zu 100 Centimes, in den Niederlanden nach Gulden zu 100 Cents, in England nach Pfunden (Livres, Liv., L.) zu 20 Schillingen (ß.) à 12 Pence (d.) Sterling; Dänemark nach Reichsbankthalern zu 6 Mark (ℳ) à 16 Schillingen Dänisch; Schweden nach Reichsthalern Species zu 48 Schillingen à 12 Rundstücke (Oere oder Ö); in Rußland nach Rubel zu 100 Kopeken; Polen nach Gulden (Zlot) zu 30 Groschen à 10 Pf.; in der Schweiz nach Franken zu 10 Batzen à 10 Rappen; im Kirchenstaate nach Scudi Romani zu 100 Bajocchi; im Königreich Sicilien nach Ducati zu 10 Carlini à 10 Grani à 10 Cavalli; in Toskana nach Lire zu 20 Soldi à 12 Denari; in Frankfurt a. M. nach Thalern zu 90 Kreuzern à 4 Pf.; in Hamburg und Lübeck nach Mark zu 16 Schilling à 12 Pf. ꝛc.

$\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ jedes der genannten größten Stücke betragen wie viele der untergeordneten Münzen?

$\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ ℳ in Brand. ꝛc. = 23 ℊ $9\frac{5}{6}$ Ö. $\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ Francs = 99,2476 Centimes.
$\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ fl in Oestr. ꝛc. = 59 Xr. $2\frac{7}{36}$ Ö. $\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ Lsterl. = 19 ß $10\frac{7}{36}$ Ö Sterl.
$\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ Lire austr. = 99,248 Centesimi. $\frac{1}{1}\frac{7}{7}\frac{1}{2}\frac{5}{8}$ Rbthlr. = 5 ℳ $15\frac{5}{18}$ ßß Dänisch ꝛc.

2) Reduktion.

1. Folgende fremde Münzsorten haben nach der Verfügung vom 30. Septbr. 1821 im Preuß. Staate folgenden Tarif:

Braunschw.-Lüneburg., Hannöv., Dänische und Schwed. Speciesthaler = 1 Thlr. 15 Sgr., Gulden oder 24 Mariengroschenstücke dieser Länder = $22\frac{1}{2}$ Sgr., Braunschw.-Lüneburgsche $\frac{1}{3}$ Thlr. od. 12 Mgr.-Stück = 11 Sgr. 3 Pf.; Conventions- oder Speciesthlr. = 1 Thlr. 11 Sgr. 3 Pf.; $\frac{1}{4}$ Conventionsgulden oder 20 Kreuzerstücke = 6 Sgr. 9 Pf., 10 Kreuzerstücke = 3 Sgr. 4 Pf.; Conventions-Zweigroschenstücke = 2 Sgr. 6 Pf.; Brabanter Thaler = 1 Thlr. 15 Sgr. 2 Pf.; Hamburger 2 Markstücke = 23 Sgr. 9 Pf.; Hamburger 8 Schillingstücke = 5 Sgr. 10 Pf.; Holländ. 3 Guldenstücke = 1 Thlr. 20 Sgr.; Französ. 5 Frankenstücke = 1 Thlr. 9 Sgr. 6 Pf.; Französ. 2 Frankenstücke = 15 Sgr. 10 Pf. Jedes der fremden Geldstücke beträgt welchen Bruch von einem Preuß. Thaler?

1 Braunschw.-Lüneb. ꝛc. Speciesthaler = $1\frac{1}{2}$ ℳ, ein 24 Mariengr. Stück $\frac{3}{4}$ ℳ, ein 12 Mgrstück = $\frac{3}{4}$ ℳ; ein Conv.-Speciesthlr. = $1\frac{1}{8}$ ℳ, ein 20 Kreuzerstück = $\frac{9}{40}$ ℳ, ein 10 Kreuzerstück = $\frac{1}{8}$ ℳ; ein Conv. 2 Groschenstück = $\frac{1}{12}$ ℳ; ein Brab. Thlr. = $1\frac{91}{180}$ ℳ; 1 Hamburg. 2 Mrkstück = $\frac{19}{24}$ ℳ, 1 Hamb. 8 Schillingsstück = $\frac{7}{36}$ ℳ; 1 Französ. 5 Frkstück = $1\frac{19}{60}$ ℳ, 1 Franz. 2 Frkstück = $\frac{19}{36}$ ℳ.

2. Nach der Verfügung vom 30. Septbr. 1821 haben fremde Goldmünzen im Preuß. Staate folgenden Tarif:

Digitized by Google

Franz. 40 Frkenstücke = 9 Thlr. 16 Sgr. 3 Pf.; Russ. 10 Rubelst. = 9 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf., Russ. 5 Rubelst. = 4 Thlr. 26 Sgr. 3 Pf.; Souveraind'or = 8 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf., halbe Souveraind'or = 4 Thlr. 3 Sgr. 9 Pf.; Holländ. Ruyder = 6 Thlr. 25 Sgr. 7 Pf., halbe Ruyder = 3 Thlr. 12 Sgr. 9 Pf.; vollwichtige Dukaten = 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. in Frd'or à 5 Thlr. Welchen Bruch beträgt jedes genannte fremde Goldstück von einem Frd'or = 5 Thlr. zu 30 Sgr. à 12 Pf.?

Man suche zunächst den Bruch, den die Sgr. und Pf. von einem Thlr. ausmachen, nehme dazu die Zahl der Thlr. und dividire das Ganze durch 5. Demnach ist

16 sgr 3 ₰ = $16\frac{1}{4}$ sgr = $\frac{16\frac{1}{4}}{30}$ = $\frac{65}{120}$ = $\frac{13}{24}$ ₰; daher ein 40 Frkenstück = $9\frac{13}{24}$ ₰ = $\frac{9\frac{13}{24}}{5}$ = $1\frac{4\frac{13}{24}}{5}$ = $1\frac{109}{120}$ Frd'or. 1 Russ. 10 Rubelst. = $9\frac{3}{4}$ ₰ = $1\frac{4\frac{3}{4}}{5}$ = $1\frac{19}{20}$ Frd'or; 1 Russ. 5 Rubelst. = $4\frac{7}{8}$ ₰, = $\frac{4\frac{7}{8}}{5}$ = $\frac{39}{40}$ Frd'or; 1 Souveraind'or = $8\frac{1}{4}$ ₰ = $\frac{8\frac{1}{4}}{5}$ $1\frac{13}{20}$ Frd'or; 1 halber Souveraind'or = $4\frac{1}{8}$ ₰ = $\frac{4\frac{1}{8}}{5}$ = $\frac{33}{40}$ Frd'or; 1 Ruyder = $6\frac{307}{360}$ ₰ = $\frac{6\frac{307}{360}}{5}$ = $1\frac{667}{1800}$ Frd'or; ein halber Ruyder = $3\frac{17}{40}$ ₰ = $\frac{3\frac{17}{40}}{5}$ = $\frac{137}{200}$ Frd'or; 1 Dukaten = $2\frac{3}{4}$ ₰ = $\frac{2\frac{3}{4}}{5}$ = $\frac{11}{20}$ Frd'or.

3. Fremde Münzsorten haben in den öffentlichen Kassen, besonders in Königsberg und Danzig, folgenden gesetzlichen Werth:

Poln. Spec.-Thaler v. 1765 bis 1786 . .	1	Thlr.	10	Sgr.	7	Pf.
» halbe dergleichen	—	»	20	»	3	»
» viertel dergl. oder $\frac{1}{3}$ Thalerstücke . .	—	»	10	»	—	»
» achtel » » $\frac{1}{6}$ Thlr. bis 1786 .	—	»	4	»	9	»
» Spec.-Thlr. v. 1787 bis 1795 . .	1	»	19	»	4	»
» halbe dergl.	—	»	19	»	8	»
» viertel » oder $\frac{1}{3}$ Thlr. (2 Fl.) von 1796 bis 1821	—	»	9	»	5	»
» achtel dergl. oder $\frac{1}{6}$ Thlr. (1 Fl.) . .	—	»	4	»	8	»
» 5 Guldenstücke vom Jahre 1816 . .	—	»	23	»	6	»
Russische alte Rubel bis zum Jahre 1762 .	1	»	6	»	3	»
» ordinäre von neuem Gepräge . .	1	»	1	»	3	»
» » halbe dergl.	—	»	15	»	—	»
» » viertel »	—	»	7	»	6	»
» 20 Kopekenstücke	—	»	6	»	3	»
» 15 »	—	»	4	»	2	»
» 10 » (Griwen) . . .	—	»	2	»	8	»

Jede dieser Münzen ist welcher Bruch von einem Preuß. Thaler?

Digitized by Google

$1\frac{127}{360}$, $\frac{27}{40}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{120}$, $1\frac{29}{45}$, $\frac{50}{900}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{7}{45}$, $\frac{47}{60}$, $1\frac{5}{24}$, $1\frac{1}{24}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{45}$ ℔ Preuß. Courant.

Anmerk. Courant als Substantivum heißt der Strom eines Flusses, auch der laufende Monat; courant als Adjektivum heißt laufend, fließend; Cours der Lauf; beide Wörter zusammen aus dem Lateinischen von curro, ich laufe, cursus der Lauf, cursare laufen; daher schreibe ich kursiren und nicht koursiren, der Kurs und nicht der Cours.

4. Fremde Münzsorten haben in Frankfurt a. M. folgenden gesetzlichen Werth im 24 Fl.-Fuß: Souverains 16 Fl., Dukaten 5 Fl., Carolinen $10\frac{1}{2}$ Fl., Friedrichsd'or 9 Fl., Napoleons (20 Frankenstücke) $8\frac{3}{4}$ Fl.

Nach diesen Angaben beträgt jedes Goldstück wie viel im 14 Thalerfuße? Jede Münze ist welcher Bruch von einem Friedrichsd'or, und muß nach Verhältniß welchen Werth in Preuß. Courant haben, wenn 1 Frd'or = 170 Sgr. = $5\frac{2}{3}$ Thlr. Preuß. Courant steht?

Da 24 ﬀ = 1 *m℔* f. S. und auch 14 ℔ = 1 *m℔* f. S., so sind 24 ﬀ = 14 ℔; also 1 ﬀ = $\frac{14}{24}$ = $\frac{7}{12}$ ℔ = $\frac{7 \cdot 30}{12}$ = $\frac{7 \cdot 5}{2}$ = $17\frac{1}{2}$ ſ*ℋ*. Daher 1 Souverain = $16 \cdot \frac{7}{12}$ ℔ = 9 ℔ 10 ſ*ℋ*; 1 Dukaten = $5 \cdot 17\frac{1}{2}$ = $87\frac{1}{2}$ ſ*ℋ* = 2 ℔ 27 ſ*ℋ* 6 ₰; 1 Carolin = $10\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}$ = $\frac{21 \cdot 7}{2 \cdot 12}$ = $6\frac{1}{8}$ ℔ = 6 ℔ $3\frac{3}{4}$ ſ*ℋ*; 1 Frd'or = $9 \cdot \frac{7}{12}$ = $5\frac{1}{4}$ ℔ = 5 ℔ $7\frac{1}{2}$ ſ*ℋ*; 1 Napoleon = $8\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12}$ = $\frac{35 \cdot 7}{4 \cdot 8}$ = 5 ℔ $3\frac{1}{8}$ ſ*ℋ*. 1 Souverain = $\frac{16}{9}$, 1 Dukaten = $\frac{5}{9}$, 1 Carolin = $\frac{10\frac{1}{2}}{9}$ = $\frac{7}{6}$; 1 Napoleon = $\frac{8\frac{3}{4}}{9}$ = $\frac{35}{36}$ Frd'or.

Wenn man nun jeden dieser Brüche mit 170 Sgr. = $\frac{17}{3}$ ℔ multiplicirt, so erhält man die Werthe dieser Münzen in Preuß. Courant, folglich 1 Souverain = $\frac{16}{9} \cdot \frac{17}{3}$ = $\frac{272}{27}$ = 10 ℔ $2\frac{2}{9}$ ſ*ℋ*; 1 Dukaten = $\frac{5}{9} \cdot 170$ = $\frac{850}{9}$ ſ*ℋ* = $94\frac{4}{9}$ ſ*ℋ*; 1 Carolin = $\frac{7}{6} \cdot \frac{17}{3}$ = $\frac{119}{18}$ = 6 ℔ $18\frac{1}{3}$ ſ*ℋ*; 1 Napoleon = $\frac{35}{36} \cdot \frac{17}{3}$ = 5 ℔ $15\frac{5}{6}$ ſ*ℋ*.

Anmerk. Später wird sich Gelegenheit, die Richtigkeit der Frankfurter Angaben zu beurtheilen, darbieten.

b) Anwendung der vier Species auf Münzen.

1) Addition.

Leichte Additionsaufgaben wird jeder Lehrer nach Belieben geben können; ich will daher hier einige etwas verwickelte anführen.

1. Ein Kalkulator hat folgende Thalerbrüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{14}{15}$ zu addiren, wie wird er es auf die kürzeste und leichteste Weise ausführen?

Man nehme zunächst alle die gleichnamigen Brüche zusammen, welche einen ganzen Thaler ausmachen.

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ ꝛc.

Digitized by Google

Man findet die Summe = 18 ℳ 15 ßg.

2. In einer andern Rechnung stellen sich ihm aber folgende Thalerbrüche: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{31}{36}$, $\frac{33}{45}$, $\frac{28}{45}$, $\frac{43}{48}$ zur Addition dar, und nun ist die Frage, wie er diese behandeln werde?

Man addire zunächst diejenigen Brüche, deren Nenner Vielfache der kleinern Nenner sind, also:

$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{13}{16}+\frac{43}{48}=\frac{160}{48}=3\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{33}{40}=\frac{85}{40}=2\frac{1}{8}$; $\frac{1}{6}+\frac{11}{12}+\frac{19}{24}=\frac{45}{24}=1\frac{7}{8}$; $\frac{4}{9}+\frac{17}{18}+\frac{31}{36}=\frac{81}{36}=2\frac{1}{4}$; $\frac{8}{15}+\frac{28}{45}=\frac{52}{45}=1\frac{7}{45}$. Die einzelnen Summen ziehe man nun in eine einzige zusammen, so erhält man $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{8}+1\frac{7}{8}+2\frac{1}{4}+1\frac{7}{45}=10+\frac{7}{12}+\frac{7}{45}=10\frac{133}{180}$ ℳ = 10 ℳ 22 ßg 2 ₰.

Anmerk. Man kann leicht Brüche vorstehender Art bilden, wenn man eine beliebige Zahl, z. B. 7, als den kleinsten Nenner wählt und von diesem solche Vielfache nimmt, deren jedes wieder ein Vielfaches von dem vorhergehenden ist, wie das 2, 4, 8, 16fache, oder das 3, 9, 27fache, oder das 4, 16, 32fache ꝛc. Diesen Nennern fügt man nun solche Zähler hinzu, welche kein gemeines Maß mit ihren Nennern haben, zu ihren Nennern also Primzahlen sind, wie $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{32}$ ꝛc., $\frac{3}{9}$, $\frac{7}{27}$, $\frac{17}{27}$ ꝛc.

Die Addition der Brüche letzter Aufgabe ist leichter und einfacher, als die aller Brüche auf einmal, weil man in obiger Art nur mit kleinen Zahlen zu thun hat, in der gewöhnlichen mit bedeutend größern Zahlen; denn der kleinste Generalnenner obiger Brüche ist 720. Zur Uebung und Erläuterung mögen noch Beispiele folgen.

3. Welche Summe erhält man durch Addition folgender Brüche eines Frd'or, und wie viel beträgt sie in Preuß. Cour.; wenn man einen Frd'or zu 170 Sgr. = $5\frac{2}{3}$ ℳ rechnet? $\frac{9}{13}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{19}{26}$, $\frac{17}{27}$, $\frac{11}{39}$, $\frac{25}{34}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{31}{32}$, $\frac{44}{51}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{67}{78}$, $\frac{56}{81}$, $\frac{53}{64}$.

Es sind nun $\frac{9}{13}+\frac{19}{26}+\frac{11}{39}+\frac{31}{32}+\frac{67}{78}=3\frac{256}{1536}$; $\frac{8}{17}+\frac{25}{34}+\frac{44}{51}=2\frac{7}{102}$; $\frac{17}{27}+\frac{35}{54}+\frac{56}{81}=1\frac{157}{162}$; $\frac{27}{32}+\frac{53}{64}=1\frac{43}{64}$ und die Summe dieser Brüche ist = $8\frac{73453694}{114536064}$ Frd'or = 48 ℳ 29 ßg $1\frac{1123}{2805}$ ₰ Preuß. Courant.

4. Ein Handlungsgehülfe bringt durch Rechnung folgende Brüche eines Dukatens: $\frac{13}{14}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{19}{22}$, $\frac{37}{42}$, $\frac{41}{44}$, $\frac{67}{72}$, $\frac{65}{84}$, $\frac{73}{88}$, $\frac{35}{36}$, $\frac{103}{144}$ heraus, die er auf die kürzeste Weise addiren und in Courant, den Dukaten zu 3 Thlr. 6 Sgr., berechnen will. Welches Resultat wird er erhalten?

$\frac{13}{14}+\frac{37}{42}+\frac{65}{84}=2\frac{7}{12}$; $\frac{11}{18}+\frac{35}{36}+\frac{67}{72}+\frac{103}{144}=3\frac{11}{48}$; $\frac{19}{22}+\frac{41}{42}+\frac{73}{88}=2\frac{1}{8}$; ferner ist die Totalsumme = $8\frac{7}{16}$ Dukaten. Da nun 1 Dukaten = $3\frac{1}{3}$ ℳ, so sind 8 Dukaten 25 ℳ 18 ßg, und $\frac{7}{16}$ Dukaten = $\frac{7}{16}$. 96 = 42 ßg, also der gesuchte Werth = 27 ℳ Preuß. Cour.

5. Einem Banquier stellen sich in einer Rechnung folgende Brüche eines 10 Rubelstückes: $\frac{8}{15}$, $\frac{19}{51}$, $\frac{129}{152}$, $\frac{179}{184}$, $\frac{281}{352}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{12}{19}$, $\frac{107}{120}$, $\frac{145}{204}$, $\frac{265}{456}$, $\frac{65}{78}$, $\frac{37}{46}$, $\frac{83}{104}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{81}{92}$, $\frac{53}{60}$ zur Addition dar, deren Summe er nach dem Tarif, daß ein 10 Rubelstück = 9 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. in Frd'or

Digitized by Google

zu 5 Thlr., und den Frd'or zu $5\frac{1}{2}$ Thlr. Preuß. Cour. gerechnet, in Preuß. Cour. verwandeln will. Auf welche kurze Weise wird er diese Arbeit ausführen und welches Resultat erhalten?

$\frac{8}{15} + \frac{20}{40} + \frac{63}{40} + \frac{107}{120} = 3\frac{11}{40}$; $\frac{6}{17} + \frac{10}{51} + \frac{83}{102} + \frac{145}{204} = 2\frac{1}{4}$; $\frac{12}{16} + \frac{65}{76} + \frac{125}{152} + \frac{265}{456} = 2\frac{11}{12}$; $\frac{37}{46} + \frac{81}{92} + \frac{170}{184} + \frac{281}{552} = 3\frac{1}{6}$. Nun sind $3\frac{11}{40} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{11}{12} + 3\frac{1}{6} = 11\frac{73}{120}$ Zehnrubelstücke. Da ein Zehnrubelstück $= 9\frac{3}{4}$ ℔ Frd'or, so sind 11 dieser Stücke $= 11 \cdot 9\frac{3}{4} = 107\frac{1}{4}$ ℔ Frd'or, $\frac{73}{120}$ Stücke $= \frac{73}{120} \cdot \frac{39}{4} = 5\frac{140}{160}$ ℔ Frd'or, also $11\frac{73}{120}$ Zehnrubelstücke $= 113\frac{29}{160}$ ℔ Frd'or.

Ferner ist 1 Frd'or $= \frac{17}{3}$ ℔; also 1 ℔ Frd'or $= \frac{17}{15}$ ℔ Cour.; daher $113\frac{29}{160}$ ℔ Frd'or. $= 113\frac{29}{160} \times \frac{17}{15}$; $113 \cdot \frac{17}{15} = 128\frac{1}{15}$ ℔, $\frac{29}{160} \cdot \frac{17}{15} = 6$ ßℊ $1\frac{19}{20}$ ₰; also ist das Endresultat 128 ℔ 8 ßℊ $1\frac{19}{20}$ ₰ oder 128 ℔ 8 ßℊ 2 ₰ Preuß. Cour.

Anmerk. Die vorstehenden Beispiele werden nicht allein hinreichend deutlich das Verfahren in Anordnung der Rechnung, sondern auch die Vortheile desselben gezeigt haben, welche es gewährt. Denn wollte man die Brüche des letzten Beispiels nach der gewöhnlichen Weise addiren, so würde man zum kleinsten Generalnenner 891 480 erhalten, und daher hätte man auch verhältnißmäßig große Zahlen zu addiren, was nicht allein mühsam ist, sondern auch leicht Rechnungsfehler veranlassen kann, das auf dem bezeichneten Wege ohne Mühe vermieden wird. Dieses Verfahren kommt dem der sogenannten Zerstreuung der Brüche nahe, doch ist dieses noch sehr verschieden von dem hier gezeigten. Nur in seltenen Fällen ist die Zerstreuung der Brüche, d. h. Zerlegung derselben, z. B. $\frac{5}{8}$ in $\frac{4}{8}$ und $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{15}$ in $\frac{6}{15}$ und $\frac{1}{15}$ ꝛc., mit Vortheil anwendbar, obgleich sehr sinnig; ferner gehört dazu eine umfassende Kenntniß der Brüche, was Anfängern fehlt, daher will ich hier nicht weiter darauf eingehen, und nur noch dem Lehrer bemerkbar machen, auf welche Weise Er geschickte Aufgaben zum vorliegenden Zwecke bilden könne.

Man nehme irgend eine Primzahl, z. B. 29, bilde von derselben Vielfache, die aber wieder von einander Vielfache sind, z. B. $2 \cdot 29 = 58$, $3 \cdot 58 = 174$, $2 \cdot 174 = 348$, $4 \cdot 348 = 1392$ ꝛc. Diese Vielfache von 29 betrachte man nun als Nenner gewisser Brüche, und gebe ihnen solche Zähler, welche Primzahlen zu ihren Nennern sind, z. B. zum Nenner 29 den Zähler 24, z. N. $2 \cdot 29$ d. Z. $3 \cdot 17 = 51$, z. N. $3 \cdot 58$ d. Z. $5 \cdot 13 = 65$, z. N. $2 \cdot 174$ d. Z. $8 \cdot 31 + 5 = 253$ ꝛc., und fahre so fort bis zum letzten Nenner, dessen Zähler in nachbemerkter Art zu bestimmen ist; so hat man dadurch die Brüche $\frac{24}{29}$, $\frac{51}{58}$, $\frac{65}{174}$, $\frac{253}{348}$, deren Summe man nun suche, so findet man dieselbe am kürzesten auf folgende Art. Man zerlege die Nenner in ihre einfachen Faktoren, wodurch man folgende Brüche zur Addition erhält: $\frac{24}{29} + \frac{51}{2 \cdot 29} + \frac{65}{2 \cdot 3 \cdot 29} + \frac{253}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 29} + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 29}$.

Diese Zerlegung überhebt den Rechner der Division mit den Nennern in den Generalnenner; denn hieraus ersieht man sogleich, daß man den Zähler des ersten Bruches zur Gleichnamigmachung der Brüche mit $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$, den des zweiten mit $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$, den des dritten mit $2 \cdot 4 = 8$, und den des vierten mit 4 zu multipliziren hat; thut man dieses und summirt die erhaltenen Produkte, so erhält man $\frac{3908 + x}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 29}$. Will man nun haben, daß dieser Bruch sich

Digitized by Google

durch 29 heben lasse, so muß man den Zähler x des fünften Bruches so wählen, daß die Summe von 3908 und x ein Vielfaches von 29 sei; um nun x zu bestimmen, dividire man 3908 durch 29, dieses giebt 134 zum Quotienten und 22 zum Rest, hierau fehlt 7 bis 29; daher bestimme man den Zähler x des 5ten Bruches so, daß er ein Vielfaches von 29 sei und noch 7 in sich fasse; er sei $x = 26 \cdot 29 + 7 = 761$, also ist der 5te Bruch $\frac{761}{1492}$; daher ist die Summe aller 5 Brüche $= \frac{4642}{1492}$, und diesen durch 29 gehoben und zu Ganzen gemacht, giebt $3\frac{11}{52}$.

2) Subtraktion.

Wie in der Addition, so kann man auch bei der Subtraktion ein ähnliches Verfahren zur Abkürzung der Rechnung anwenden. Z. B.

1. Ein Gutsbesitzer hat Getreide und andere Naturalien nach der Stadt gebracht und verkauft, und findet in der Nachrechnung folgende Brüche in der Einnahme: $\frac{13}{14}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{19}{36}$ Thlr.; in der Rechnung für eingekaufte Waaren kommt er auf folgende Brüche: $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{19}{27}$, $\frac{32}{45}$, $\frac{23}{32}$ Thlr.; auf welchem kürzesten Wege kann er die Differenz zwischen der Einnahme und Ausgabe finden?

Man suche immer die Differenz je zweier gleichnamigen Brüche oder doch solcher, deren ein Nenner ein Vielfaches des andern ist, und bezeichne den Rest entweder mit E (Einnahme) oder mit A (Ausgabe); also: $\frac{13}{14} - \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$ E., $\frac{1}{3} - \frac{4}{15} = \frac{1}{15}$ A., $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ A., $\frac{17}{18} - \frac{13}{15} = \frac{2}{5}$ E., dazu $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ E., $\frac{7}{8} - \frac{13}{24} = \frac{1}{3}$ A., $\frac{19}{27} - \frac{19}{30} = \frac{19}{108}$ A., $\frac{15}{16} - \frac{23}{32} = \frac{7}{32}$ E. und $\frac{32}{45}$ E.

Nun hat man noch $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{7}{32}$ zu addiren, welches $1\frac{37}{96}$ giebt, ferner $\frac{1}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{19}{108} + \frac{32}{45} = 1\frac{1}{8} + \frac{31}{108}$, die Differenz zwischen dieser und der vorigen Summe ist die zwischen $\frac{25}{96}$ und $\frac{31}{108}$, welche $\frac{23}{864}$ zum Vortheil der Ausgabe ist.

2. Ein Schiffsherr hat in Alexandrien für $13\,587\frac{143}{148}$ Span. Thaler Mokkakaffee eingekauft, und setzt davon für $5259\frac{104}{111}$ Mark Banko in Hamburg ab; mit dem Reste fährt er nach Preuß. Seestädten. Für welchen Preis bringt er Kaffee dahin, wenn man weiß, daß man unter Spanischen Thalern Piaster versteht, deren $8\frac{2}{3} = 1$ Mark $14\frac{1}{3}$ Loth f. S. und $27\frac{3}{8}$ Hamb. Mark Banko $= 1$ Mark fein Silber $= 14$ Thlr. Preuß. Cour.? Man suche zunächst den Werth der Piaster und Hamb. Mark Bko. in Preuß. Cour.

Da $8\frac{2}{3}$ Piaster $= 14\frac{1}{3}$ Loth f. S., so ist 1 Loth f. S. $= \frac{8\frac{2}{3}}{14\frac{1}{3}} = \frac{26}{43}$ Span. Piaster, also 16 Loth oder eine feine Mark $= \frac{16 \cdot 26}{43}$ Piast. $= 14$ Thlr., folglich 1 Piaster $= \frac{14 \cdot 43}{26 \cdot 16} = \frac{7 \cdot 43}{26 \cdot 8} = \frac{301}{208}$ Thlr. Pr. Cour., daher sind 13 587 Piaster $= 13\,587 \cdot \frac{301}{208} = 19\,661,_{95673}$ Thlr. Pr. Cour. $\frac{143}{148}$ Piaster $= \frac{143}{148} \cdot \frac{301}{208} = \frac{11 \cdot 301}{148 \cdot 16} = 1,_{39823}$ Thlr. Preuß. Cour., also ist der Einkaufspreis des Kaffee $= 19\,663,_{35496}$ Thlr. Preuß. Cour. Weil $27\frac{3}{8}$ Hamb. ℳ Bko. $= 14$ Thlr., so ist 1 Hamb. ℳ Bko.

Digitized by Google

$= \frac{112}{219}$ Thlr., daher 5259 Hamb. m/Bko. $= 5259 . \frac{112}{219} = 2689,_{534246}$ Thlr. Pr. Cour., $\frac{104}{111}$ Hamb. m/Bko. $= \frac{104}{111} . \frac{112}{219} = 0,_{479764}$ Thlr. Pr. Court.

Also hat der Schiffsherr für $2690,_{01331}$ Thlr. Pr. Cour. Kaffee in Hamburg abgesetzt, und er schifft daher noch mit einer Waare für $16\,973,_{34165}$ Thlr. Pr. Courant nach Preuß. Seestädten. Um den Thalerbruch in Silbergroschen zu verwandeln, multiplizire man ihn mit 30, also $30 . 0,_{34165} = 10,_{2495}$ Sgr., und den Bruch der Sgr. mit 12, dieses giebt $12 . 0,_{2495} = 2,_{994}$ Pf. Daher ist der Rest der Waare 16973 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf. an Werth.

3) Multiplikation.

1. Ein Reisender wechselt 75 Frd'or, die in den Kurszetteln 170 Sgr. notirt sind, gegen Courant; wie viel hat er empfangen?

Da 1 Frd'or $= 170$ Sgr. $= 5\frac{2}{3}$ Thlr., so sind 75 Frd'or $= 75 . \frac{17}{3}$ $= 25 . 17 = 425$ Thlr. Pr. Cour.

2. Jemand wechselt 450 Conv.-Spec.-Thlr., die nach dem Tarif 1 Thlr. 11 Sgr. 3 Pf. Preuß. Cour. gelten, gegen dieses; wie viel wird er erhalten?

$450 . 1$ Thlr. . . $= 450$ Thlr.; 11 Sgr. $= \frac{1}{3}$ Thlr. $+ 1$ Sgr.; also
$450 . \frac{1}{3}$ » . . $= 150$ »
$450 . \frac{1}{30}$ » . . $= 15$ » ; 3 Pf. $= \frac{1}{120}$ Thlr.; daher
$450 . \frac{1}{120}$ » . . $= 3$ » $22\frac{1}{2}$ Sgr.

450 Conv.-Spec.-Thlr. $= 618$ Thlr. $22\frac{1}{2}$ Sgr. Pr. Cour.

Oder 11 Sgr. 3 Pf. $= 11\frac{1}{4}$ Sgr. $= \frac{11\frac{1}{4}}{30}$ Thlr. $= \frac{45}{120}$ Thlr. $= \frac{3}{8}$ Thlr.; daher $450 . \frac{3}{8}$ Thlr. $= 168\frac{3}{4}$ Thlr.; dazu die 450 Thlr., giebt $618\frac{3}{4}$ Thlr.

3. Ein Kaufmann zählt seine Kasse nach, und findet in derselben 348 Frd'or, im Kurse von 169 Sgr. notirt; 492 Holl. und Deutsche Dukaten, deren Kurs 96 Sgr. bemerkt ist; 853 Albertsthlr., im Kurse von 44 Sgr., 2395 Franz. Franken, zu 7 Sgr. 11 Pf. notirt, 4896 neue Rubel, zu $31\frac{5}{6}$ Sgr. bemerkt; 8946 Poln. 5-Guldenstücke, zu 23 Sgr. 6 Pf. notirt, und außerdem noch 2893 Thlr. $27\frac{1}{2}$ Sgr. Preuß. Courant. Wie hoch in Pr. Cour. beläuft sich seine Kasse?

348 Frd'or à 169 Sgr. $= 348 (5\frac{2}{3}$ Thlr. $- 1$ Sgr.$) = 1960$ Thlr. 12 Sgr.
492 Dukaten à 96 Sgr. $= 492 . (3\frac{1}{5}$ Thlr.$) = 1574$ Thlr. 12 Sgr.
853 Albertsthlr. à 44 Sgr. $= 1251$ Thlr. 2 Sgr.
2395 Franken à 7 Sgr. 11 Pf. $= 632$ Thlr. 5 Pf.
4896 Rubel à $31\frac{5}{6}$ Sgr. $= 5195$ Thlr. 6 Sgr.
8946 Poln. 5-Fl.-Stücke à $23\frac{1}{2}$ Sgr. $= 7007$ Thlr. 21 Sgr.

Daher ist der Bestand der Kasse 20514 Thlr. 20 Sgr. 11 Pf. Pr. Cour.

Digitized by Google

4) Division.

1. Jemand hat für 2455 Thlr. 6 Sgr. 432 Frd'or erhalten; wie hoch standen sie im Kurse?

$$\frac{2455\frac{1}{5}}{432} = 5 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.}$$

2. Für 470 Thlr. empfängt Jemand 146 Dukaten und 2 Thlr. 24 Sgr.; wie hoch wurden die Dukaten gerechnet?

Da 470 Thlr. = 146 Dukaten und 2 Thlr. 24 Sgr. sind, so sind die 146 Dukaten allein nur 470 Thlr. weniger 2 Thlr. 24 Sgr. oder 467 Thlr. 6 Sgr. an Werth; daher 1 Dukaten $= \frac{467 \text{ Thlr. } 6 \text{ Sgr.}}{146}$ = 3 Thlr. 6 Sgr.

3. Ein reicher Berliner will eine Reise durch die Oestreichischen Staaten machen, und um sich zu diesem Zwecke mit Reisegeld zu versehen, geht er mit 7820 Thlr. Preuß. Courant auf die Bank und läßt sich dafür Wechsel in Oestreichischen Souverain'or auf sichere Handlungshäuser Oestreichischer Hauptstädte ausstellen. Er empfängt dafür Wechsel, welche über 847 Souverain'or lauten, und außerdem noch 16 Sgr. 6 Pf. zurück. Wie hoch wurde ein Souverain'or gerechnet?

1 Souverain'or $= \frac{7820 \text{ Thlr. weniger } 16 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.}}{847} = 9$ Thlr. 10 Sgr. 6 Pf.

4. Ein Französischer Partikulier (Privatmann) kommt nach Berlin, daselbst eine längere Zeit zu verweilen, daher läßt er seine mitgebrachten 480 Vierzig-Frankenstücke in Frd'or umsetzen, weil jene, wie er meint, nicht überall zu ihrem wahren Werthe angenommen werden, und er erhält dagegen 916 Frd'or. In den Kurszetteln sieht er, daß die Frd'or zu 5 Thlr. Gold oder $5\frac{2}{3}$ Thlr. Preuß. Courant gerechnet werden; nach diesen Angaben berechnet er den Werth eines 40-Frankenstücks in Thlr. Gold und Thlr. Courant; welche Werthe hat er erhalten?

1 Vierzig-Frankenstück $= \frac{9\,1\,6 \cdot 5}{4\,8\,0} = 9$ Thlr. $16\frac{1}{4}$ Sgr. Gold $= \frac{9\,1\,6 \cdot 1\,7}{4\,8\,0 \cdot 3} = 10$ Thlr. $21\frac{1}{3}$ Sgr.

c) Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

1) Geometrische Verhältnisse.

Zu dieser Numer gehören drei Arten von Aufgaben, und zwar solche, welche das Verhältniß der Silbermünzen, dann solche, welche das Verhältniß der Goldmünzen, in beiden Fällen inländischer oder ausländischer, und endlich solche, welche das Verhältniß der Silber- und Goldmünzen, oder überhaupt das Verhältniß des Silbers zum Golde suchen.

Digitized by Google

1. Ein Thlr. hat 3 Preuß. Gulden, 1 Gulden 2 halbe Gulden, 1 halber Gulden 2 Achthalber, 1 Achthalber 2 gute Groschen (g. Gr.), 1 g. Gr. 12 Pf.; ferner ist 1 Thlr. = 5 Achtzehner (Tympfen) = 30 Sgr. à 12 Pf. Wie verhält sich jede dieser Münzen zu den übrigen?

1 ℔ : 1 ﬀ. = 3 ﬀ : 1 ﬀ = 3 : 1.
1 ﬀ : 1 halb. ﬀ : 2 h. ﬀ : 1 h. ﬀ = 2 : 1.
1 h. ﬀ : 1 Achthalb. = 2 Achth. : 1 Achth. = 2 : 1.
1 Achth. : 1 ℋ = 2 ℋ : 1 ℋ = 2 : 1.
1 ℋ : 1 ℛ = 12 ℛ : 1 ℛ = 12 : 1.

Durch Zusammensetzung dieser Proportionen erhält man das Verhältniß je zwei der übrigen Münzen.

1 ℔ : 1 Tympf = 5 Tympfe : 1 Tympf = 5 : 1.
1 Tympf : 1 Sgr. = 6 Sgr. : 1 Sgr. = 6 : 1.
1 Sgr. : 1 ℛ = 12 ℛ : 1 ℛ = 12 : 1.

Anmerk. Früher rechnete man in Preußen nach Thalern zu 90 Groschen (Kupfermünze) zu 18 Pfennigen (eingeblidet). Da nun 5 Tympfe = 1 Thlr. = 90 Gr., so ist 1 Tympf = $\frac{90}{5}$ = achtzehn Groschen, daher der Name Achtzehner. Ferner 12 Achthalber = 1 Thlr. = 90 Groschen, also 1 Achthalber = $\frac{90}{12}$ = $7\frac{1}{2}$ Gr., d. h. $1\frac{1}{2}$ Thlr. enthält 7 Gr. und von dem achten nur ein halb, daher das Wort Achtehalb oder Achthalber.

2. Nach der allgemeinen Münzkonvention der zum Zoll- und Handelsvereine verbundenen Staaten rechnet man in Süddeutschland nach Gulden zu 60 Kreuzern, in Sachsen nach Thalern zu 30 Neugroschen. $24\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Mark f. S. = 14 Sächsischen Thalern = 14 Preuß. Thalern = 7 Vereinsmünzen. Wie verhält sich jede der Preuß. Münzen zu den Süddeutschen und Sächsischen?

1 Thlr. Pr. : 1 Fl. = $24\frac{1}{2}$: 14 = 49 : 28 = 7 : 4. ꝛc.

3. Es sind 10 Deutsche Conventions-Speciesthaler = 1 Mark f. S. = $9\frac{1}{11}$ Badensche Kronenthaler = 9,181 Baierischen Kronenthalern = 18 neuen $\frac{2}{3}$ Stücken nach dem Leipziger Fuße = $9\frac{1}{4}$ Dän. Reichsthaler-Species = 51,968 Franz. Francs = $8\frac{2}{5}$ Engl. alten Kronen = 8,989 Engl. neuen Kronen = 9,096 Hessen-Darmst. Kronenthalern = 10 neuen Scudi des Lombard.-Venetian. Königreichs = 9 Lübischen Speciesthalern = 9,088 Nassauschen Kronenthalern = 9,592 Holländ. Albertsthalern = 86,688 Poln. Gulden seit 1815 = 17,425 Portugies. neuen Cruſaden = 13,0032 Russ. neuen Rubeln = 10,394 Sardin. neuen Scudi = 9,162 Schwed. neuen Speciesthalern = 35,0787 Schweizerfranken nach dem Münzconcordat von 1825 = 12,231 Sizil. neuen Ducati = 9,5715 Span. Piastern = 9,274 Toskanischen Francesdone = 9,136 Würtemb. Kronenthalern = 9,674 Brasilian. Piastern = 9,5715 Mexikan. Piastern = 20,516 neuen Sicca-Rupien in Calcutta = 9,72 Nordamerik. Dollars = 9,5714 Pesos (Piaster) Südamerikan. Freistaaten. Wie verhält sich

jede dieser Münzen zu den übrigen, und in welchem Verhältnisse steht ein Preuß. Thaler zu den genannten Münzen, da 14 Thlr. Preuß. = 1 Mrk. feines Silber?

1 Pr. Thlr. : 1 Conv.-Spec.-Thlr. = 10 : 14 = 5 : 7.
1 Conv.-Spec.-Thlr. : 1 Bad. Kr.-Thlr. = $9\frac{1}{11}$: 10 = 10 : 11.
1 Bad. Kr.-Thlr. : 1 Baier. Kr.-Thlr. = 9,181 : $9\frac{1}{11}$ = 100991 : 100000.
1 Baier. Kr.-Thlr. : 1 $\frac{2}{3}$Stück (im 18Fl.-Fuß) = 18 : 9,181 = 18000 : 9181.
1 $\frac{2}{3}$Stück n. d. Leipz. F. : 1 Dän. Thlr. Spec. = $9\frac{1}{4}$: 18 = 37 : 72.
1 Dän. Thlr. Spec. : 1 Franz. Frk. = 51,968 : $9\frac{1}{4}$ = 207872 : 37000 = 25984 : 4625.
1 Franz. Frk. : 1 Engl. a. Kr. = $8\frac{2}{5}$: 51,968 = 4200 : 25984 = 75 : 464.
1 Engl. a. Krone : 1 Engl. n. Kr. = 8,989 : $8\frac{2}{5}$ = 44945 : 42000 = 8989 : 8400.
1 Engl. n. Kr. : 1 Hess. Kr.-Thlr. = 9,096 : 8,989 = 9096 : 8989.
1 Hess. Kr.-Thlr. : 1 Lomb. n. Scudo = 10 : 9,096 = 10000 : 9096 = 1250 : 1137.
1 Lomb. n. Scudo : 1 Lüb. Spec. Thlr. = 9 : 10.
1 Lüb. Spec.-Thlr. : 1 Nassauisch. Kr.-Thlr. = 9,088 : 9 = 9088 : 9000 = 1136 : 1125.
1 Nass. Kr.-Thlr. : 1 Holl. Alb.-Thlr. = 9,592 : 9,088 = 1199 : 1136.
1 Holl. Alb.-Thlr. : 1 Poln. n. Fl. = 86,688 : 9,592 = 10821 : 1199.
1 Poln. n. Fl. : 1 Portug. n. Cruſade = 17,425 : 86,688 = 17425 : 86688.
1 Port. Cruſ. : 1 Russ. n. Rubel = 13,0032 : 17,425 = 65016 : 87125.
1 Russ. Rub. : 1 Sard. n. Scudo = 10,394 : 13,0032 = 25985 : 32508.
1 Sard. Scudo : 1 Schwed. n. Spec.-Thlr. = 9,162 : 10,394 = 4581 : 5197.
1 Schwed. Spec.-Thlr. : 1 Schweiz. neuen Franken = 35,0787 : 9,162 = 116929 : 30540.
1 Schweiz. Frk. : 1 Sizil. n. Ducat. = 12,231 : 35,0787 = 40770 : 116929.
1 Sizil. Duc. : 1 Span. Piaster = 9,5715 : 12,231 = 709 : 909.
1 Span. Piast. : 1 Tosk. Francesccone = 9,274 : 9,5715 = 18548 : 19143.
1 Tosk. Francesc. : 1 Würtemb. Kr.-Thlr. = 9,136 : 9,274 = 4568 : 4637.
1 Würt. Kr.-Thlr. : 1 Brasil. Piaster = 9,674 : 9,136 = 4837 : 4568.
1 Brasil. Piast. : 1 Mex. Piast. = 9,5715 : 9,674 = 19143 : 19348.
1 Mex. Piast. : 1 n. Sicca-Rupie = 20,516 : 9,5715 : 41032 : 19143.
1 Sicca-Rupie : 1 Nordam. Doll. = 9,72 : 20,516 = 2430 : 5129.
1 Nordamerik. Dollar : 1 Südam. Peso = 9,5715 : 9,72 = 709 : 720.

Durch Zusammensetzung dieser Proportionen wird man das Verhältniß aller übrigen Münzen finden.

Anmerk. Früher wurden aus dem Engl. Münzpfunde Silber 62, seit 1816 werden 66 Schillinge geprägt, und da in jedem Falle eine Krone = 5 Schillingen ist, so verhält sich eine Engl. alte Krone : 1 Engl. neuen Krone = 66 : 62 = 33 : 31.

Digitized by Google

4. Gesetzlich sind $38,_{7692}$ Preuß. Frd'or = 1 Mark fein Gold = $67,_{944}$ Deutschen Dukaten = $45,_{194}$ Badener Ludwigd'or = $31,_{135}$ Baier. Karolinen = $46,_{703}$ Mazd'or = $8,_{894}$ Brasil. Doblas = $39,_{302}$ Dän. Frederikd'or = $40,_{275}$ Franz. 20 Frankstücken = $33,_{966}$ Franz. Louisd'or seit 1785 nach Franz. Probe = $30,_{419}$ Engl. Guineen = $31,_{94}$ Engl. Sovereigns = $39,_{03}$ Hessen-Kasselschen Wilhelmd'or = $38,_{5}$ Hess.-Darmst. Zehnguldenstücken = $68,_{2794}$ Päbstl. neuen Zecchinen = $22,_{931}$ Lombard. Souveraind'or = $9,_{875}$ Mexikan. Onza de oro = $23,_{182}$ Brabant. Souveraind'or = $25,_{636}$ Holl. Rudyder = $68,_{184}$ Holl. Dukaten = $68,_{1134}$ Niederl. Fünfguldenstücken = $23,_{182}$ Oestr. Souveraind'or = $19,_{234}$ Bengalischen neuen Mohurs oder Rupien = $4,_{649}$ Parmaischen achtfachen Pistolen = 26 Poln. 50 Guldenstücke = $4,_{7436}$ Portugies. Dabraons = $19,_{5}$ Russ. Imperialen seit 1763 = $5,_{655}$ Sadoyischen alten Karolinen = $67,_{853}$ Genuesischen Zecchinen = $6,_{2}$ Sicil. 10 Oncette-Stücken = $9,_{875}$ Span. neuen Quadruples = 10 Columbischen Onza de oro = $22,_{35}$ Toskanischen Ruspone. Wie verhält sich nach diesen Angaben jede Goldmünze zu den übrigen, und in welchem Verhältnisse steht der Preuß. Frd'or zu den übrigen Goldmünzen, wenn er als die Einheit betrachtet wird?

$$1 \text{ Frd'or} : 1 \text{ Deutschen Dukaten} = \frac{67,_{944}}{67,_{944}} : \frac{38,_{7692}}{67,_{944}} = 1 : 0,_{685323}.$$

5. Auf eine Berl. Mark fein Gold gehen $38\frac{10}{13}$ Friedrichd'or à 5 Thlr., also ist 1 Mark f. G. = $5 . 38\frac{10}{13} = 193\frac{11}{13}$ Thlr.; eine Mark fein Silber = 14 Thlr.; daher verhält sich eine Mark f. S. zu einer Mark f. G. = 14 Thlr. : $193\frac{11}{13}$ Thlr. = 182 : 2510 = 1 : $13,_{789}$. Dieses ist das Verhältniß des Silbers zum Golde nach dem Münzfuße für Silber- und Goldmünzen.

Da aber ein Friedrichd'or im Verkehre gewöhnlich $5\frac{2}{3}$ Thlr. Cour. gerechnet wird, so ist nach dieser Annahme obiges Verhältniß etwas anders. Denn da die Mark f. G. = $38\frac{10}{13}$ Frd'or, 1 Frd'or = $5\frac{2}{3}$ Thlr. Cour., so ist 1 Mark f. G. = $38\frac{10}{13} . 5\frac{2}{3} = \frac{504}{13} . \frac{17}{3}$ Thlr. Cour., und daher ist das Verhältniß des Silbers zum Golde = 14 Thlr. : $\frac{504 . 17}{13 . 3}$ Thlr. = 13 : 12.17 = 1 : $15,_{6923}$.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: Nach dem Münzfuße findet man das Verhältniß des Silbers zum Golde, wenn man die Mark fein Silber und fein Gold nach einer Münze ausdrückt, die für beide Metalle denselben Namen führt und darauf setzt: eine Mark f. S. zu einer Mark f. G., wie die Zahl der Münzstücke, welche einer Mark f. S. gleich sind, zur Zahl der Münzstücke, die gleich einer Mark f. G. sind.

Nach dem wirklichen Verkehre findet man das Verhältniß des Silbers zum Golde, wenn man den Preis sowohl einer Mark f. S. als auch einer Mark f. G. in einer und derselben

Digitized by Google

Silbermünze bestimmt und nun setzt: eine Mark f. S. zu einer Mark f. G., wie der Preis einer Mark f. S. in Silbermünze bestimmt zu dem Preise einer Mark f. G. in derselben Silbermünze ausgedrückt.

6. Nach dem Münzkonkordat der Kantone Aargau, Basel, Bern ꝛc. soll seit dem 1. Januar 1826 der Schweizer Frank $= 125{,}514$ Franz. Grän f. Silber oder $8{,}1$ Grän f. Gold sein. In welchem Verhältnisse steht hier Silber zum Golde?

Da 1 Frank $= 125{,}514$ Grän f. S. $= 8{,}1$ Grän f. G., so ist

1 Grän f. S. : 1 Grän f. G. $= 8{,}1 : 125{,}514 = 1 : 15{,}49555\ldots$

7. In Amsterdam zahlt man für ein Kilogramm feinen Silbers $105{,}5$ bis $106{,}5$ Fl.; für Gold in Barren beständig $1442{,}6$ Fl. mit einem veränderlichen Agio von 14 bis $15\frac{1}{2}$ %. Wenn man den Durchschnittspreis des Silbers und Goldes nimmt, so steht Silber zum Golde in welchem Verhältnisse?

$105{,}5 + 106{,}5 = 212$ Fl., und dieses durch 2 dividirt, giebt 106 Fl. für 1 Kilogr. f. S.

Das arithm. Mittel von 14 und $15{,}5$ % ist $\frac{14 + 15{,}5}{2} = 14{,}75$ %.

Da nun 1 % von $1442{,}6 = \frac{1442{,}6}{100}$ Fl., so sind $14{,}75$ % $= \frac{1442{,}6}{100} \times 14{,}75$ Fl.; dieses ist also das Agio, und dieses zum beständigen Preise gesetzt, giebt $1442{,}6 + 212{,}7835 = 1655{,}3835$ Fl. für ein Kilogr. f. G.; daher ist

1 Kilogr. f. S. : 1 Kilogr. f. G. $= 106$ Fl. : $1655{,}3835$ Fl. $= 1 : 15{,}6168$.

8. In Augsburg zahlt man für eine Köln. Mark fein Gold 315 Fl. in Courant, d. h. im 20 Guldenfuße; wie steht daher Silber zum Golde?

1 ℳ f. S. : 1 ℳ f. G. $= 20 : 315 = 1 : 15{,}75$.

9. In Bologna wird das Pfd. von 24 Karat fein Gold mit 1130 Lire $16\frac{1}{6}$ Soldi, das Pfd. von 12 Unzen fein Silber mit 72 Lire $15\frac{1}{2}$ Soldi, 1 Lire $= 20$ Soldi, bezahlt; wie steht Silber zum Golde?

1 ℔ f. S. : 1 ℔ f. G. $= 1455\frac{1}{2}$ Lire : $22\,616\frac{1}{2}$ Lire $= 1 : 15{,}540$.

10. In Hamburg rechnet man 3216 Dukaten $= 47$ Köln. Mark fein Gold, der Dukaten Gold wird zu $102\frac{1}{2}$ Schill. Banco und darüber bezahlt; hiebei rechnet man 67 Dukaten $= 1$ Mark $23\frac{1}{2}$ Karat f. G. und $27\frac{5}{8}$ Mark Banco $= 1$ Köln. Mark f. S., 1 Mark $= 16$ Schill. Wie steht demnach Silber zum Golde?

Hiernach haben 3216 Dukaten den Werth von $\frac{3216 \cdot 102\frac{1}{2}}{16}$ ℳ Bco. $= 201 \cdot 102\frac{1}{2} = 20\,602\frac{1}{2}$ ℳ Bco., und 47 ℳ f. S. $= 47 \cdot 27\frac{5}{8} = 1298\frac{3}{8}$ ℳ Bco.; daher ist

Silber : Gold $= 1298\frac{3}{8} : 20\,602\frac{1}{2} = 1 : 15{,}866$.

Digitized by Google

11. In Leipzig zahlt man für eine Mark 24 Karat fein Gold 211 Thlr. und für eine Mark 14 Loth fein Silber $13\frac{1}{4}$ Thlr.; wie steht hier Silber zum Golde?

Da 14 Loth f. S. $= 13\frac{1}{24}$ Thlr. $= \frac{323}{24}$ Thlr., so sind 16 Loth oder eine Mark f. S. $= \frac{16 \cdot 323}{14 \cdot 24} = \frac{323}{21}$ Thlr.; also ist Silber : Golde $= \frac{323}{21}$ Thlr. : 2Π Thlr. $= 1 : 13{,}_{749}$.

12. In London werden 12 Unzen Standardgold $=$ 11 Unzen feines Gold gerechnet; gilt nun daselbst eine Unze Standardgold $3\frac{7}{8}$ Liver Sterling, und Silber 61 ℔ Sterling, und nimmt man den Kurs auf Berlin zu $6\frac{5}{6}$ und $6\frac{2}{3}$ Thlr. Preuß. Courant an, so kommt 1 Köln. Mark f. Gold oder Silber in Berlin wie hoch zu stehen, und welches ist das Verhältniß des Silbers zum Golde?

Man rechnet auch in London 41 Unzen Standardgold $=$ 5 Kölnischen Mark f. Gold, und 65 Unzen Standardsilber $=$ 8 Mark Köln. f. Silber.

Diese Rechnung macht man am einfachsten nach dem Kettensatze.

x ℳ Pr. Cour.	$=$	1 Köln. m℔ f. G.		$=$	1 Köln. m℔ f. Silber		
5	$=$	41 Unzen Stand.-G.		8	$=$	65 Unzen Standard-S.	
1	$=$	$3\frac{7}{8}$ Liv. Sterling		1	$=$	61 ℔ Sterling	
1	$=$	$6\frac{5}{6}$ ℳ Pr. Cour.		240	$=$	1 Liv. Sterling	
240	52 111	217,$_{129}$ ℳ Pr. Cour.		1	$=$	$6\frac{2}{3}$ ℳ Pr. Cour.	
				288	3965	13,$_{767}$ ℳ Preuß. Cour.	

Daher 1 m℔ f. S. : 1 m℔ f. G. $= 13{,}_{767} : 217{,}_{139} = 1 : 15{,}_{771}$.

13. In den Kurszetteln steht der Dukaten mit 96 Sgr. notirt; nimmt man nun an, daß 67 Dukaten $=$ 1 m℔ $23\frac{1}{2}$ Karat fein Gold ist, so steht Silber in welchem Verhältnisse zum Golde?

Da 1 Dukaten $= 3\frac{1}{5}$ Thlr., so sind 67 Dukaten $= 67 \cdot 3\frac{1}{5}$ Thlr. $=$ $23\frac{1}{2}$ Karat f. G., also 1 Karat f. G. $= \frac{67 \cdot 3\frac{1}{5}}{23\frac{1}{2}} = \frac{67 \cdot 16 \cdot 2}{47 \cdot 5}$ Thlr.; also 24 Karat oder 1 m℔ f. G. $= \frac{24 \cdot 67 \cdot 16 \cdot 2}{47 \cdot 5}$ Thlr.

Nun ist eine feine m℔ Silber $=$ 14 Thlr.; daher

1 m℔ f. S. : 1 m℔ f. G. $= 14 : \frac{24 \cdot 67 \cdot 16 \cdot 2}{47 \cdot 5} = 1 : 15{,}_{640}$.

Anmerk. Die Aufgaben, welche mit Hilfe des Gewichts berechnet werden, kommen zwar erst im folgenden Abschnitte vor, da sie aber so einfach sind, so können sie auch hier schon stehen.

2) Geometrische Proportionen.

1. Jede der in der dritten Aufgabe voriger Numer angegebenen Silbermünzen beträgt wie viel in Preuß. Cour. in Thalern, Sgr. und Pfennigen ausgedrückt?

Diese, wie alle ähnlichen Aufgaben, sind stets auf dreifache Weise aufzulösen, nämlich durch Schlüsse, Zusammensetzung der Proportionen und den

Digitized by Google

Kettensatz; denn wird ausschließlich nur eine Art der Auflösung geübt, so wird dadurch der Schüler einseitig gebildet, was immer ein Fehler in der Unterrichtsmethode ist. Ich führe hier von jeder Art nur eine Auflösung an, weil alle übrigen einander ähnlich sind.

Da 10 Conventions-Speciesthaler = 1 m℔ f. S., und diese = 14 Thlr. Pr. Cour. ist, so ist 1 Conv.-Speciesthaler = $\frac{7}{5}$ Thlr. = $1\frac{2}{5}$ Thlr. Pr. Cour. Nun sind $\frac{2}{5}$ Thlr. = 12 Sgr.; also ist 1 Conv.-Speciesthaler = 1 Thlr. 12 Sgr.

Nach obiger Angabe sind $9\frac{1}{11}$ Bad. Kronenthlr. = 14 Thlr. Pr., also

1 Bad. Kronenthlr.	: 1 Pr. Thlr.	=	$14 : 9\frac{1}{11}$
1 Pr. Thlr.	: 1 Sgr.	=	30 : 1
1 Bad. Kronenthlr.	: 1 Sgr.	=	231 : 5

also 1 Bad. Kronenthaler = 46 Sgr. 2,4 Pf. = 1 Thlr. 16 Sgr. 2,4 Pf.

Ferner sind 9,181 Baier. Kronenthlr. = 14 Pr. Thlr., also

= 1 Baier. Kronenthlr.
9,181 = 14 Thlr. Preuß. Cour.
1 = 30 Sgr.

9,181	420 000	45 Sgr. 8,96 Pf. = 1 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf. nahe.

Durch Rechnung wird man ferner finden:

1 neues $\frac{2}{3}$ Stück n. d. Leipz. F.	=		23	Sgr.	4	Pf.
1 Dän. Reichsthlr. Species .	=	1 Thlr.	15	»	4,9	»
1 Franz. Frank	=		8	»	0,98	»
1 Engl. alte Krone	=	1 »	20	»		
1 Engl. neue Krone . . .	=	1 »	16	»	11,22	»
1 Hessen-Darmst. Kronenthaler	=	1 »	16	»	2	»
1 neuer Scudo der Lombardei	=	1 »	12	»		
1 Lübischer Speciesthaler . .	=	1 »	16	»	8	»
1 Nassauischer Kronenthaler .	=	1 »	16	»	2,57	»
1 Holl. Albertsthaler . . .	=	1 »	13	»	9,44	»
1 Poln. Gulden seit 1815 .	=		4	»	10,14	»
1 Portug. neuer Crusado . .	=		24	»	1,24	»
1 Russ. neuer Rubel . . .	=	1 »	2	»	3,6	»
1 Sard. neuer Scudo . . .	=	1 »	10	»	4,9	»
1 Schwed. neuer Speciesthaler	=	1 »	15	»	10	»
1 Schweiz. Frank	=		11	»	11,68	»
1 Sicil. neuer Ducato . . .	=	1 »	4	»	4	»
1 Span. Piaster	=	1 »	13	»	10,56	»
1 Toskan. Francescone . . .	=	1 »	15	»	3,45	»
1 Würtemb. Kronenthaler . .	=	1 »	15	»	11,66	»
1 Brasil. Piaster	=	1 »	13	»	4,96	»

Digitized by Google

1 Mexik. Piaster	= 1 Thlr.	13 Sgr.	10,56 Pf.
1 neue Sicca-Rupie in Calcutta	=	20 »	5,66 »
1 Nordamerik. Dollar . . .	= 1 »	13 »	2,5 »
1 Peso in Südamerika . . .	= 1 »	13 »	10,56 »

2. Welchen Werth in Preuß. Courant haben die in der 4ten Aufgabe voriger Nummer aufgeführten Goldmünzen, wenn ein Preuß. Frd'or $5\frac{2}{3}$ Thlr. Preuß. Cour. gilt?

Da 1 Frd'or = $5\frac{2}{3}$ Thlr., so sind $38{,}7692$ Frd'or = $38{,}7692 \cdot \frac{17}{3}$ Thlr., und weil $67{,}944$ Deutsche Dukaten gleich der vorstehenden Zahl Frd'or sind, so ist 1 Dukaten = $\frac{38{,}7692 \cdot 17}{67{,}944 \cdot 3}$ = 3 Thlr. 7 Sgr.

Es sind $45{,}194$ Baden. Ludwigd'or = $38{,}7692$ Frd'or; daher

1 Baden. Ludwigd'or :	1 Frd'or	= $38{,}7692 : 45{,}194$
1 Frd'or	: 1 Thlr. Pr. Cour.	= 17 : 3

1 Baden. Ludwigd'or : 1 Thlr. Pr. Cour. = 1647691 : 338955;
also 1 Baden. Ludwigd'or = 4 Thlr. 25 Sgr. 10 Pf. Pr. Cour.

	= 1 Baier. Karolin		
$31{,}135$	= $38{,}7692$ Pr. Frd'or		
1	= $5\frac{2}{3}$ Thlr. Pr. Cour.		
93 405	659 076,4	7 Thlr. 1 Sgr. 8,2 Pf. Pr. C.	= 1 Baier. Karol.

3. In Hamburg zahlt man für Franz., Span. und Deutsche Pistolen, zu welchen auch die Preuß. Frd'or gehören, das Stück zu 11 Mark 4 Schilling Banco; Berlin giebt für 300 Mark Hamb. Banco 151 Thlr.; wie viel in Preuß. Cour. beträgt demnach ein Frd'or? 1 Mark = 16 Schill.

1 Frd'or = $11\frac{1}{4}$ *m/B* Banco, 300 *m/B* = 151 Thlr., also würden $11\frac{1}{4}$ *m/B* so vielmal 151 Thlr. enthalten, als sie die 300 *m/B* in sich fassen; daher 1 Frd'or = $\frac{11\frac{1}{4}}{300} \cdot 151$ Thlr. = $\frac{3 \cdot 151}{80}$ = 5,6625 Thlr. = 5 Thlr. 19 Sgr. 10,5 Pf., also ist der Werth eines Frd'or nur um $1\frac{1}{2}$ Pf. geringer, unter welchem er bei uns kursirt.

4. Louisd'or und Frd'or kursiren in Leipzig gegen Species à $1\frac{1}{3}$ Thlr. zu 5 Thlr. und gewinnen $9\frac{1}{2}$ %. Wenn man nun weiß, daß Leipzig nach dem 20 Guldenfuß rechnet, und hierin $13\frac{1}{3}$ Thlr. eine Mark f. Silber betragen; welchen Werth hat ein Frd'or in Preuß. Cour.?

Nach dieser Annahme sind $13\frac{1}{3}$ Thlr. Sächsisch = 14 Thlr. Preuß.

Da ferner Friedrichd'or zu 5 Thlr. $9\frac{1}{2}$ % gewinnen, so heißt das: für 100 Thlr. in Frd'or giebt man $109\frac{1}{2}$ Thlr. im 20 Guldenfuß; hieraus ergeben sich folgende Proportionen:

1 Frd'or	: 1 Thlr. Frd'or	=	5	: 1	=	5 : 1
1 Thlr. Frd'or	: 1 Thlr. Cour.	=	109½	: 100	=	219 : 200
1 Thlr. Cour. Sächs.	: 1 Thlr. Cour. Pr.	=	14	: 13⅓	=	42 : 40

1 Frd'or : 1 Thlr. Pr. Cour. = 4599 : 800,

also 1 Frd'or = $\frac{4599}{800}$ = 5 Thlr. 22 Sgr. 5,$_{55}$ Pf.

In Leipzig stehen also die Frd'or in höherem Werthe als in Preußen.

Anmerk. In Geldgeschäften kommen Rechnungen nach Procenten vorzüglich häufig vor; daher wird es nothwendig sein, diese Rechnungsarten etwas genauer zu betrachten.

d) Rechnungen mit Procenten.

Agio. Damnum.

Der Werth gewisser Münzen ist entweder durch ein Landesgesetz oder durch eine herkömmliche allgemeine Annahme, durch ein allgemeines Uebereinkommen festgesetzt; dieser so bestimmte Werth kann aber im großen Verkehre, in Handelsgeschäften steigen oder fallen; das nun, um was mehr, als der festgesetzte Werth einer Münze, für dieselbe gezahlt wird, heiß allgemein das Agio, das aber, um was weniger, als der festgesetzte Werth derselben ist, gezahlt wird, ist ihr Verlust oder Damnum.

Daher kann man auch sagen: Agio ist der Ueberschuß des Preises einer Münze über ihren festgesetzten, ursprünglichen Werth; Verlust, Damnum ist der Ueberschuß des ursprünglichen, des festgesetzten Werthes einer Münze über ihren gegenwärtigen Preis. Denn im großen Verkehre werden Münzen jeder Art nur als Waare angesehen und behandelt, und nur in sofern unterscheiden sie sich von den übrigen Waaren, als sie überall Eingang finden, überall gebraucht und gesucht werden; während von den übrigen Waaren nur gewisse Gattungen an gewissen Orten und zu gewissen Zeiten eine häufige Nachfrage erfahren; eben so wie Höflichkeiten überall Eingang finden, Feinheiten, Witz, Grobheiten, Narrheiten und Albernheiten aber nur in gewissen Gesellschaften kursiren und Annahme finden, und zwar auch sehr häufig nur mit Berücksichtigung der Zeit.

Zur Erläuterung des Gesagten möge Folgendes dienen.

Der gesetzliche Werth der Friedrichd'or ist 5 Thlr.; da sie nun im Handel aber vortheilhafter zu gebrauchen sind, theils im Nachzählen oder Abwägen derselben, theils bei Geldversendungen, indem sie einen viel geringern Raum als Silbermünzen von demselben Betrage einnehmen, so werden sie diesen vorgezogen; daher steigen die Goldmünzen, wie jede gesuchte Waare, in ihrem Preise, und sind gegenwärtig von 5 Thlr. bis auf 5 Thlr. 20 Sgr. in ihrem Preise gestiegen; ist geringe Nachfrage nach ihnen, so fallen sie in ihrem Preise nach und nach auf 5 Thlr. 19½ Sgr., 5 Thlr. 19 Sgr., 5 Thlr. 18½ Sgr., ꝛc.

Digitized by Google

Das Geld nun, was man mehr als 5 Thlr. für Frd'or zahlt, ist also das Agio derselben.

Hat eine Münze an ihrem Gewichte, z. B. durch den Gebrauch, oder an ihrer Feinheit, durch schlechtere Ausmünzung als die Münzgesetze vorschreiben, einen Verlust erlitten, so wird im Verkehre weniger für sie gezahlt, als ihr gesetzlicher Werth ist, und dieses Weniger ist also ihr Verlust oder Damnum.

Z. B. Nelkenbrecher bemerkt, »daß es Mittel-Frd'or gebe, und zwar von den Jahren 1755, 56, 57 und 59; sie sind dicker als die guten, und zeigen an den abgeriebenen Stellen die, niedrigern Geldlegirungen eigenthümliche, mehr kupfrige Farbe; die guten Frd'or der Jahre 1755 und 56 haben in der Umschrift: Friedericus Borussorum Rex ein V, während die Mittel-Frd'or sämmtlich ein U, alle aber den Münzbuchstaben A führen. Die Münze zieht diese gegen Erstattung ihres Werthes von circa 3 Thlr. 29 Sgr. ein, und kursiren nur noch wenige.« Die sogenannten Mittel-Frd'or stehen also unter ihrem ursprünglichen Werthe um 5 Thlr. — 3 Thlr. 29 Sgr. = 1 Thlr. 1 Sgr.; dieser Ueberschuß der 5 Thlr. über 3 Thlr. 29 Sgr. oder 1 Thlr. 1 Sgr. ist also das Damnum eben gedachter Frd'or.

Ferner: Hamburg rechnet nach Mark zu 16 Schilling Banco und Courant. Das Courantgeld gebraucht man zu täglichen Ausgaben im gemeinen Leben, und schwankt, nach dem geringern oder größern Bedarf geprägter Münzen, zwischen 23 und 24 pCt., welches Courant schlechter als Banco ist, das heißt, was 100 Mark Banco an Werth betragen, dafür muß man 124 Mark Courant zahlen; daher sind 100 Mark Bco. = 124 Mark Cour.; also 1 Mark Cour. = $\frac{100}{124}$ = $\frac{25}{31}$ Mark Bco.; folglich gilt eine Mark Cour. $\frac{6}{31}$ Mark Bco. weniger als eine Mark Bco., und dieses ist das Damnum der Mark Courant, weil sie nicht mehr wie ursprünglich eine volle Mark gilt.

Im Allgemeinen kommt Agio beim Tausch der Münzen, Damnum bei dem des Papiergeldes vorzüglich vor. Nelkenbr. sagt bei Berlin: »Bei allen Fonds (Fundus der Grund oder Boden eines Dinges, z. B. auf dem ein Haus steht, ferner ein liegendes Gut, Grund und Boden, Acker, ein Landgut, daher das Franz. Fonds, ein Kapital, das zu einem gewissen Zwecke bestimmt ist; daher Papiere, welche auf Landgüter einen rechtskräftigen Anspruch gewähren ꝛc.) liegt die Zahl 100, nämlich 100 Thaler, 100 Gulden, 100 Pfund Sterling, 100 Rubel ꝛc. zum Grunde; diese verlieren gegen baares Geld oder tragen Agio, z. B. die Staatsschuldscheine sind in den Fonds-Zetteln mit 98¼ notirt, d. h. 100 Thlr. in Staatsschuldscheinen gelten nur 98¼ Thlr. in baarem Gelde, und dieses Weniger von 1¾ Thlr. ist ihr Damnum. Im Verfolg wird dieses noch deutlicher werden.

1. In Leipzig verlieren Preuß. Thaler 2 bis 2½ pCt. gegen Conventionsgeld; wie hoch steht daselbst ein Preuß. Thaler im Kurse?

Digitized by Google

Zuerst soll hier der Werth eines Preuß. Thalers in Thalern nach dem 20 Guldenfuße berechnet werden; darauf denselben nach pCt. in und auf 100.

Man weiß, daß $13\frac{1}{3}$ Thlr. Conv.-Geld $= 14$ Thlr. Preuß. Cour., also

1 Preuß. Thlr. $= \frac{13\frac{1}{3}}{14} = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}$ Thlr. Conv.-Geld.

$= 1$ Pr. Thlr.	$= 1$ Pr. Thlr.
$100 = 98$ Thlr. Conv.-Geld	$100 = 97\frac{1}{2}$ Thlr. Conv.-Geld
$100 \mid 98 \mid \frac{49}{50}$ Thlr.	$40 \mid 39 \mid \frac{39}{40}$ Thlr. Conv.-Geld.
$= 1$ Pr. Thlr.	$= 1$ Pr. Thlr.
$102 = 100$ Thlr. Conv.-Geld	$102\frac{1}{2} = 100$ Thlr. Conv.-Geld
$\frac{50}{51}$ Thlr. Conv.-Geld.	$\frac{40}{41}$ Thlr. Conv.-Geld.

Sucht man nun die Differenzen zwischen dem zuerst berechneten Werthe eines Pr. Thalers und der 4 andern Resultate, so findet man

a) $\frac{49}{50} - \frac{20}{21} = \frac{29}{1050} = 0{,}0276$ Thlr. Conv.-Geld;
b) $\frac{39}{40} - \frac{20}{21} = \frac{19}{840} = 0{,}0226$ " " "
c) $\frac{50}{51} - \frac{20}{21} = \frac{10}{357} = 0{,}0280$ " " "
d) $\frac{40}{41} - \frac{20}{21} = \frac{20}{861} = 0{,}0232$ " " "

Die letzte Differenz ist die kleinste und daher kommt die letzte Berechnung dem wahren Werthe am nächsten, und daher muß man bei Angabe des Verlustes einer Münze in pCt. nicht in, sondern auf 100 berechnen. Da aber ein Beispiel keine allgemeine Giltigkeit hat, so wollen wir mehrere und ganz verschiedene untersuchen.

2. Zu den Niederländ. Silbermünzen gehören auch Kronthaler zu 50 Stüver, nach dem Fuße der Albertsthaler ausgeprägt, welche circa $3\frac{3}{4}$ % besser als Courant gehalten werden. Es sind nun $9{,}592$ Kronthaler $=$ 14 Preuß. Thlr. $= 24{,}375$ Holl. Gulden zu 20 Stüver. Wie viele Gulden oder Stüver hat dem zufolge ein Kronthaler?

$$1 \text{ Kronthaler} = \frac{24{,}375 \cdot 20}{9{,}592} = 50{,}834 \text{ Stüver.}$$

$2\frac{1}{2}$ Fl. $= 1$ Thlr. Cour.; daher berechne man den Ueberschuß des Resultats über 50 Stüver oder einen Thaler Cour. in pCt., dieses letztere giebt:

$\frac{0{,}834 \cdot 100}{50} = 1{,}668$, welches nur etwa die Hälfte der pCt. nach der obigen Angabe ist.

3. Deutsche Pistolen werden in Braunschweig zu 5 Thlr. mit 9 pCt. Agio gegen Courantgeld berechnet; der Zahlwerth ist nämlich daselbst der Conventionsfuß, $13\frac{1}{3}$ Thlr. $= 1$ Mark f. S. Wie hoch stehen an diesem Orte die Frd'or nach Preuß. Courant im Kurse?

Digitized by Google

= 1 Frd'or
1 = 5 Thlr. Die Frd'or stehen hier also 1,675 Sgr.
100 = 109 Thlr. Conv. höher als in Preußen.
$13\frac{1}{3}$ = 14 Thlr.

400	2289	5 Thlr. 21,675 Sgr.

4. Wie viele Procent stehen Thaler Conventions-Courant höher als Thaler Preuß. Courant?

Da nach voriger Aufgabe $13\frac{1}{3}$ Thlr. Conv.-Cour. = 14 Preuß. Thlr., so ist 1 Thlr. Conv.-Cour. = $\frac{14}{13\frac{1}{3}} = \frac{21}{20}$ Pr. Thlr., also um $\frac{1}{20}$ Preuß. Thlr. mehr als 1 Pr. Thlr., und dieses giebt $\frac{1}{20} . 100 = 5\ \%$, oder 105 Pr. Thlr. = 100 Thlr. Conv.-Cour.

5. Früher wurde Preuß. Officieren ihr Sold halb in Gold und halb in Courant ausgezahlt. Wenn nun ein Kapitän jährlich 1200 Thlr. und zwar 600 Thr. in Gold und 600 Thlr. in Cour. erhielt; in welchem Falle hatte er mehr, und zwar wie viele Proc., wenn die 600 Thlr. in Gold der Frd'or zu 5 Thlr., oder in Gold der Dukaten zu $2\frac{1}{4}$ Thlr. gerechnet, ausgezahlt wurden?

Es sind $38\frac{10}{17}$ Frd'or = $68\frac{20}{47}$ Dukaten.

Wenn man die Zahlen der Frd'or und der Dukaten durch 13 . 47 multiplicirt, und diese Produkte durch 24 dividirt, so erhält man 987 Frd'or = 1742 Dukaten.

Da nun 1 Frd'or = 5 Thlr. Gold, so enthalten 600 Thlr. Gold 120 Frd'or: Es ist 1 Dukaten = $2\frac{1}{4}$ Thlr. Gold, also sind 600 Thlr. Gold = $\frac{600}{2\frac{1}{4}} = 218\frac{2}{11}$ Dukaten. Um nun diese beiden Resultate zu vergleichen, berechne man nach obigem Verhältnisse, wie viele Dukaten 120 Frd'or enthalten.

Es waren 987 Frd'or = 1742 Dukaten, daher 1 Frd'or = $\frac{1742}{987}$ Dukaten, also 120 Frd'or = $\frac{120 . 1742}{987} = 211\frac{61}{329}$ Dukaten. Daher werden im andern Falle $218\frac{2}{11} - 211\frac{61}{329} = 6\frac{360}{3619}$ Dukaten mehr als im ersten Falle gezahlt, und dieses beträgt $6\frac{360}{3619} : 211\frac{61}{329} = 0{,}03304$ Procent.

6. Nach einem Berliner Fonds-Zettel von 1832 stehen Papiere in folgendem Kurse: Preuß.-Engl. Anleihe von 1818 und 1822 tragen $2\frac{1}{4}\ \%$ Gewinn, Berliner Stadtobligationen $1\ \%$, Elbinger Stadtobligationen $1\frac{1}{2}\ \%$, Posensche Pfandbriefe $1\frac{1}{4}\ \%$, Ostpreuß. Pfandbriefe $\frac{1}{2}\ \%$, Pommersche Pfandbriefe $5\frac{1}{2}\ \%$, Kur- und Neumärkische $6\frac{1}{4}\ \%$, Schlesische $6\frac{1}{4}\ \%$ Gewinn.

A hat nun 2550 Liber Sterling zu $6\frac{3}{4}$ Thlr. Pr. Cour. Papiere der Preuß.-Engl. Anleihe von 1818;

B hat in Papieren der Preuß.-Engl. Anleihe von 1822 1550 Liv. Sterling à $6\frac{3}{4}$ Thlr. Pr. Cour.;

Digitized by Google

C hat 1840 Thlr. Cour. in Berl. Stadtobligationen;
D besitzt 2560 Thlr. Cour. in Elbinger Stadtobligationen;
E hat 2375 Thlr. in Posenschen Pfandbriefen;
F hat 3825 Thlr. in Ostpreuß. Pfandbriefen;
G besitzt 4125 Thlr. in Pommerschen Pfandbriefen;
H hat 5050 Thlr. in Kur- und Neumärkischen Pfandbriefen;
I hat 2725 Thlr. in Schlesischen Pfandbriefen, die sie alle zum angegebenen Kurse verkaufen; wie viel wird jeder an baarem Gelde in Preuß. Courant erhalten?

Wie schon oben bemerkt wurde, liegt allen Fonds die Zahl 100 zum Grunde, weil ihr Gewinn oder Verlust stets in Procenten ausgedrückt wird. Da nun die Preuß.-Engl. Anleihe von 1818 $2\frac{1}{4}$ % Gewinn trägt, so heißt das: 100 Lsterl. geben $2\frac{1}{4}$ Lsterl. Gewinn; A erhält also für jede 100 Lstrl., die er verkauft, $102\frac{1}{4}$ Lsterl. baar; folglich bekommt A für 2550 Lsterl. Papier $\frac{2550}{100} . 102\frac{1}{4}$ Lsterl. baar; und weil jedes Lsterl. in Papier den festen Kurs von $6\frac{3}{4}$ Thlr. Preuß. Courant hat, so empfängt A für seine Papiere $\frac{2550}{100} . 102\frac{1}{4} . 6\frac{3}{4}$ Thlr. = 17 599 Thlr. 23 Sgr. $5\frac{1}{4}$ Pf.
B erhält aus demselben Grunde $\frac{1550}{100} . 102\frac{1}{4} . 6\frac{3}{4}$ Thlr. = 10 072 Thlr. 27 Sgr. $2\frac{1}{4}$ Pf.
C erhält $\frac{1840}{100} . 101$ Thlr. = 1858 Thlr. 12 Sgr.
D empfängt $\frac{2560}{100} . 101\frac{1}{4}$ Thlr. = 2598 Thlr. 12 Sgr.
E bekommt $\frac{2375}{100} . 101\frac{3}{4}$ Thlr. = 2416 Thlr. 16 Sgr. $10\frac{1}{2}$ Pf.
F erhält $\frac{3825}{100} . 100\frac{1}{4}$ Thlr. = 3844 Thlr. $3\frac{1}{4}$ Sgr.
G erhält $\frac{4125}{100} . 105\frac{1}{2}$ Thlr. = 4351 Thlr. $26\frac{1}{2}$ Sgr.
H empfängt $\frac{5050}{100} . 106\frac{1}{4}$ Thlr. = 5365 Thlr. $18\frac{3}{4}$ Sgr.
I erhält $\frac{2725}{100} . 106\frac{3}{4}$ Thlr. = 2908 Thlr. 28 Sgr. $1\frac{1}{4}$ Pf.

Anmerk. Obligation kommt her von obligatio Verbindung, Verbindlichmachung, Verbindlichkeit, und dieses von obligare verbinden.

7. Nach obigem Fonds-Zettel verlieren: Preuß.-Engl. Anleihe von 1830 5 %, Kurmärkische Obligationen $1\frac{1}{2}$, Königsberger $1\frac{1}{4}$, Danziger $63\frac{1}{4}$, Westpreußische Pfandbriefe $\frac{1}{2}$, alte Coupons der Kur- und Neumark 36, Zinsscheine derselben Provinzen 35 %, von diesen Papieren hat im Besitze:

A 4550 Lsterl. zu $6\frac{3}{4}$ Thlr. Preuß. Cour.; B 850 Thlr. Kurmärkische Obligationen; C 8950 Thlr. Königsberger Stadtobligat.; D 12 850 Thlr. Danziger Stadtoblig.; E 3750 Thlr. Westpreuß. Pfandbriefe; F 1679 Thlr. alte Coupons der Kur- und Neumark; G 2025 Thlr. Zinsenscheine dieser Provinzen; alle Inhaber genannter Papiere sind genöthigt, zum angegebenen Kurse zu verkaufen; wie viel wird jeder baar empfangen?

Der Gewinn solcher Papiere wird auf, der Verlust in 100 berechnet; daher A, so oft er 100 zum Verkaufe giebt, eben so oft 100 weniger 5 oder nur 95 baar erhält; daher empfängt:

Digitized by Google

A $\frac{4550}{65}$. 95 Lsterl. = $\frac{4550}{100}$. 95 . $6\frac{3}{4}$ Thlr. = 29 176 Thlr. $26\frac{1}{4}$ Sgr.
B $\frac{850}{100}$. $98\frac{1}{4}$ Thlr. = 835 Thlr. $3\frac{3}{4}$ Sgr.
C $\frac{8950}{100}$. $98\frac{3}{4}$ » = 8838 » $3\frac{3}{4}$ »
D $\frac{12850}{100}$. $36\frac{3}{4}$ » = 4722 » $11\frac{1}{4}$ »
E $\frac{3750}{100}$. $99\frac{1}{2}$ » = 3731 » $7\frac{1}{2}$ »
F $\frac{1679}{100}$. 64 » = 1074 » 16 » $9\frac{3}{5}$ Pf.
G $\frac{2025}{100}$. 65 » = 1316 » $7\frac{1}{2}$ »

Anmerk. Coupons kommt vom Franz. Zeitworte couper schneiden, abschneiden her, nous coupons wir schneiden ab, coupons laßt uns abschneiden; coupons ist der Imperativ von abschneiden. Die Coupons sind nämlich auf demselben Papiere, auf welchem die Summe des Pfandbriefes, der Obligation ꝛc. steht, mit Angabe des Zinsfußes abgedruckt, und will man nun den Zins des Kapitals, im Pfandbriefe lautend, erhalten, so muß man den Schein der zu fordernden Zinsen, Coupons, abschneiden, und ihn der Bank oder Kasse zusenden, welche sie bezahlt.

8. Jemand verkauft 5400 Thlr. Papier gegen 5184 Thlr. baar; wie viele Procente Damnum standen die Papiere?

Der Verlust von 5400 Thlr. Papier ist also 5400 — 5184 = 216 Thlr. So viele Male nun 5400 Thlr. Papier 100 Thlr. Papier enthalten, eben so viele Male muß der Verlust von 5400 den Verlust von 100 Thlr. oder 216 Thlr. die gesuchten Procente in sich begreifen. Nun sind 5400 Thlr. = 54 . 100 Thlr., also müssen 216 Thlr. 54 mal die Procente fassen, also sind die Proc. = $\frac{216}{54}$ = 4; folglich standen jene Papiere zu 96 $\frac{0}{0}$ im Kurse, d. h. für 100 Thlr. in Papier zahlte man 96 Thlr. baar.

9. Wenn Jemand für 6000 Thlr. in Papier 5850 Thlr. baar erhält; wie viele Procente Verlust hatten die Papiere?

Da 6000 Thlr. in Papier 6000 — 5850 = 150 Thlr. verlieren, so werden 100 Thlr. in Papier wie viel verlieren? Oder

$$6000 : 100 = 150 : \text{pCt.} = \frac{100.150}{6000} = 2\frac{1}{2}.$$

Also verloren 100 Thlr. in Papier $2\frac{1}{2}$ Thlr., oder die Papiere standen $100 - 2\frac{1}{2} = 97\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$.

10. Es werden 3880 Thlr. in Papieren gegen 3977 Thlr. baar verkauft. Wie viele pCt. Gewinn standen die Papiere?

Der Gewinn von 3880 Thlr. in Papier 97 Thlr.; dieser muß also so vielmal die Proc. enthalten, als das Kapital 3880 Thlr. Papier 100 Thlr. Papier enthält. 3880 Thlr. enthält $\frac{3880}{100}$ mal 100 Thlr., also müssen die 97 Thlr. $\frac{3880}{100}$ mal die pCt. enthalten, daher sind die Proc. = $97 : \frac{3880}{100}$ = $\frac{97.100}{3880}$ = $2\frac{1}{2}$.

Anmerk. In dieser Rubrik sind folgende Aufgaben zu behandeln: 1) eine gegebene Summe A Geld verliert oder gewinnt nach Procenten p und giebt welchen Betrag B? aus A und p wird also B gesucht; 2) die gegebene Summe hat welche Procente gewonnen oder verloren, wenn sie den gegebenen Betrag B bringt? aus A und B wird p berechnet; 3) welche Summe A hat den gegebenen Betrag B erzeugt, indem sie die gegebenen Procente p gewann oder verlor? aus B und p

Digitized by Google

ist also A zu finden. Aufgaben der beiden ersten Arten sind bereits gewesen, nun müssen noch Aufgaben der dritten Art folgen.

11. Jemand hat eine Summe in Papieren mit 4 Proc. Gewinn für 2548 Thlr. baar verkauft; wie groß war die Summe in Papieren?

Es geben also 100 Thlr. in Papier 104 Thlr. baar; daher hat man so vielmal 100 Thlr. Papier, als man 104 Thlr. baar hat; folglich ist die Summe in Papier $= \frac{2548}{104} \cdot 100 = 2450$ Thlr. Papier.

12. Jemand ist genöthigt, eine Summe in Papier mit $3\frac{1}{4}\,\%$ Verlust für 8514 Thlr. baar zu verkaufen; welche Summe Papiergeld hat er verkauft?

Da 100 Thlr. Papier $3\frac{1}{4}$ Thlr. verlieren, so erhält man für 100 Thlr. Papier nur $100 - 3\frac{1}{4} = 96\frac{3}{4}$ Thlr.; so vielmal also die baaren 8514 Thlr. die baaren $96\frac{3}{4}$ Thlr., so vielmal muß die Summe Papiergeld 100 Thlr. Papier enthalten; daher ist die gesuchte Summe $= \frac{8514}{96\frac{3}{4}} \cdot 100 = 8800$ Thlr.

13. Man verkauft Oestreichische Metalliques (Wiener Obligationen zu 1 bis $5\,\%$ Zinsen, in Abschnitten zu 1000 Fl.) mit $1\frac{1}{2}$ Procent Verlust für 5253 Thlr. 10 Sgr. Wie viele Gulden in Papier hat man verkauft? Für diese Berechnungen ist der feste Kurs 150 Fl. in Wiener Münze $= 100$ Thlr. Preuß. Courant.

Es geben also 100 Fl. in Wiener Papier $100 - 1\frac{1}{2} = 98\frac{1}{2}$ Fl. Wiener Münze. Da nun 150 Fl. Wiener Münze $= 100$ Thlr. Pr. Cour., so sind die $98\frac{1}{2}$ Fl. W.M. $= \frac{98\frac{1}{2} \cdot 100}{150} = \frac{197}{3}$ Thlr. Pr. Cour.; folglich geben 100 Fl. Oestr. Metalliques $\frac{197}{3}$ Thlr. Preuß. Cour. So oft nun $5253\frac{1}{3}$ Thlr. Preuß. Cour. die $\frac{197}{3}$ Thlr. Preuß. Cour. enthalten, eben so vielmal muß die gesuchte Summe 100 Fl. Oestr. Metalliques enthalten; daher ist sie $= \frac{5253\frac{1}{3}}{\frac{197}{3}} \cdot 100 = 8000$ Fl. Metalliques.

14. Werden Oestreich. Metalliques mit $44\,\%$ Verlust für 6720 Thlr. Preuß. Cour. verkauft, und sind 150 Fl. Oestr. Münze $= 100$ Thlr. Pr. Cour., welche Summe Oestreichischer Gulden in Wiener Obligationen wurde verkauft?

Es sind 100 Fl. Oblig. $= 56$ Fl. M., und 150 Fl. M. $= 100$ Thlr. Pr. Cour., also 100 Fl. Oblig. $= \frac{56 \cdot 100}{150}$ Thlr.; daher die verkaufte Summe $= \frac{6720}{\frac{56 \cdot 2}{3}} \cdot 100 = 18\,000$ Fl. Wiener Obligationen.

15. Eine gewisse Summe Russischer Inscriptionen in Banconoten (B.N.) wird mit $51\frac{3}{4}\,\%$ Verlust für 9843 Thlr. verkauft. Welches ist die verkaufte Summe in Rubel B.N.? 100 Rubel Inscriptionen rechnet man als ein feststehendes Verhältniß für 85 Rubel B.N., und zahlt nun für 100 Rubel B.N. die in den Kurszetteln angegebene Summe.

Nach diesen Angaben muß man also zunächst berechnen, wie viel Preuß. Cour. 85 Rubel B.N. betragen.

Digitized by Google

Weil der Verlust $51\frac{3}{4}$ Proc. beträgt, so zahlt man also für 100 nur $100 - 51\frac{3}{4} = 48\frac{1}{4}$; d. h. für 100 Rubel B.N. zahlt man $48\frac{1}{4}$ Thlr. Pr. Cour. So oft nun 85 Rubel B.N. die 100 Rubel B.N. enthalten, so oft wird der ihnen gleiche Werth in Pr. Cour. die $48\frac{1}{4}$ Thlr. Pr. Cour. enthalten, also sind 85 Rubel B.N. $= \frac{85}{100} . 48\frac{1}{4}$ Thlr. Pr. Cour. $= 100$ Rubel Inscriptionen; endlich wird die gesuchte Summe so vielmal die 100 Rubel Inscriptionen, wie vielmal die gegebene Summe 9843 Thlr. Pr. Cour. die $\frac{85}{100} . 48\frac{1}{4}$ Thlr. Pr. Cour. enthält; dieses giebt $\frac{9843 . 100}{\frac{85}{100} . 48\frac{1}{4}} = 24\,000$ Rubel Inscriptionen.

Der Kettensatz zur Berechnung dieser Aufgabe ist folgender:

x Rubel Inscriptionen = 9843 Thlr. Pr. Cour.
$48\frac{1}{4}$ = 100 Rubel B.N.
85 = 100 » Inscriptionen

24 000 Rubel Inscriptionen = 9843 Thlr. Pr. Cour.

Anmerk. In Deutschland giebt es verschiedene Arten, den Kurs der Münzen auszudrücken; diese kann ich hier nicht berücksichtigen, weil nöthige Gegenstände schon, wider meine Absicht, den Raum zu weit ausdehnen, doch darf ich nicht die beiden Arten, welche in Berlin und in Königsberg und Danzig gebräuchlich sind, übergehen. Dieses soll der Gegenstand des Nachfolgenden sein.

16. Wenn in Königsberg oder Danzig Friedrichd'or im Kurse zu 168, $168\frac{1}{2}$, 169, $169\frac{1}{2}$, 170 Sgr. notirt sind; wie viele Procente beträgt ihr Agio?

Da der Werth der Frd'or nach dem Münzgesetze 5 Thlr. = 150 Sgr. beträgt, so ist ihr Agio, wenn sie 168 Sgr. stehen, $168 - 150 = 18$ Sgr. Um nun die Agio-Procente zu finden, muß man untersuchen, welcher Bruch die 18 Sgr. von 150 Sgr. sind, und denselben Bruch von 100 nehmen; dieses giebt $\frac{18}{150} . 100 = 12$; daher ist das Agio der Frd'or in diesem Falle 12 Procent.

Stehen Frd'or $168\frac{1}{2}$ Sgr. in K., so ist ihr Agio $= \frac{18\frac{1}{2}}{150} . 100 = 12\frac{1}{3}$ Procent.

Für 169 Sgr. ist das Agio der Frd'or $= \frac{19 . 100}{150} = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$ pCt.
» $169\frac{1}{2}$ » » » » » » $= \frac{19\frac{1}{2} . 100}{150} = \frac{39}{3} = 13$ »
» 170 » » » » » » $= \frac{20 . 100}{150} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ »

17. Berlin drückt das Agio der Münzen in Procent aus.

Wenn Frd'or $12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{4}$, $12\frac{3}{4}$, $13\frac{1}{4}$ in Berlin stehen, welchen Kurs müssen sie dann in Königsberg haben, oder welchen Werth haben sie dann in Courant?

Welcher Bruch die Procente von 100 sind, denselben Bruch müssen wir von dem Münzwerthe der Frd'or oder 150 Sgr. nehmen, und diesen zum

Digitized by Google

letzten Werthe hinzufügen. Nun sind $\frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$, daher der Werth der Frd'or $150 + \frac{150}{8} = 168\frac{3}{4}$ Sgr.

Oder man nehme $13\frac{1}{2}$ % von 150 und addire dieses zu 150; daher Frd'or $= 150 + \frac{150}{100} \cdot 13\frac{1}{2} = 170\frac{1}{4}$ Sgr.

Oder man nehme $100 + 12\frac{1}{4} = 112\frac{1}{4}$ % von $150 = \frac{150}{100} \cdot 112\frac{1}{4}$ $= 168\frac{3}{8}$ Sgr. $= 1$ Frd'or.

Oder $100 : 112\frac{3}{4} = 150 : 1$ Frd'or $= \frac{112\frac{3}{4} \cdot 150}{100} = 169\frac{1}{8}$ Sgr.

$100 : 113\frac{1}{4} = 150 : 1$ Frd'or $= \frac{113\frac{1}{4} \cdot 150}{100} = 169\frac{7}{8}$ Sgr.

18. Der gesetzliche Werth der Deutschen und Holländischen Dukaten ist im Preuß. Staate $2\frac{3}{4}$ Thlr. Wenn nun Dukaten in Königsberg 95, 96, 97, 98 Sgr. stehen; wie viele Procente muß ihr Agio in Berlin betragen?

$2\frac{3}{4}$ Thlr. $= \frac{11}{4} \cdot 30 = 82\frac{1}{2}$ Sgr., diese von ihrem Königsberger Kurse abgezogen, giebt ihr Agio $= 12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$ Sgr. Welcher Bruch nun das Agio von dem Werthe der Dukaten ist, denselben hat man von 100 zu nehmen, und dieses giebt $\frac{12\frac{1}{2}}{82\frac{1}{2}} \cdot 100 = 15\frac{5}{33}$ %, $\frac{13\frac{1}{2}}{82\frac{1}{2}} \cdot 100$ $= 16\frac{4}{11}$ %, $\frac{14\frac{1}{2}}{82\frac{1}{2}} \cdot 100 = 17\frac{19}{33}$ %, $\frac{15\frac{1}{2}}{82\frac{1}{2}} \cdot 100 = 18\frac{26}{33}$ %.

19. In Berlin stehen Dukaten $16\frac{1}{4}$, $16\frac{1}{2}$, $16\frac{3}{4}$, 17, $17\frac{1}{4}$, $17\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{4}$, 18 %, welches ist ihr Kurs in Königsberg oder ihr Werth in Cour.?

Man nehme die gegebenen pCt. von $82\frac{1}{2}$ Sgr. und addire dieselben zu $82\frac{1}{2}$ Sgr. oder man multiplicire $100 +$ pCt. mit $82\frac{1}{2}$ und dividire dieses Produkt durch 100; daher ist 1 Dukaten $= \frac{116\frac{1}{4} \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 96\frac{9}{80}$, $\frac{116\frac{1}{3} \cdot 82\frac{1}{2}}{100}$ $= 95\frac{39}{40}$, $\frac{116\frac{2}{3} \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 96\frac{1}{4}$, $\frac{117 \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 96\frac{21}{40}$, $\frac{117\frac{1}{3} \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 96\frac{4}{5}$, $\frac{117\frac{1}{2} \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 96\frac{15}{16}$, $\frac{117\frac{2}{3} \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 97\frac{3}{40}$, $\frac{118 \cdot 82\frac{1}{2}}{100} = 97\frac{7}{10}$ Sgr.

Anmerk. Hier könnten noch eine Menge sehr interessanter Aufgaben gegeben werden, besonders mit Zuziehung geometrischer und arithmetischer Verhältnisse, die vorzüglich geeignet sind, den Scharfsinn und das Nachdenken der Jugend zu erwecken und zu üben; doch der beabsichtigte Raum gestattet die Ausführung nicht; wer mehr darüber lesen will, der benutze das Werk: Grundriß der Elementar-Arithmetik und algebraisches Kopfrechnen von S. E. Baltrusch. Berlin 1836. Veit u. Comp.

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Die Zeitabschnitte.

A. Eintheilung der Zeitabschnitte.

Die Umdrehung der Erde um ihre Axe erzeugt die Zeitabschnitte, welche wir Tage nennen; die Bewegung der Erde um die Sonne bestimmt die viel viel längern Zeitabschnitte, welche Jahre heißen, und diese theilt noch der Lauf der Erde um die Sonne in Verbindung mit der Neigung ihrer Axe gegen ihre Bahn in Vierteljahre.

Der Umlauf des Mondes um die Erde, in 28 Tagen 14 Stunden, giebt uns die Zeitabschnitte, welche wir Monate nennen; seine Lichtgestalten haben unsere Monate in 4 Wochen zu 7 Tagen eingetheilt. Dieses sind die bekannten Zeitabschnitte, welche wir den Bewegungen der Erde und des Mondes verdanken. Alle übrigen Zeitabschnitte, welche wir im Gebrauche haben, sind nicht durch Naturerscheinungen, sondern durch unsere Willkür bedingt und eingeführt. Dieser zufolge theilen wir den Tag in 24 Stunden (man behauptet, die Erde drehe sich um ihre Axe in 23 Stunden 56 Minuten 4 Sekunden), die Stunden in 60′ (Minuten), die Minute in 60″ (Sekunden). Rechnungen nach größern als den genannten Zeitabschnitten sind die nach Cykeln und Aeren.

B. Von den Aeren und Cykeln.

Ein Cyklus ist eine bestimmte Zahl einzelner gleicher, auf einander folgender Zeitabschnitte, die, nach Verlauf des Cyklus, von Anfang an in derselben Folge auf einander gezählt werden.

Aera ist eine, ohne Unterbrechung, fortlaufende Zählung gleicher Zeitabschnitte, deren Anfang ein merkwürdiges Ereigniß bestimmt hat, das man durch den Anfang einer Zeitrechnung zum immerwährenden Andenken aufbewahren will.

Zunächst sollen die Aeren behandelt werden, und später das Wichtigste von den Cykeln.

Zur Kenntniß jeder Aere gehört also die Kenntniß ihres Anfangspunktes und der Länge ihrer Zeitabschnitte. Der Anfang einer Zeitrechnung wird auch Epoche genannt und die Länge der Zeitabschnitte sind entweder Sonnen- oder Monden-Jahren.

Der bekanntesten Aeren giebt es sieben: 1) die Christliche; 2) die Griechische; 3) die Römische; 4) die Jüdische; 5) die Nabonassarische; 6) die Seleucidische und 7) die Mohamedanische.

Unter allen Aeren ist die Christliche für uns die wichtigste, weil wir nach ihr rechnen; sie soll mit der Geburt Jesu Christi beginnen; also ist die Geburt Christi die Epoche unserer Zeitrechnung; die Länge der Zeitabschnitte

Digitized by Google

ist ein Sonnenjahr, oder richtiger ein Erdenjahr; denn die Benennung Sonnenjahr rührt aus der Zeit her, in welcher man noch glaubte, daß die Sonne sich um die feststehende Erde, als ihren Mittelpunkt, bewege. Nach den neuesten Berechnungen der ausgezeichnetesten Astronomen ist die Länge eines Erdenjahres = 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 50,8 Sekunden = 365 Tagen 5 St. 48′ 50,8″.

Unter den bekannten Völkern der Erde sollen die alten Aegypter die ersten gewesen sein, welche das Jahr zu ungefähr 365¼ Tagen rechneten; dieses ist aber im Vergleiche mit der wahren Länge eines Jahres zu groß, und daher mußte nach einer bedeutenden Reihe von Jahren die Zeitrechnung mit den Erscheinungen am Himmel nicht übereinstimmen, und diese Verschiedenheit war zur Zeit Julius Cäsar's so bedeutend, daß dieser in jeder Hinsicht ausgezeichnete Mann eine Aenderung in der Zeitrechnung vornahm.

Im Jahre 46 vor Christi Geburt (v. C.) übertrug J. Cäsar dem Astronomen Sosigenes die Verbesserung des Kalenders. Dieser, mit Hilfe des Marcus Fabius, und gewiß nicht auch ohne Mitwirkung des Urhebers der Verbesserung des Kalenders (denn ein so geistreicher, und mit seinem hellen Geiste Alles umfassender und durchdringender, äußerst thätiger Mann, wie Cäsar war, konnte nicht unthätig bei einer so wichtigen, vorzüglich den Geist beschäftigenden Unternehmung sein, er mußte sich durch eigene Rechnungen von der Wahrheit der Sache überzeugen), bewirkten die Verbesserung des Kalenders, welche für Jahrhunderte ausreichte. Cäsar verordnete nämlich, daß mit dem Jahre 46 v. C. das Jahr zu 365¼ Tagen so gerechnet werden sollte, daß nach 3 auf einander folgenden Jahren zu 365 Tagen ein Jahr von 366 Tagen folge. Ein solches Jahr, dem ein Tag mehr als den gemeinen Jahren zugefügt wird, heißt ein Schaltjahr.

1. Da die Länge des Julianischen Jahres (nach Julius Cäsar genannt) gleich 365¼ Tagen, die des wahren aber 365 Tage 5 Stunden 48′ 50,8″ beträgt: so ist das Julianische Jahr um wie viel länger als das wahre Jahr? 11′ 9,2″.

2. Die wahre Zeit wird nach wie vielen Jahren der Zeitrechnung nach Julianischen Jahren um einen Tag, um 10 Tage, 12 Tage und um 30 Tage vorgeeilt sein?

Da das Julianische Jahr um 11′ 9,2″ länger als das wirkliche ist, so eilt dieses jenem mit jedem Jahre um 11′ 9₂″ vor; soll nun das wirkliche Jahr dem Julianischen um einen Tag, 10, 12, 30 Tage vorgeeilt sein, so müssen so viele Jahre verlaufen, als 11′ 9,2″ in der Zeit von einem Tage, 10, 12, 30 Tagen enthalten sind. Nun ist 1 Tag = 24 . 60 . 60 = 86 400″; 10 Tage = 864 000″; 12 Tage = 1 036 800″; 30 Tage = 2 592 000″; daher sind zur Beantwortung der Fragen $\frac{86\,400}{669{,}2}$ = 129,109 Jahren, 1291,09 Jahre, 1549,3 Jahre, 3873,28 Jahre erforderlich.

Digitized by Google

3. Julius Cäsar führte im Jahre 46 v. C. den nach ihm benannten verbesserten Julianischen, im Jahre 1582 nach C. führte der Pabst Gregor XIII. den neuen nach ihm benannten Gregorianischen Kalender ein; in welcher Zwischenzeit folgten die verbesserten Kalender auf einander?

Rechnet man das 46ste Jahr v. C. nicht, so sind bis zur Geburt Christi 45 Jahre, und nach dieser bis zum Jahr 1582 n. C., das letzte Jahr nicht mitgerechnet, sind $45 + 1581 = 1626$ Jahre.

4. Da das Julianische Jahr um 11′ $9{,}^{2}$″ länger als das wirkliche Jahr ist, so war dieses um welche Zeit in 1626 Jahren, also zur Zeit Gregor's XIII., vorgeeilt?

Die gesuchte Zeit $= 1626 . (11′\ 9{,}^{2}″) =$ 12 Tagen 14 Stunden 15′ $29{,}^{2}$″.

5. Nach den neuesten Bestimmungen setzt man die Zeit des Umlaufes der Erde um die Sonne $= 365{,}_{242255}$ mittleren Sonnentagen; wie viele Tage, Stunden, Minuten und Sekunden beträgt dieses?

Es giebt also 365 Tage und noch $0{,}_{242255}$ eines Tages; da nun ein Tag $= 24$ Stunden, so ist der Bruch eines Tages $= 24 . 0{,}_{242255} = 5{,}_{81412}$ Stunden. Der Bruch einer Stunde $= 60 . 0{,}_{81412} = 48{,}_{8472}′$, und der Bruch einer Minute $= 60 . 0{,}_{8472} = 50{,}_{832}″$.

6. Die Aegypter und andere Völker des Alterthums rechneten das Jahr zu 12 Monaten oder 354 Tagen; welche Zeit rechneten sie für eine Umlaufszeit des Mondes?

Eine Umlaufszeit des Mondes $= \frac{354}{12} =$ 29 Tagen 22 Stunden.

7. Zu einer gewissen Zeit bemerkten die alten Aegypter, daß beim Austreten des Nils aus seinen Ufern der Sirius (Hundsstern) mit der Sonne zugleich aufgehe, nach 100 Jahren nahmen sie aber wahr, daß beim Austreten des Nils der Sirius 25 Tage später als die Sonne über den Horizont trete. Welche Länge mußten sie nun dem Jahre geben, wenn sie dasselbe vorher zu 365 Tagen gerechnet hatten.

Die alten Aegypter nahmen an, daß die Sonne mit den Sternen sich um die feststehende Erde bewege; da aber die Sterne einen regelmäßigern Lauf als die Sonne befolgten, so regulirten sie das Sonnenjahr nach dem Laufe der Sterne. Weil nun auf 100 Jahre 25 Tage mehr kamen, als sie rechneten, so mußte ihr Jahr von 365 Tagen ihnen um $\frac{25}{100}$ Tage zu klein vorkommen, daher setzten sie es auf $365\frac{1}{4}$ Tage.

8. Die alten Römer behielten die Aegyptische Rechnung der Jahre zu 365 Tagen, wodurch zu den Zeiten Cäsar's eine Verschiedenheit von 79 Tagen zwischen ihrer Rechnung und der Wirklichkeit stattfand. Setzt man die Länge des wirklichen Jahres $= 365{,}_{242255}$ Tagen, so mußten die Römer welche Zeit hindurch vor Cäsar gedachte Rechnung geführt haben?

$326{,}_{10266}$ Jahre.

Digitized by Google

9. Nimmt man an, daß die Stadt Rom im J. 753 v. Ch. erbaut, daß Cäsar den verbesserten Kalender im J. 46 v. Ch. einführte, seit wann nach Erbauung Roms und vor Ch. rechneten die Römer das Jahr zu 365 Tagen?

Mit Hülfe der vorigen Aufgabe findet man, daß sie erst 427 Jahre nach Erbauung Roms und 372 Jahre v. Ch. die alte Aegyptische Rechnung führten. Also über 400 Jahre brauchten sie Zeit, eine rohe Zeitrechnung zu begreifen.

10. Wie lange steht Rom im Jahre 1842 nach Christi Geburt?

2595 Jahre.

11. Nach Berechnungen des großen Französischen Mathematikers Laplace sollen die alten Aegypter den Sternbildern ihre Namen, die sie jetzt noch führen, um das Jahr 2783 v. Ch., nach Andern um das J. 2500 v. Ch. gegeben haben; wie lange sind also die Sternbilder im Jahr 1842 nicht namenlos?

Nach Laplace 4625, nach Andern 4342 Jahre.

12. Ein Menschenalter rechnet man zu 30 Jahren; wie viele Menschenalter sind auf die ersten sinnigen Aegypter, welche die Sternbilder zuerst benannten, bis auf unsere Tage des Jahres 1842 gefolgt?

Nach Laplace 154, nach Andern 144 Menschenalter.

13. Der Pabst Gregor XIII. brachte die Verbesserung des Julianischen Kalenders auf dem Concilium zu Trident in Anregung. Denn der Anfang des Frühlings fiel nicht mehr auf den 21. März, wie zu Cäsars Zeiten, sondern auf den 11. März. Der Pabst Gregor, mit Hülfe des Lilius, Clavius und Dante, bewirkte diese Verbesserung. Sie setzten fest, daß jedes vierte Jahr ein Schaltjahr von 366 Tagen und die drei vorhergehenden oder darauf folgenden gemeine Jahre von 365 Tagen sein sollten. Diese Verbesserung würde im Jahre 1582 vorgenommen, und die Verbesserer bestimmten ferner, daß das erste darauf folgende Schaltjahr das Jahr 1584 sein sollte. Hieraus geht hervor, daß jedes Jahr ein Schaltjahr ist, von dessen Jahrzahl die Einer und Zehner als eine einzige Zahl betrachtet, durch 4 ohne Rest theilbar sind. Also sind Schaltjahre 1844, 1848, 1852 ꝛc., denn 44, 48, 52 ꝛc. durch 4 dividirt, geben ohne Rest die Quotienten 11, 12, 13 ꝛc. 1842 ist aber kein Schaltjahr, denn 42 durch 4 dividirt, giebt zum Quotienten 10 und 2 zum Reste. Außerdem wurde von jenen Männern angeordnet, daß je 3 auf einander folgende Säcularjahre (Jahrhunderte) gemeine Jahre und nur das vierte Säcularjahr ein Schaltjahr und zwar dasjenige sein sollte, von dessen Jahrzahl die Hunderte und Tausende, als eine Zahl betrachtet, durch 4 dividirt, eine ganze

Digitized by Google

Zahl Hunderte gebe; folglich sind 1500, 1700, 1800 gemeine Jahre, denn $1500 : 4 = 3\frac{3}{4} . 100$, $1700 : 4 = 4\frac{1}{4} . 100$, $1800 : 4 = 4\frac{1}{2} . 100$. Aber 1600, 2000, 2400 ꝛc. sind solche Säkularjahre, die zugleich Schaltjahre sind. Denn $1600 : 4 = 4 . 100$ ꝛc.

Durch eine Bulle Gregors XIII. vom 24. Febr. 1582 wurde der verbesserte Julianische Kalender, der nun den Namen des Gregorianischen erhielt, sogleich in Italien, Spanien und Portugal, einige Monate später in Frankreich, 1583 in die Schweiz und die Niederlande, 1586 in Polen, 1587 in Ungarn eingeführt; 1699 nahmen ihn die protestantischen Deutschen, 1752 England, 1753 die Schweden an. Die Griechen und Russen haben noch bis auf den heutigen Tag den alten Julianischen Kalender. Dieser wird der alte und jener der Kalender neuen Styls genannt.

Kleine Verschiedenheiten zwischen dem Protestantischen und Katholischen Kalender sollen auf den Antrag Friedrichs II., Königs von Preußen, verschwunden sein. In der Dauer der Zeit mag dieses gelten, wohl aber nicht in der Anwendung. Denn das Heer der Festtage in den Katholischen Kalendern beweiset die schlechte Anwendung der edlen Zeit. Hätte man keine andere Nachricht von der Kultur der Griechen und Russen, als nur die von ihrem Kalender, so könnte diese schon allein genügen, ihren Kulturgrad zu beurtheilen. Wie lange ist jedes der genannten Länder im Gebrauche des Gregorianischen, wie groß ist die Dauer eines Jahres nach diesem Kalender und welches ist der Unterschied zwischen der Länge dieses Jahres und des durch die Astronomie bestimmten? Die genannten Jahre werden nicht, das Jahr 1842 wird mitgerechnet.

Den Gregorianischen Kalender gebrauchen: Italien, Spanien, Portugal und Frankreich 260, die Schweiz und die Niederlande 259; Polen 256; Ungarn 255; die protestantischen Deutschen 143; England 90; Schweden 89 Jahre.

Um die Dauer eines Gregorianischen Jahres zu finden, muß man 4 auf einander folgende Jahrhunderte nehmen; 3 dieser Jahrh. haben $\frac{100}{4} - 1 = 24$ Schaltjahre; das 4te hat $\frac{100}{4} = 25$ Schaltjahre, also haben die 4 Jahrh. $3 . 24 + 25 = 97$ Schaltjahren $= 97$ gemeinen Jahren und 97 Tagen; also 400 Jahre $= 400$ gemeinen Jahren $+ 97$ Tagen; daher ein Gregorianisches Jahr $= 365\frac{97}{400}$ Tagen $= 365{,}2425$ Tagen $= 365$ Tagen 5 St. 49′ 12″.

Das astronomische Jahr. $= 365{,}242255$ Tagen $= 365$ Tagen 5 St. 48′ $50{,}832$″; daher ist das Gregorianische Jahr um $0{,}000245$ Tage $= 21{,}168$″ länger als das astronomische.

14. Nach wie vielen Jahren wird das Gregorianische Jahr um einen Tag hinter dem astronomischen Jahre zurückbleiben? Siehe die vorige Aufgabe.

Digitized by Google

Da jedes Gregorian. Jahr $0{,}000245$ Tage länger als das astronom. währt, so bleibt jenes mit jedem Jahre um den genannten Bruch eines Tages hinter dem astronom. zurück, und daher hat die gefragte Zahl so viele Jahre als ein Tag den erwähnten Bruch eines Tages enthält, also

$$= \frac{1}{0{,}000245} = 4081{,}63 \text{ oder in } 4082 \text{ Jahren.}$$

Anmerk. Nach der Gregorianischen Zeitrechnung werden wir also im Jahre $(1582 + 4082) = 5664$ um einen Tag hinter dem astronomischen Jahre zurück sein; eine lange Dauer, und wir sind daher dem Verbesserer des Julianischen Kalenders großen Dank schuldig, der noch durch die große Einfachheit und Leichtigkeit der Zeitrechnung wächst. In der That, nicht der größte Mathematiker hätte etwas Einfacheres in dieser Hinsicht erdenken können, als jene Männer, Gregor und seine Gehilfen. Denn je einfacher und natürlicher eine erdachte Sache erscheint, ein desto größerer Scharfsinn hat sie erzeugt.

Die Jahre von 365 und 366 Tagen werden zum Unterschiede von dem astronomischen Jahre $= 365{,}242255$ Tagen die bürgerlichen Jahre genannt.

15. Mit dem Jahre 1842 sind wir um welche Zeit hinter dem astronomischen zurückgeblieben?

Da wir mit jedem Jahre um $0{,}000245$ Tage hinter dem astronomischen zurückbleiben, so sind wir in $1842 - 1582 = 260$ Jahren um $260 \cdot 0{,}000245$ Tage $= 3' 49{,}32''$ zurückgeblieben.

16. Die Epoche der Juden, d. h. der Anfang ihrer Zeitrechnung, ist die Erschaffung der Welt. Unser Jahr 1838 war das Jahr 5598 nach dem Jüdischen Kalender; welches Jahr nach dem Jüdischen Kalender muß das christliche Jahr 1842 sein? Das Jahr 5602.

17. Die Epoche der Mahomedanischen Aera heißt Hedschra (Hegira), d. h. Auswanderung, gewöhnlich setzt man dafür Flucht, nämlich die Flucht Mahomeds aus Mekka nach Jatreb, nach dieser Zeit Medina al Nabi, d. h. Prophetenstadt, genannt; nach unserer Zeitrechnung ereignete sie sich am 16. Juli 622 nach Chr. Wären die Mahomedanischen Jahre gleich den Christlichen, so müßte das Christliche Jahr 1842 das wie vielste Mahomedanische sein?

Nach der Annahme ist das Jahr 16. Juli 622 bis 16. Juli 623 das erste verflossene Mahom., also ist das Jahr 1842—622 das 1220ste Jahr der Mahomedaner.

18. Die Mahomedaner befolgen in ihrer Zeitrechnung einen Cyklus von 30 Jahren, unter welchen das 2te, 5te, 7te, 10te, 13te, 15te, 18te, 21ste, 24ste, 26ste und 29ste Schaltjahre von 355 Tagen, die übrigen gemeine von 354 Tagen sind. Wie lang ist ein Mahomedanisches Jahr im Durchschnitte?

Da in dem Cyklus von 30 Jahren 11 Jahre Schaltjahre zu 355 Tagen sind, so umfassen die Schaltjahre $11 \cdot 355 = 3905$ Tagen, und die $30 - 11 = 19$ gemeinen Jahren zu 354 Tagen $= 19 \cdot 354 =$

Digitized by Google

6726 Tagen, also ihr Cyklus einen Zeitraum von 3905 + 6726 = 10 631 Tagen; daher ein Mahomedanisches Jahr im Durchschnitt = $354\frac{11}{30}$ Tagen.

19. Ein Mahomedanisches Jahr besteht aus 12 Monaten, abwechselnd zu 30 und 29 Tagen. Das Christliche Jahr 1842 ist das wie vielste nach der Mahomedanischen Aera?

Seit dem 16. Juli 622 bis zum 16. Juli 1842 sind 1842 — 622 = 1220 Jahre verflossen, oder 1220 . 365,2425 Tage (12te Aufg.); dieses durch ein Mahom. Jahr = $354\frac{11}{30}$ Tagen dividirt, giebt 1257,4 Mahom. Jahre, folglich leben die Mahomedaner im fünften Decennium ihres 1258sten Jahres.

20. Man giebt an, daß 33 Mohamedanische Jahre gleich 32 Christlichen Jahren seien, und daß der Neujahrstag des Jahres 1246 der Hegira auf den 22. Juni 1830 nach Christl. Rechnung gefallen sei. In wie fern hat dieses seine Richtigkeit? Und auf welchen Tag unsers Jahres 1842 fällt der Mohamedanische Neujahrstag?

33 Mohamed. Jahre = $\frac{11}{30}$. 10 631 = 11 694,1 Tagen,
32 Christliche " = 32 . 365,2425 = 11 687,76 "
daher ist jene Periode um 6,34 Tage länger als diese; davon kommt auf ein Jahr weniger als $\frac{1}{4}$ Tag oder 3 Stunden, welches ein geringer Unterschied ist, folglich ist die Angabe in kleinen Zahlen ziemlich genau.

Da das Christliche Jahr 1842 das 1258ste Jahr der Hegira ist, so sind seit ihrer Rechnung volle 41 Cykeln und 27 Jahre verflossen, und leben daher im 28sten Jahre ihres 42sten Cyklus, welches ein gemeines Jahr von 354 Tagen ist.

Vom 22. Juni 1830 bis zum 22. Juni 1842 sind 12 Jahre, und zwar 9 gemeine und 3 Schaltjahre, also 12 gem. Jahre und 3 Tage.

Jedes gem. Christl. Jahr = 1 gem. Mahom. Jahre + 11 Tagen, also 12 gem. Christl. Jahre + 3 Tagen = 12 gem. Moham. Jahren + 135 Tagen.

Daher ein Jahr 1246 der Hegira ein Schaltjahr und zwar das 15te Jahr des 42sten Cyklus. Nach dieser Zeit sind noch 4 Schaltjahre verflossen; also ist jener Zeitraum 12 Moham. Jahre und 131 Tage.

Vom 28sten Jahre des 42sten Cyklus sind also erst 131 Tage bis zum 22. Juni 1842 verflossen; vom unserem Jahre aber bis dahin schon 172 Tage; davon 130 subtrahirt, läßt 42 Tage; daher fiel der Neujahrstag der Hegira ihres 1258sten Jahres auf den 11. Februar unseres 1842sten Jahres.

21. Die alten Griechen rechneten nach Olympiaden, jede zu 4 Jahren. Der Anfang der Rechnung nach Olympiaden wird verschieden angegeben; nach Petavius soll sie 777, nach

Digitized by Google

Calvisius 774, nach Gatterer und überhaupt den Neuern 776 v. Chr. begonnen haben. Die Olympischen Spiele, welche alle 4 Jahre zu Olympia, einem heiligen Orte in der alten Landschaft Elis im Peloponnes, jetzt Morea, 5 Tage hindurch durch allerlei Wettkämpfe, und später auch durch philosophische und andere Vorträge gefeiert wurden, eröffneten den Anfang jeder neuen Olympiade. Und man rechnete nach Olympiaden so, daß man die Zahl der Olympiade und des Jahres derselben angab. Z. B. Alexanders Tod wird Ol. 114, 1. bestimmt, d. h. es sind 113 Olympiaden seit der Zeitrechnung nach denselben bereits völlig verflossen und im ersten Jahre der 114 Olympiade erfolgte der Tod dieses Macedonischen Königs. Die Olympischen Spiele sollen am 11ten des Monats Hekatombäon, welcher mit unserem Juli ungefähr übereinkommt, begonnen haben.

Auf welches Jahr der Christl. Zeitrechnung fällt Alexanders Tod, die Schlacht bei Mantinea, Ol. 104, 2., die Erbauung Roms, Ol. 6, 3., wenn wir den Anfang der Olympiaden-Rechnung 776 v. Ch. annehmen?

Man wird also zunächst die Zahl der völlig verlaufenen Olympiaden suchen, indem man eine von der gegebenen Zahl hinwegläßt, das giebt in unsern Beispielen 113, 103, 5 Olympiaden; darauf diese Anzahl mit 4 multiplicirt, also $4.113 = 452$, $4.103 = 412$, $4.5 = 20$ Jahren, und zu diesem Produkte die Zahl der Jahre, welche bei den Olympiaden steht, addirt, also 453, 414, 22, so erhält man die Zahl der Jahre, welche seit dem Anfange der Rechnung nach Olympiaden verflossen sind (das letzte Jahr ist eigentlich noch nicht verflossen, sondern ist noch im Laufe); diese von 776 subtrahirt, giebt die Zahl der Jahre vor Christo; also Alexanders Tod $= 776 - 453 = 323$ Jahre v. Ch.; die Schlacht bei Mantinea $= 776 - 414 = 362$ v. Ch.; die Erbauung Roms $= 776 - 23 = 753$ v. Ch.

22. Die Schlacht bei Salamis fiel im Septbr. 480 vor; Jesus Christus starb 33 Jahre alt um Ostern, unser Pfingstfest des Jahres 1842 fällt auf den 15. Mai; auf welches Jahr der wie vielsten Olympiade haben sich diese Begebnisse ereignet?

Ist die gegebene Zeit nach Christl. Rechnung vor Ch., so muß man sie von 776 subtrahiren, im entgegengesetzten Falle addiren. Ferner hat man darauf zu sehen, ob der Monat nach unserer Rechnung vor oder nach dem Monat Juli ist. Im ersten Falle gehört er zu einem laufenden Jahre der Olympiade, im andern ist er ein darauf folgendes Jahr. Den Rest oder die Summe der Jahre wird man dann durch 4 dividiren, so erhält man die Zahl der völlig verflossenen Olympiaden, der Rest ist die Zahl der Jahre der laufenden Olympiade. Dieses nun auf unsere Beispiele angewandt.

Digitized by Google

776 — 480 = 296 Jahre; da aber die Schlacht bei Salamis im Septbr. vorfiel, so ist dieser Monat in einem folgenden Jahre der Olympiaden, also muß man 297 Jahre in Olympiaden rechnen, daher dieses durch 4 dividirt, zeigt an, daß die Schlacht im ersten Jahre der 75sten Olympiade geschlagen wurde, oder 75. Ol., 1.

776 + 33 = 809; da der Tod vor dem Juli eintritt, so hat man jene Zahl nicht zu vermehren; dieses durch 4 dividirt, giebt 202 völlig verflossene Olympiaden und 1 Jahr, also Christi Tod Ol. 203, 1.

776 + 1842 = 2618, Mai ist vor Juli, daher stimmen unsere Jahre mit den Griechischen; durch 4 dividirt, giebt unser Pfingstfest am 15. Mai 1842 = 655. Ol., 2.

23. Die Epoche der Römer war die Erbauung ihrer Stadt Roma, welche entweder in das Jahr 754 oder 753 oder 752 v. Ch. fällt; die Neuern nehmen das Jahr 753 v. Ch. Die Römer zählten nun die Jahre vor oder nach Roms Erbauung, je nachdem eine Begebenheit vor oder nach Erbauung derselben sich zutrug. Die Schlacht bei Actium fiel im Jahr 31 v. Ch. vor, also wann in Bezug auf die Erbauung Roms?

753 — 31 = 722 nach Erb. Roms.

Lykurgus soll 884 v. Ch. die Verfassung der Spartaner gegründet haben, also wann in Bezug auf die Stadt Rom?

884 — 753 = 131 Jahre v. Roms Erb.

Der Trojanische Krieg soll 1084 v. Ch. beendigt sein; nimmt man ferner an, daß Aeneas mit seinen Gefährten 3 Jahre hindurch an den Küsten Kleinasiens, auf den Inseln des Aegeischen Meeres und an den Küsten Afrikas umhergeirrt sei, wann landete er also in Latium oder in der Nähe davon in Bezug auf Roms Erbauung?

1081 — 753 = 328 Jahre v. Roms Erb.

24. Eine andere Zeitrechnung ist die Aera Nabonassarea, nach welcher auch Ptolemäus rechnet. Sie wurde seit Zerstörung aller geschichtlichen Denkmäler in Babylon gerechnet, und man setzt ihren Anfang auf den 26. Febr. 746 v. Ch.

Wie lange ist es her seit der unsinnigen Zerstörung bis 1842 den 12. Mai?

Vor Christo sind völlig verflossen	745	Jahre	1 Monat	26 Tage,
Nach " " "	1841	"	4 "	12 "
Summa	2586	Tage	5 Monat	38 Tage.

Die 38 Tage enthalten den 6ten Monat des Jahres, also den Juni, dieser hat 30 Tage; daher ist der gesuchte Zeitraum 2586 Jahre 6 Monate 8 Tage.

Digitized by Google

25. Die Seleucidische Aera, Aera Seleucidarum, soll seit dem Siege des Seleucus über Demetrius Poliorketes bei Babylon, seit 312 v. Ch., mit dem 12 Jahre nach Alexanders Tode in Gebrauch sein. Nach der Seleucidischen Aera sollen die Chaldäer, Syrer, Perser und Aegypter rechnen. Jener Sieg soll am 30. Oktbr. 312 v. Ch. erkämpft sein; wie lange ist das her bis zur Schlacht bei Leipzig, den 19. Oktbr. 1813?

Vor Christo völlig verflossen	311	Jahre	9	Monate	30 Tage
Nach » » »	1812	»	9	«	19 »
	2124	Jahre	6	Monate	49 Tage.

In den 49 Tagen ist noch der 7te Monat, also der Juli enthalten; daher sind 2124 Jahre 7 Monate 18 Tage verflossen.

26. Die Revolution von 1789 verwarf den alten Kalender und führte in Frankreich einen andern ein. Da manche geschichtlichen Werke, welche Begebenheiten jener unruhigen und stürmischen Zeiten behandeln, noch Angaben nach dem Neufranzösischen Kalender enthalten, so wird es nicht zwecklos sein, gedachten Kalender etwas zu erläutern. Der neue Kalender wurde durch ein Decret vom 24. Nov. 1793 des Nationalconvents in Frankreich eingeführt. Die neue Jahrrechnung nahm ihren Anfang mit der Herbstnachtgleiche des Jahres 1792, nämlich mit dem 22. Septbr. 9 Uhr 18′ 30″ Vormittags nach dem Meridian der Pariser Sternwarte. Das Jahr wurde zu 12 Monaten, jeder zu 30 Tagen festgesetzt. Da aber 12 Monate zu 30 Tagen nur = 360 Tagen sind, und also dem gemeinen Jahre noch 5 und dem Schaltjahre 6 Tage fehlten, so wurden diese fehlenden Tage den 12 Monaten zur Ergänzung des vollen Jahres angehängt, und zwar so, daß das 4te Jahr, wie im Gregorianischen Kalender, ein Schaltjahr sein sollte (Franciade). Jeder Monat wurde in 3 gleiche Theile, jeder zu 10 Tagen eingetheilt, und diese Zeitabschnitte hießen Decaden. Den Herbst vom 22. Septbr. bis zum 22. Decbr. enthielt folgende 3 Monate: Vendémiaire, Weinlesemonat (Oktbr.), Brumaire, Nebelmonat (Nov.), und Frimaire, Reifmonat (Decbr.); — der Winter vom 22. Decbr. bis zum 22. März: Nivôse, Schneemonat (Januar), Ventôse, Windmonat (Febr.) und Pluviôse, Regenmonat (März); — der Frühling vom 22. März bis zum 22 Juni: Germinal, Keimmonat (April), Florial, Blüthenmonat (Mai) und Prairial, Wiesenmonat (Juni), der Sommer vom 22. Juni bis zum 22. Septbr.: Messidor, Erntemonat (Juli), Thermidor, Hitzemonat (August) und Fructidor, Fruchtmonat (Septbr.). Die Tage einer Decade hatten folgende Namen: Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi und Decadi.

Napoleon hob diesen Republikanischen Kalender durch ein Decret vom 9. Septbr. 1805 auf und führte wieder den Gregorianischen ein. Wie lange bestand also der Republikanische Kalender? Beinahe 13 Jahre.

Digitized by Google

27. Ein Jahr enthält wie viele Wochen und Tage?

Ein gemeines Jahr von 365 Tagen = 52 Wochen und 1 Tag.
Ein Schaltjahr » 366 » = 52 » » 2 Tage.

28. Nach wie vielen Jahren fallen dieselben Wochentage auf dieselben Tage des Jahres?

Wenn die Jahre alle von gleicher Länge wären, d. h. gleich viele Tage, entweder alle 365 oder 366 enthielten, so würde die Wiederkehr derselben Wochentage auf dieselben Tage des Jahres nach einer Reihe von 7 Jahren eintreten; da aber alle 4 Jahre ein Schaltjahr ist, so muß die Zahl der Tage einer solchen Periode nicht allein durch 7, sondern auch durch 4, also durch 28 ohne Rest theilbar sein. Daher müssen in jedem Falle nach einer Periode von 28 Jahren dieselben Wochentage mit denselben Tagen des Jahres zusammenfallen. Z. B.

Das Jahr 1842 fing mit Sonnabend an; der 7te Tag, der auf den Sonnabend folgt, ist Freitag; daher muß auch der letzte Tag in einer Reihe von 2, 3, 4, 5 ꝛc. 52 Wochen auch ein Freitag sein. Hieraus ergiebt sich der allgemeine Satz: Der letzte Tag in einem Vielfachen von 7 Tagen ist derjenige Wochentag, der demjenigen vorangeht, mit welchem das Vielfache anfing.

Da nun das Jahr 1842 ein gemeines Jahr ist, so hat es 52 Wochen und einen Tag; der letzte Tag in den 52 Wochen ist also ein Freitag, folglich der letzte dieses Jahres ein Sonnabend; daher ist der Neujahrstag des Jahres 1843 ein Sonntag. Wie vorher schließt man nun wieder, daß der letzte Tag dieses Jahres wieder ein Sonntag, und daher der erste Tag des Jahres 1844 ein Montag ist. Dieses Jahr ist nun ein Schaltjahr, daher hat es 52 Wochen und 2 Tage; der letzte Tag in den 52 Wochen ist also der vorhergehende des Neujahrstages, also ein Sonntag, folglich der letzte Tag des Jahres 1844 ein Dienstag und der erste Januar des Jahres 1845 ein Mittwoch. Aus dieser Auseinandersetzung folgt der allgemeine Satz:

Jedes Jahr, das auf ein gemeines Jahr folgt, macht seinen Anfang mit demjenigen Tage, der in einer Woche auf den Tag folgt, mit welchem das vorhergehende Jahr seinen Lauf begonnen hat. Oder: Jedes Jahr, welches auf ein gemeines Jahr folgt, rückt seinen Neujahrstag um einen Tag weiter in der Woche, als das vorhergehende Jahr. Und jedes Jahr, welches auf ein Schaltjahr folgt, rückt seinen Neujahrstag um 2 Tage weiter in der Woche, als das vorhergehende Jahr.

Die beiden vorstehenden Sätze gelten aber nicht allein von den Neujahrstagen, sondern von allen übrigen Tagen des Jahres. Denn fangen

Digitized by Google

zwei Jahre mit demselben Wochentage an, so müssen auch die übrigen, vom Anfange der Jahre gleich weit abstehenden Tage gleichnamige Tage der Woche sein. Ferner: Wenn die Neujahrstage zweier Jahre auf einander folgende Tage einer Woche sind, so müssen auch je zwei von den übrigen Tagen, die vom Anfange der Jahre gleichweit abstehen, dieselben auf einander folgenden Tage einer Woche sein. Endlich: Wenn zwischen den Neujahrstagen zweier Jahre ein Wochentag liegt, so muß derselbe Wochentag zwischen je zwei gleichvielsten Tagen dieser Jahre liegen.

Je klarer man diese und die vorhergehenden Sätze auffaßt, desto verständlicher wird das Nachfolgende sein.

In einer Periode von 4 . 7 oder 28 Jahren giebt es 7 Schalt- und 21 gemeine Jahre; da nun jedes Jahr 52 Wochen, das gemeine Jahr einen Tag und das Schaltjahr 2 Tage mehr enthält, so haben 28 Jahre 28 . 52 Wochen und 21 + 14 oder noch 35 Tage, welche 5 Wochen betragen; daher umfassen 28 Jahre 28 . 52 + 5 Wochen. Folglich muß jede Periode von 28 Jahren mit demselben Wochentage anfangen.

29. Der 15. Mai des Jahres 1842 ist ein Sonntag; welcher Wochentag wird der 10. Septbr. desselben Jahres sein?

Vom 15. Mai bis zum 1. Juni sind 17 Tage mit Einschluß des 15. Mai; Juni, Juli, August haben 30, 31, 31 Tage, dieses sind zusammen bis zum 1. Septbr. 109 Tage; dazu noch 10 Tage des Septbr., dieses macht 119 Tage; diese enthalten 17 Wochen; der erste Tag der 17ten Woche muß ein Sonntag sein, daher ist der 10. Septbr. 1842 ein Sonnabend.

Welcher Wochentag wird der 15. Oktbr. des Jahres 1842 sein, da der 13. Mai d. J. ein Freitag ist?

Mit Einschluß des 13. und 31. Mai's sind von diesem Monate 19 Tage. Juni, Juli, August, Septbr. bis zum 15. Oktbr. sind zusammen 19 + 30 + 31 + 31 + 30 + 15 = 156 Tagen = 22 Wochen 2 Tage; die 23ste Woche muß wieder mit einem Freitage anfangen, daher ist der 15. Oktbr. ein Sonnabend.

30. Der erste Januar des Jahres 1900 wird welcher Wochentag sein, da der 15. Mai 1842 ein Sonntag ist?

Mit Einschluß des 15. Mai sind bis Ende dieses Jahres noch 231 Tage = 33 Wochen, also ist der erste Tag der 33sten Woche ein Sonntag, daher der 31. Decbr. ein Sonnabend, folglich der 1. Januar 1843 ein Sonntag.

Von Ende 1842 bis Ende 1899 sind 57 Jahre = 2 Cykeln zu 28 Jahren + 1 Jahr; daher muß nach dem Vorigen das Jahr 1899 mit

Digitized by Google

einem Sonntage anfangen, weil solches das erste Jahr von einem der Cykeln that; und da nun 1899 ein gemeines Jahr ist, so fängt das darauf folgende Jahr 1900 mit einem Wochentage später an, also mit einem Montage.

31. Nach Berechnungen der Astronomen nimmt die Schiefe der Ekliptik in 100 Jahren um $48{,}368''$ ab, und wird ihren kleinsten Werth im Jahre 6600 erreicht haben, da sie dann $22° 54'$ sein wird. Gegenwärtig ist die Schiefe der Ekliptik $= 23° 27' 56''$. Es ist nun die Frage: Wird nach den Angaben die Schiefe der Ekliptik wirklich die bemerkte Kleinheit haben, und mit welchem Wochentage wird das Jahr 6600 seinen Anfang machen?

$6600 - 1842 = 4758$ Jahre; daher nimmt die Schiefe der Ekliptik in dieser Zeit um $\frac{4758 \cdot 48{,}368}{100} = 2301{,}34944'' = 38' 21{,}34944''$ und diese von der gegenwärtigen Schiefe der Ekliptik hinweggenommen, läßt $22° 49' 34{,}65056''$, also weniger als nach der Angabe; daraus folgt, daß die Schiefe der Ekliptik nur in der kurzen Zeit von 100 Jahren regelmäßig abnimmt, in einem längern Zeitraume aber einem andern Gesetze in ihrer Abnahme folgt.

Untersucht man nun, wie viele Cykeln zu 28 Jahren der Zeitraum von 4758 Jahren enthält, so findet man 169 Cykeln zu 28 Jahren und noch 26 Jahre. Da das Jahr 1843 als das erste des ersten Cyklus mit einem Sonntage anfängt, so muß jedes erste Jahr aller nachfolgenden Cykeln mit einem Sonntage, also auch das erste Jahr des 170sten Cykels mit einem solchen anfangen. Da das Jasr 1843 ein gemeines Jahr und das darauf folgende ein Schaltjahr ist, so muß auch das erste Jahr des 170sten Cykels ein gemeines und das darauf folgende ein Schaltjahr sein. Daher sind in dem obigen Reste von 26 Jahren 6 Schalt- und 20 gemeine Jahre; daher enthalten die 26 Jahre $26 \cdot 52$ Wochen $+ 20 + 12$ Tage.

Von 1800 bis 6600 sind 48 Jahrhunderte; diese enthalten $12 \cdot 4$ Jahrhunderte, also sind in den 48 Jahrhunderten 12 gemeine Jahre; diese wurden aber oben als Schaltjahre gerechnet, daher sind 12 Tage zu viel im Resultate, und davon die 12 Tage hinweggenommen, läßt von den 26 Jahren $26 \cdot 52$ Wochen $+ 20$ Tagen. Da nun das erste Jahr dieser 26 Jahre mit einem Sonntage anfängt, so muß auch der erste von den letzten 20 Tagen ein Sonntag, also auch der darauf folgende 22ste Tag ein Sonntag sein, folglich ist der 20ste Tag ein Freitag. Das Jahr 6600 hat also mit einem Freitage geschlossen, und da es ein Schaltjahr ist, so hat es 52 Wochen 2 Tage, folglich wird es mit einem Donnerstage anfangen (siehe die folgende Anmerkung).

Digitized by Google

Aus dieser Darstellung wird es klar geworden sein, wie man den Wochentag eines jeden gegebenen Tages von einem beliebigen Jahre in der Zukunft finden kann.

Nun bleibt noch zu untersuchen übrig, wie man den Wochentag von einem gegebenen Tage eines beliebigen Jahres der Vergangenheit finden könne. Dieses wird aber schon zum Theil aus dem Obigen erhellen; indem man dort vorwärts schloß, wird man hier rückwärts zu schließen haben. Denn weiß ich z. B., daß dieses Jahr mit einem Sonnabende anfing, so muß das vorhergehende Jahr, da es ein gemeines Jahr war, mit einem Tage früher in der Woche, also mit einem Freitage angefangen haben. Daher der allgemeine Satz: Ein gemeines Jahr fängt mit einem Tage, ein Schaltjahr mit 2 Tagen einer Woche früher als das darauf folgende Jahr seinen Neujahrstag an.

32. Die Schlacht bei Mantinea, in welcher Epaminondas unbesiegt fiel, wurde am 27. Juni 362 v. Ch. gekämpft; welcher Wochentag war derselbe?

In der Auflösung dieser Aufgabe muß man, wie in der vorigen, eine Einschaltung und eine Auslassung in derselben berücksichtigen.

Man kann das Jahr 1842 entweder mit in Rechnung ziehen, oder es aus derselben lassen, ich ziehe es in Rechnung, ebenso das Jahr 362 v. Ch., und dadurch erhalte ich einen Zeitraum von $362 + 1842 = 2204$ Jahren $= 78$ Cykeln zu 28 Jahren $+ 20$ Jahren.

Da 8 Jahre an einer vollen Zahl Cykeln fehlen, so gehe man noch 8 Jahre rückwärts und nehme das Jahr 270 v. Ch., so umfaßt dieser Zeitraum 2212 Jahre $= 79$ Cykeln zu 28 Jahren. Da nun in dieser Reihe Cykeln das Jahr 1843 das erste des 80sten Cyklus ist und mit einem Sonntage, wie aus Vorstehendem erhellt, anfängt, so muß auch das erste Jahr des ersten Cyklus, d. h. das Jahr 270 v. Ch. mit einem Sonntage begonnen haben.

Nun sind 8 Jahre $= 8 . 52$ Wochen $+ 10$ Tagen, also hat das 8te Jahr in dieser Reihe mit einem Dienstage geschlossen und daher das Jahr 362, da es ein gemeines und auch das vorhergehende 361 ein gemeines ist, mit einem Mittwoch angefangen. Nun zähle man die Tage vom 1. Januar bis zum 27. Juni incl., so erhält man 178 Tage $= 25$ Wochen 3 Tagen, also ist der erste dieser 3 Tage ein Mittwoch, folglich der letzte oder der 27. Juni 362 v. Ch. ein Freitag.

Anmerk. Zur Berichtigung der 31sten Aufgabe muß ich noch etwas bemerken. In der 14ten Aufgabe haben wir berechnet, daß das astronomische Jahr dem Gregorianischen in 4082 Jahren um einen Tag vorgeeilt, das Gregor. also um einen Tag zurück ist, demselben daher ein Tag zugelegt werden müsse, wenn es mit dem astronomischen gleichen Schritt halten solle; dieses habe ich in der 31sten Aufgabe nicht berücksichtigt, deshalb hole ich es hier nach, und es wird daher das

Digitized by Google

Jahr 6600 nicht mit einem Donnerstage, sondern mit einem um einen Tag spätern Tage, also mit einem Freitage anfangen.

Die Berechnung der Wochentage für jeden Tag eines beliebigen Jahres schließe ich mit der letzten Aufgabe und bemerke nur noch, daß diese Aufgaben eine vielfältige Uebung fordern und überdies das Nachdenken in einem hohen Grade schärfen; daher sind viele dahin gehörigen Aufgaben zu rechnen.

33. Von jeder Periode kann entweder der Anfang oder das Ende derselben oder ihre Dauer gegeben sein; aus 2 gegebenen Stücken dieser drei, kann man das dritte nicht gegebene berechnen. Die Kombination dieser 3 Stücke liefert folgende 3 Aufgaben: 1) Aus dem gegebenen Anfange und Ende einer Periode ihre Dauer zu berechnen; 2) aus dem gegebenen Anfange und der Dauer einer Periode ihr Ende zu finden; und 3) aus der gegebenen Dauer und dem Ende einer Periode ihren Anfang zu suchen.

Bei diesen Berechnungen muß man sich merken, daß größere Abschnitte der Zeit: Tage, Monate, Jahre, mit ihrem Anfange; kleinere: Stunden, Minuten, Sekunden, mit ihrem Ende gezählt werden. Z. B. 1842 den 13. Mai, Morgens 8 Uhr 9 Minuten 18 Sekunden in Jahre ꝛc., seit Ch. aufgelöset, giebt als völlig verflossene Zeit 1841 Jahre 4 Monate 12 Tage 8 St. 9′ 18″.

34. Wir wollen annehmen, daß der Halleysche Komet 1835 den 24. Juni Abends 11 Uhr 48′ 54″ von einem Astronomen bei einem Fixsterne A und 1759 den 18. August, Morgens 2 Uhr 52′ 36″ bei einem Fixsterne B von Halley beobachtet sei; wie groß ist die Zwischenzeit beider Beobachtungen?

Die erste Beobachtung hat die seit Christi Geburt verflossene Zeit von
1834 Jahren 5 Monaten 23 Tagen 11 St. 48′ 54″
die zweite von 1758 „ 6 „ 17 „ 2 „ 52′ 36″
Zwischenzeit = 75 Jahren 11 Monaten 6 Tagen 8 St. 56′ 18″

36. Aus vielen Beobachtungen eines Kometen hat man seine Umlaufszeit um die Sonne auf 58 Jahre 9 Monate 17 Tage 17 St. 53′ 55″ berechnet; das letzte Mal beobachtete man ihn 1819 den 28. Septbr. Morgens um 2 Uhr 47′ 51″; wann wird er das nächste Mal erscheinen und wann ist er zunächst vorher in derselben Gegend erschienen?

1818 Jahre 8 Monate 27 Tage 2 Stunden 47′ 51″
58 „ 9 „ 17 „ 17 „ 53′ 55″
1877 Jahre 6 Monate 14 Tage 20 Stunden 41′ 46″
1759 Jahre 11 Monate 9 Tage 8 Stunden 53′ 56″

Der Komet erscheint also nach Verlauf von 1877 Jahren 6 Monaten 14 Tagen 20 Stunden 41′ 46″ seit Ch., daher wird er also 1878 den 15. Juli Abends 8 Uhr 53′ 56″ wieder erscheinen; und er erschien zunächst vorher 1760 den 10. Decbr. Morgens 8 Uhr 53′ 56″.

Digitized by Google

Anmerk. Rechnungen mit Zeit werden später noch häufig vorkommen, aber in andern Beziehungen als hier; und obgleich sich noch Vieles über vorstehende Materie sagen läßt, so muß ich doch diesen Abschnitt abbrechen, um Raum für das Nachfolgende zu gewinnen.

Zweiter Abschnitt.

Berechnung solcher Größen, welche durch ungleichartige Größen bedingt werden.

Die ungleichartigen Größen, welche in der Elementar-Arithmetik in Rechnung gezogen werden, sind Raumgrößen, Gewichte (Kräfte), Geldwerth und Zeit; diese Größen kann man nun entweder zu je zwei oder zu je drei oder endlich zu je 4 Größen kombiniren; daher stellen sich auch ebenso viele Kapitel heraus, welche also folgende sind:

Erstes Kapitel. Berechnung solcher Größen, welche durch zwei ungleichartige Größen bedingt werden.

Zweites Kapitel. Berechnung solcher Größen, welche durch drei ungleichartige Größen bedingt werden.

Drittes Kapitel. Berechnung solcher Größen, welche durch vier ungleichartige Größen bedingt werden.

Erstes Kapitel.

Berechnung solcher Größen, welche durch zwei ungleichartige Größen bedingt werden.

Die weitere Ausführung der Kombination liefert nun folgende Unterabtheilungen:

I. Beziehungen zwischen Raumgrößen und Gewichten (Kräften).
II. Beziehungen zwischen Raumgrößen und dem Gelde.
III. Beziehungen zwischen Raumgrößen und der Zeit.
IV. Beziehungen zwischen Gewichten und dem Gelde.
V. Beziehungen zwischen Gewichten und der Zeit.
VI. Beziehungen zwischen dem Gelde und der Zeit.

I. Beziehung zwischen Raumgrößen und Gewichten (Kräften).

Der Raumgrößen giebt es drei Arten, daher muß jede derselben berücksichtigt werden, wodurch man drei neue Abstufungen erhält.

Digitized by Google

A. Beziehungen zwischen Längengrößen und Gewichten.

Eine der nützlichsten und interessantesten Aufgaben, welche sich hier darbieten, ist diejenige, welche sich auf den Hebel bezieht; eine andere Art wird die Fortschaffung von Lasten untersuchen, doch ohne Rücksicht auf die Zeit; beide vereinigen sich aber in der Untersuchung des Gleichgewichts der Kräfte. Alles Uebrige ist ohne Nutzen und ohne Interesse.

1. Eine unbiegsame Gerade, ohne alle Schwere, in derselben drei Punkte so bestimmt, daß sie um den einen festen Punkt sich drehen könne, und in den beiden andern so mit Gewichten beschwert ist, daß sie in horizontaler Lage in Ruhe verharrt, heißt ein mathematischer Hebel. (Fig. 52 a und b.)

Sei AB eine Gerade, ohne Schwere, die im Punkte C durch die Unterlage CD so unterstützt ist, daß sie sich um den Punkt C drehen könne; in den Punkten A und B seien Gewichte, P und Q, angehängt, so heißt also diese ganze Verbindung der Geraden mit ihrer Unterstützung und den an ihr angebrachten Gewichten (oder Kräften) ein mathematischer Hebel.

Ist die Gerade AB von irgend einem Stoffe, z. B. von Holz, oder Metall, oder Knochen ꝛc., so ist der Hebel ein physischer.

Die Strecken der Geraden von ihrem Unterstützungspunkte bis zu den Punkten, in welchen die Gewichte befestigt sind, heißen die Arme des Hebels. Anstatt der Gewichte kann man sich auch Kräfte denken.

Liegt der Unterstützungspunkt zwischen den Punkten, auf welche die Gewichte oder Kräfte wirken, so heißt der Hebel ein zweiarmiger; liegt er außerhalb der beiden andern Punkte, so heißt er ein einarmiger Hebel. In Fig. a. sind die Hebelarme AC und CB, daher stellt dieselbe einen zweiarmigen Hebel dar. In Fig. b. ist der Unterstützungspunkt C, und CA, CB sind seine Arme; diese stellt einen einarmigen Hebel vor.

2. Ist der Hebel in horizontaler oder wagrechter Lage in Ruhe, so ist er im Gleichgewichte; seine Gewichte oder Kräfte halten sich gegenseitig das Gleichgewicht.

Soll Gleichgewicht erfolgen, so müssen die Gewichte (Kräfte) am zweiarmigen Hebel nach einer und derselben Richtung, entweder beide nach unten oder beide nach oben wirken; am einarmigen Hebel wirken die Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen, die eine nach unten, die andere nach oben zu. Denn es sei in R eine Rolle befestigt, die sich um eine Axe, die durch den Mittelpunkt der Rolle geht, drehen könne; in B eine Schnur befestigt, welche über die Rolle geführt wird, und an ihr anderes Ende ein Gewicht Q angebracht; so wirkt das Gewicht P in der Richtung AP nach unten, und das Gewicht Q in der Richtung BR nach oben.

3. Wenn der Hebel im Gleichgewichte ist: so müssen die Längen der Hebelarme stets im umgekehrten Verhältnisse der Größe der Gewichte (Kräfte) stehen.

Digitized by Google

Es muß also stets sein: $AC : CB = Q : P$.

Dieses Gesetz gilt sowohl vom zweiarmigen als auch vom einarmigen Hebel.

Ist z. B. $AC = 9$, $CB = 12$ Zoll am zweiarmigen Hebel, und $P = 16$ Loth, so muß sein $9 : 12 = Q : 16$ Loth; also $Q = \frac{9 \cdot 16}{12} = 12$ Loth.

Am einarmigen Hebel sei $AC = 21$, $CB = 10$ Zoll, und $P = 35$ ℔, so ist $21 : 10 = Q : 35$ ℔; also $Q = \frac{21 \cdot 35}{10} = 73\frac{1}{2}$ ℔.

Aus obiger Proportion ergiebt sich $AC \cdot P = CB \cdot Q$, d. h. das Produkt aus der Zahl der Längeneinheiten des einen Hebelarms und der Zahl der Gewichtseinheiten seines zugehörigen Gewichts ist gleich dem Produkte aus der Zahl der Längeneinheiten des andern Hebelarms und der Zahl der Gewichtseinheiten seines zugehörigen Gewichts. Jedes der genannten Produkte heißt das statische Moment des Hebels. Ist also der Hebel im Gleichgewichte, so müssen die statischen Momente einander gleich sein.

Anmerk. Vorstehenden Satz von der umgekehrten Proportionalität der Längen der Hebelarme und der Größe ihrer Gewichte oder von der Gleichheit der statischen Momente des Hebels habe ich zunächst zur Anwendung aufgestellt, später werde ich ihn auch beweisen; nachdem ich im Verfolg dieser Untersuchungen gewisse Begriffe werde entwickelt haben, die zu dem Beweise des gedachten Satzes nothwendig sind.

4. Der in Nr. 3. angeführte Satz veranlaßt folgende Aufgaben: 1) die Hebelarme und ein Gewicht sind gegeben, und man sucht das andere Gewicht; 2) die Gewichte und einer der Hebelarme sind gegeben, und man will die Länge des andern Armes finden; 3) die Gewichte und die Summe der Hebelarme sind gegeben, und man will den Unterstützungspunkt berechnen; 4) die Hebelarme und die Summe der Gewichte sind gegeben, und man sucht die Größe der einzelnen Gewichte; 5) die Gewichte und die Differenz der Hebelarme sind gegeben und man sucht ihre Länge; 6) die Hebelarme und die Differenz der Gewichte sind gegeben, und man sucht die einzelnen Gewichte.

5. Der eine Arm eines Hebels ist 1 Fuß 8 Zoll, der andere 2 Fuß 4 Zoll lang; an den ersten Arm ist ein Gewicht von 56 ℔ angebracht: welches Gewicht muß man dem andern Hebelarme anhängen, damit Gleichgewicht entstehe?

Das Gewicht des andern Hebelarmes sei Q, so ist, wenn man die Längen in Zoll verwandelt, $28 \cdot Q = 20 \cdot 56$ ℔, oder $28'' : 20'' = 56$ ℔ $: Q$; daher $Q = \frac{20 \cdot 56}{28} = 40$ ℔.

6. In einem mathem. Buche steht die Bemerkung: »Der Mensch kann mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,1 ℔ drücken, 265½ ℔ heben, und 102 ℔ im Gehen ziehen. Ein Pferd zieht etwa 771 ℔.«

Digitized by Google

Angenommen nun, daß 5 Menschen vermittelst Hebebäume einen Stein aus einer Vertiefung auf den ebenen Boden herausheben wollen; jeder hat einen Hebebaum von 10 Fuß Länge, und bringt ihn auf einer Unterlage so an, daß der Unterstützungspunkt von dem Berührungspunkte des Steins und des Hebebaums um 3 Fuß und von dem Punkte, in dem die Hände wirken, um 7 Fuß entfernt ist. Wie groß ist das Gewicht des Steins, wenn die Arbeiter ihren Zweck erreichen?

$$3 : 7 = 5 . 102{,}14 \text{ ℔} : \text{Last} = \frac{7 . 5 . 102{,}14}{3} = 1191\tfrac{4}{10} \text{ ℔}.$$

7. Man hat an eine Stange, $4\frac{1}{2}$ Fuß von ihrer Unterstützung, ein Gewicht von $78\frac{3}{4}$ ℔ angehängt; in welcher Entfernung vom Unterstützungspunkte auf dem entgegengesetzten Ende der Stange hat man 60 ℔ anzubringen, damit die Stange im Gleichgewichte sei?

Die gesuchte Entfernung sei E, so ist $60 \text{ ℔} : 78\frac{3}{4} \text{ ℔} = 4\frac{1}{2} \text{ F.} : \text{E}$; daher $\text{E} = \frac{78\frac{3}{4} . 4\frac{1}{2}}{60} = 5\frac{3}{32} \text{ F.} = 5$ Fuß 10 Zoll $10\frac{1}{2}$ Linien.

8. An den Enden einer Stange, die 15 Fuß lang ist, sind Gewichte von 40 und 56 ℔ Schwere angebracht; man sucht den Unterstützungspunkt, damit Gleichgewicht entstehe.

Bezeichnet man den einen Hebelarm, der zum Gewichte von 40 ℔ gehört, mit A, den andern mit B, so ist

$\text{A} : \text{B} = 56 \text{ ℔} : 40 \text{ ℔}$, und daraus folgt durch Verbindung der Glieder:

$$\text{A} : \text{A} + \text{B} = 56 : 56 + 40 \text{ und}$$
$$\text{B} : \text{A} + \text{B} = 40 : 56 + 40.$$

Weil nun $\text{A} + \text{B} = 15$ Fuß ist, so hat man $\text{A} : 15 = 56 : 96$ und $\text{B} : 15 = 40 : 96$; daraus ergiebt sich $\text{A} = 8\frac{3}{4} \text{ F.}$, $\text{B} = 6\frac{1}{4} \text{ F.}$

9. Ein Physiker hat sich eine Wage machen lassen, die er zum genauen Abwägen seiner Substanzen gebrauchen will; daher sucht er sich von der Richtigkeit der Wage zu überzeugen. Er mißt den Abstand der Aufhängepunkte der Wagschale und findet denselben 18 Zoll 4 Linien; in die eine Wagschale muß er 439 und in die andere 441 Gramme hineinlegen, um Gleichgewicht zu erhalten; wie lang sind die Arme dieser Wage?

Der eine Arm sei A, der andere B, so ist wie vorher

$\text{A} : \text{B} = 441 : 439$ und daraus ergiebt sich

$\text{A} : \text{A} + \text{B} = 441 : 880$ und $\text{B} : \text{A} + \text{B} = 439 : 880$.

Da nun $\text{A} + \text{B} = 18'' \, 4''' = 220'''$, so ist ferner

$\text{A} : 220''' = 441 : 880$ und $\text{B} : 220''' = 439 : 880$; daher

$\text{A} = \frac{220 . 441}{880} = 110\frac{1}{4}$ und $\text{B} = \frac{220 . 439}{880} = 109\frac{3}{4}$ Linien, oder

$\text{A} = 9'' \, 2\frac{1}{4}'''$ und $\text{B} = 9'' \, 1\frac{3}{4}'''$.

10. Es ist klar, daß im mathematischen Hebel die Summe der Gewichte auf den Unterstützungspunkt wirken muß, weil die Hebelarme kein Gewicht haben. Gesetzt nun, die Arme eines mathematischen Hebels wären

Digitized by Google

12 und 14 Zoll lang, und auf den Unterstützungspunkt wirke eine Kraft von 91 ℔, welche Kräfte wirken auf jeden Hebelarm?

Die Gewichte seien P und Q, so ist $P:Q=14:12=7:6$, daher $P:P+Q=7:13$, und $P+Q=91$ ℔, also $P:91=7:13$; folglich $P=\frac{91}{13}?=49$ ℔, und daher $Q=91-49=42$ ℔.

11. Man mißt die Entfernung der Aufhängepunkte eines einarmigen Hebels und findet dieselbe 2 Fuß $6\frac{1}{2}$ Zoll, und man muß in den genannten Punkten Gewichte von 2 ℔ 8 Loth und 4 ℔ 5 Loth anbringen, das Gleichgewicht des Hebels herzustellen; wie lang ist jeder Hebelarm, oder wie weit ist jeder Aufhängepunkt vom Unterstützungspunkte entfernt?

Nennt man die erwähnten Entfernungen A und B, so ist $A:B=4$ ℔ 5 Loth : 2 ℔ 8 Loth $=133:72$, daher durch Trennung der Glieder $A:A-B=133:133-72$, und $B:A-B=72:133-72$, und $A-B=2$ Fuß $6\frac{1}{2}$ Zoll $=30\frac{1}{2}''$, also $A:30\frac{1}{2}''=133:61$ und $B:30\frac{1}{2}''=72:61$; folglich $A=\frac{30\frac{1}{2}\cdot 133}{61}=66\frac{1}{2}''=5'\,6''\,6'''$ und $B=\frac{30\frac{1}{2}\cdot 72}{61}=36''=3'$.

12. Ein Naturforscher wägt auf der in Nr. 9. erwähnten Wage zwei Substanzen gegenseitig ab, und er findet, daß er der einen Substanz in der einen Schale 18 Gramme zulegen müsse, damit das Gleichgewicht der Wage bewirkt werde. Welches ist das Gewicht jeder Substanz?

Aus der gedachten Aufgabe ist bekannt, daß der eine Hebelarm $=110\frac{1}{4}$, der andere $=109\frac{3}{4}$ Linien ist; setzt man nun die Gewichte der Substanzen gleich P und Q, so ist

$$P:Q=109\tfrac{3}{4}:110\tfrac{1}{4}=439:441, \text{ also}$$
$$P:P-Q=439:441-439=439:2.$$

Nun ist $P-Q=18$ Grammen, daher $P:18=439:2$; folglich $P=\frac{18\cdot 439}{2}=3951$ Grammen; also $Q=3951-18=3933$ Grammen.

Will man diese Gewichte in Preuß. verwandeln, so weiß man, daß ein Preuß. ℔ $=467{,}71$ Grammen ist; daher $P=\frac{3951}{467{,}71}=8$ ℔ 10 Loth $10{,}88$ Gran; $Q=8$ ℔ 8 Loth $195{,}362$ Gran.

Es ist nämlich 1 ℔ $=32$ Loth, 1 Loth $=240$ Gran.

Anmerk. Es befremde nicht, daß ich den Naturforscher Franz. Gewicht gebrauchen lasse, denn dieses findet in der Wirklichkeit statt, weil es das allgemein bekannte und verständliche Gewicht der Physiker ist.

Uebrigens mache ich noch auf eine unrichtige Benennung des kleinsten Medicinalgewichts aufmerksam, welches theils im gemeinen Leben, theils in manchen Büchern, wie Nelkenbrecher, vorkommt. Das Medicinalpfund = 12 Unzen à 8 Drachmen à 3 Scrupel à 20 Gran und nicht Grän. Gran und Grän sind sehr verschieden; denn es ist 1 Pfund = 2 Mark à 16 Loth à 18 Grän; da nun 1 Unze = 2 Loth = 480 Gran, also 1 Loth = 240 Gran, so sind

Digitized by Google

18 Grän = 240 Gran; also 1 Grän = 13⅓ Gran. Diese Verwechselung des Grän mit Gran rührt wahrscheinlich daher, daß ähnliche kleine Gewichte, wie unser Gran, der Franzosen und Engländer Grains heißen.

13. In den drei Punkten A, B, C (Fig. 53.) einer Geraden sind drei Gewichte von 6, 12 und 18 Pfund angehängt; es ist AB = 17, BC = 13 Zoll; wo muß der Unterstützungspunkt angebracht werden, damit die Gewichte im Gleichgewicht seien?

Der Unterstützungspunkt sei in D und der Arm AD = A, so ist der Arm BD = A − 17 und CD = 30 − A.

Zur Berechnung hat man nun den allgemeinen Satz:

Die Summe der statischen Momente auf der einen Seite des Unterstützungspunktes ist gleich der Summe der statischen Momente auf der andern Seite desselben.

Daher ist P . AD + Q . BD = R . CD; oder

$$6 . A + 12 . (A - 17) = 18 . (30 - A).$$

Es ist nun 12 . (A − 17) = 12 . A − 12 . 17. Denn ich soll von A 17 Zoll hinwegnehmen und den Rest mit 12 multipliciren; da ich also 12 mal den Rest habe, so muß ich eben so oft die größere Zahl nehmen und eben so oft die kleinere Zahl davon hinwegnehmen, so werde ich gleichfalls 12 mal den Rest haben. Aus demselben Grunde ist 18 . (30 − A) = 18 . 30 − 18 . A. Folglich ist

$$6 . A + 12 . A - 12 . 17 = 18 . 30 - 18 . A \text{ oder}$$
$$18 . A - 204 = 540 - 18 . A.$$

Da das 18fache von A um 204 vermindert werden muß, damit es gleich 540 − 18 . A sei, so muß das 18fache von A um 204 größer als 540 − 18 . A sein; und weil die größere Zahl gleich der kleinern und ihrem Unterschiede ist, so ist das 18fache von A = 540 − 18 . A + 204 = 744 − 18 . A. Aus demselben Grunde ist 744 um das 18fache von A größer als das 18fache von A, daher ist das 36fache von A = 744; folglich $A = \frac{744}{36} = 20\frac{24}{36}$ Zoll = 20″ 8‴ = AD, also BD = 3″ 8‴ und CD = 30 − 20⅔ = 9⅓ Zoll = 9″ 4‴.

14. In den Punkten A, B, C, D, E sind Gewichte P = 9 ℔, Q = 10 ℔, R = 11 ℔, S = 16 ℔ und T = 14 ℔ befestigt; es ist AB = 8″, BC = 12″, CD = 10″ und DE = 14″; man sucht den Unterstützungspunkt, damit diese Kräfte im Gleichgewichte seien. (Fig. 54.)

Der Unterstützungspunkt sei F, so ist nach vorstehendem Satze:

$$9 . AF + 10 . BF + 11 . CF = 16 . DF + 14 . EF.$$

Aber BF = AF − 8, CF = AF − 20, DF = 30 − AF, EF = 44 − AF; daher ist:

$$9 . AF + 10 . (AF - 8) + 11 . (AF - 20) = 16 . (30 - AF) + 14 . (44 - AF) \text{ oder}$$

Digitized by Google

$9 . AF + 10 . AF - 80 + 11 . AF - 220 = 480 - 16 . AF + 616 . - 14 . AF$ oder

$30 . AF - 300 = 1096 - 30 . AF;$

daher $60 . AF = 1396$; also $AF = 23\frac{4}{15}$ Zoll $= 23'' \; 3{,}2'''$.

Anmerk. Aus vorstehender Rechnung geht hervor, daß man nach Belieben Kräfte in beliebigen Distanzen von einander an einer Geraden befestigen könne, so wird es immer leicht sein, den Unterstützungs-Punkt oder den Ort der Mittelkraft zu finden.

B. Beziehungen zwischen Flächengrößen und Gewichten.

15. Im Vorhergehenden waren Gewichte nur an einer Geraden angebracht; nun kann man auch die Bedingungen des Gleichgewichts betrachten, wenn Gewichte an mehrern Geraden befestigt sind. (Fig. 55.)

Die drei Geraden AB, BC, CA mögen sich in den drei Punkten A, B, C verbinden, und in jedem Punkte sei ein Gewicht angebracht; man nehme ferner an, daß diese 3 Gewichte A, B, C unter einander gleich seien, etwa 3 gleiche Kugeln von derselben Materie, Holz, Metall, Elfenbein ꝛc.; so ist nun die Frage, wo sich der Punkt befinde, welchen man zu unterstützen habe, damit diese Verbindung (Zusammenstellung oder System) von Linien und Gewichten im Gleichgewichte sei?

Man betrachte vorläufig eine Gerade mit ihren Gewichten für sich allein. Es sei D der Unterstützungspunkt in der Geraden AB; da ihre Gewichte A und B einander gleich sind, so folgt aus dem Obigen, daß auch ihre Hebelarme unter einander gleich sein müssen; also $AD = DB$, und indem man nun D unterstützt, so ist die Gerade AB mit ihren Gewichten im Gleichgewichte, und auf D wirkt eine Kraft, die gleich der Summe der Kräfte in A und B; daher wirkt auf D ein Gewicht, welches das Doppelte von A oder B ist; folglich kann man sich die Gewichte A und B in D vereinigt denken.

Nun verbinde man C mit D, so hat man in der Geraden CD zwei Gewichte C und D, und man weiß, daß das Gewicht D das Doppelte von C ist, weil $A = B = C$ angenommen wurde; und ist O der Unterstützungspunkt in der Geraden CD, so muß nach dem Vorhergehenden sein $CD : OD$ = Gewicht D : Gewicht C, weil aber Gewicht D : Gewicht $C = 2 : 1$, so ist auch $CO : OD = 2 : 1$ und daraus folgt $CO : CO + OD = 2 : 2 + 1$ und $OD : CO + OD = 1 : 2 + 1$ oder $CO : CD = 2 : 3$ und $OD : CD = 1 : 3$. Daraus folgt ferner $DO = \frac{1}{3} CD$ und $CO = \frac{2}{3} CD$.

Weil nun die 3 Geraden AB, BC, CA gegeben sind, so ist auch D, die Mitte von AB, also auch CD gegeben, und daher ist auch O gegeben. Wenn man also das System ABC von verbundenen Linien und Gewichten in O unterstützt, so muß es im Gleichgewichte sein, und auf O wird ein Druck ausgeübt, welcher das 3fache Gewicht von A oder B oder C hervorbringt.

Digitized by Google

Das System ABC verbundener Linien und Gewichte ist ein Dreieck und der Unterstützungspunkt O, zur Bewirkung des Gleichgewichts, heißt der Schwerpunkt des Dreiecks.

Denselben Punkt O hätte man bekommen müssen, wenn man von der Linie AC ausgegangen wäre; dann müßte E, die Mitte von AC, der Unterstützungspunkt der AC und $EO = \frac{1}{3} CB$, also O der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Es ist klar, daß dieses auch von der Geraden BC gilt; nämlich F die Mitte von BC und $FO = \frac{1}{3} AF$. Daher durchschneiden sich die 3 Geraden CD, BE, AF in einem Punkte O, nämlich im Schwerpunkte des Dreiecks.

16. An jeder Ecke des Vierecks ABCD sei ein Gewicht von gleicher Größe angebracht; und man sucht den Unterstützungspunkt dieses Vierecks für die Bedingung seines Gleichgewichts, oder seinen Schwerpunkt. (Fig. 56.)

Da Gewicht A = Gewicht B, so muß der Unterstützungspunkt der AB in ihrer Mitte E liegen; dasselbe gilt für CD, also F die Mitte von CD ist der Unterstützungs- oder Schwerpunkt der CD. Da nun Gewicht E = Gewicht A + Gewicht B oder das Gewicht E das Doppelte von A oder B und das Gewicht F das Doppelte von C oder D und A = B = C = D ist, so muß Gewicht E = Gewicht F sein; also hat man die 4 gleichen Gewichte A, B, C, D auf die zwei gleichen E, F reducirt, und für diese ist der Unterstützungs- oder Schwerpunkt in der Mitte der EF, und ist O die Mitte von EF, so ist auch O der gesuchte Schwerpunkt.

Geht man von den Geraden AD, BC aus, halbirt AD in G, BC in H, und GH in O; so ist auch auf diese Weise der Schwerpunkt O des Vierecks ABCD gefunden.

Hieraus geht hervor, daß die Geraden, welche die Mitten der gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks verbinden, sich gegenseitig halbiren, und zwar im Schwerpunkte des Vierecks.

Anmerk. Vermittelst der Theorie des Schwerpunktes kann man sehr interessante Sätze für die Geometrie herleiten; so z. B. muß die Gerade, welche die Mitten der EG, FH, oder der EH, FG, oder der AC, BD ꝛc. verbindet, durch den Schwerpunkt O gehen.

17. Man sucht den Unterstützungspunkt eines Fünfecks, dessen Ecken mit gleichen Gewichten beschwert sind, für die Bedingung des Gleichgewichts, oder den Schwerpunkt desselben. (Fig. 57.)

Nach vorstehender Aufgabe suche man zuerst den Schwerpunkt des Vierecks ABCD; man halbire also BC in F, AD in G, und FG in H, so ist H der Schwerpunkt des Vierecks ABCD, und auf H wirkt ein Druck, den das vierfache Gewicht A oder B oder C ꝛc. ausübt.

Nun verbinde man H mit E; so wirkt auf den Punkt H ein Gewicht = 4 mal Gewicht E, und ist O der Unterstützungspunkt des Hebels HE, so

Digitized by Google

muß HO : OE = Gewicht E : Gewicht H = 1 : 4 sein; daher ist HO = $\frac{1}{5}$ HE und OE = $\frac{4}{5}$ HE.

Anmerk. Die Aufsuchung des Schwerpunktes von einem Dreieck, Viereck und Fünfeck wird das Verfahren erläutert haben, auch den Schwerpunkt eines Sechs-, Sieben-, Achtecks ꝛc., kurz jedes gegebenen Vielecks zu berechnen und durch Ziehung von geraden Linien zu bestimmen; daher überlasse ich das Weitere Jedem, der an der Verfolgung desselben Vergnügen findet, und bemerke nur noch folgende Erklärung:

Der Unterstützungspunkt eines Vielecks, dessen Ecken mit gleichen Gewichten belastet sind, für die Bedingung des Gleichgewichts dieses Vielecks, heißt der Schwerpunkt desselben.

C. Beziehungen zwischen Körperräumen und Gewichten.

Hier bieten sich folgende Beziehungen zu einer besondern Beachtung dar: 1) der Inhalt und das Gewicht eines Stoffes sind gegeben; den Rauminhalt oder das Gewicht desselben Stoffes zu finden, wenn sein Gewicht oder Volumen gegeben ist; 2) die Gewichte gleicher oder ungleicher Volumen verschiedener Stoffe sind gegeben; das Verhältniß ihrer Gewichte zu berechnen (specifisches Gewicht); 3) das specifische Gewicht einer Materie und ihr Volumen oder Gewicht sind gegeben; ihr Gewicht oder Volumen zu berechnen; 4) das Verhältniß der Kraft zur Last bei Anwendung gewisser Maschinen zu finden; 5) den Schwerpunkt gewisser Körper zu ermitteln.

Dieses sind die vorzüglichsten Beziehungen zwischen Körpern und Gewichten, und weil sie sehr häufige Anwendungen im gemeinen Leben erfahren, so sind sie zugleich von hoher Wichtigkeit und verdienen daher auch eine umständliche Behandlung.

1. Ein Kubikfuß reines oder destillirtes Wasser wiegt 66 Preuß. Pfunde; wie schwer ist a) ein Kubikzoll, b) ein Quart, c) ein Anker, d) eine Biertonne, e) eine Ohm, f) ein Oxhoft, g) eine Tonne zu 4 Scheffeln desselben Wassers?

a) Ein Kubikfuß = 12 . 12 . 12 Kubikzoll; also ein Kubikzoll = $\frac{1}{12 . 12 . 12}$ Kubikfuß. Da nun 1 Kubikfuß Wasser = 66 ℔, so ist 1 Kubikzoll Wasser = $\frac{1}{12 . 12 . 12} . 66$ ℔ = $\frac{66 . 32}{12 . 12 . 12} = \frac{11}{9}$ Loth = $1\frac{2}{9}$ Loth.

b) Ein Quart = 64 Kubikzoll, also das Gewicht von einem Quart Wasser = 64 . $\frac{11}{9}$ Loth = $78\frac{2}{3}$ Loth = 2 ℔ $14\frac{2}{3}$ Loth.

c) Ein Anker = 30 Quart; daher das Gewicht eines Ankers Wasser = 30 . 64 . $\frac{11}{9}$ Loth = $73\frac{1}{3}$ ℔.

d) Eine Biertonne = 100 Quart; folglich das Gewicht einer Biertonne Wasser = 100 . 64 . $\frac{11}{9}$ Loth = 244 ℔ $14\frac{2}{3}$ Loth.

e) Eine Ohm = 120 Quart; also eine Ohm Wasser 120 . 64 . $\frac{11}{9}$ Loth = $293\frac{1}{3}$ ℔.

Digitized by Google

f) Ein Oxhoft = 180 Quart; also 1 Oxhoft Wasser = $180.64.\frac{11}{16}$ Loth = 440 ℔.

g) Ein Scheffel = 3072 Kubikzoll, also eine Tonne von 4 Scheffeln = 4 . 3072 Kubikzoll; folglich das Gewicht von dieser Tonne Wasser = $4.3072.\frac{1}{9} = 469\frac{1}{3}$ ℔.

2. Nach der Maß- und Gewichtsordnung soll das niedrigste Gewicht eines Preuß. Scheffels Erbsen und Hülsenfrüchte $90\frac{1}{2}$, Weizen $85\frac{1}{2}$, Roggen $80\frac{1}{2}$, Gerste $55\frac{1}{2}$ und Hafer $45\frac{1}{2}$ Pfund wiegen. Ein Scheffel Mehl soll 75 Pfund wiegen. Wie schwer ist eine Last zu $56\frac{1}{2}$ Scheffeln und zu 60 Scheffeln, ein Malter zu 12 und ein Wispel zu 24 Scheffeln von jeder Getreideart?

Eine Last zu $56\frac{1}{2}$ Scheffeln					Erbsen	= $56\frac{1}{2}.90\frac{1}{2}$	= $5113\frac{1}{4}$	℔
»	»	»	»	»	Weizen	= $56\frac{1}{2}.85\frac{1}{2}$	= $4830\frac{3}{4}$	»
»	»	»	»	»	Roggen	= $56\frac{1}{2}.80\frac{1}{2}$	= $4548\frac{1}{4}$	»
»	»	»	»	»	Gerste	= $56\frac{1}{2}.55\frac{1}{2}$	= $3135\frac{3}{4}$	»
»	»	»	»	»	Hafer	= $56\frac{1}{2}.45\frac{1}{2}$	= $2570\frac{3}{4}$	»
»	»	»	»	»	Mehl	= $56\frac{1}{2}.75$	= $4237\frac{1}{2}$	»
Eine Last zu 60 Scheffeln					Erbsen	= $60.90\frac{1}{2}$	= 5430	»
»	»	»	»	»	Weizen	= $60.85\frac{1}{2}$	= 5130	»
»	»	»	»	»	Roggen	= $60.80\frac{1}{2}$	= 4830	»
»	»	»	»	»	Gerste	= $60.55\frac{1}{2}$	= 3330	»
»	»	»	»	»	Hafer	= $60.45\frac{1}{2}$	= 2730	»
»	»	»	»	»	Mehl	= 60 . 75	= 4500	»

3. Da das Gewicht eines Preuß. Kubikfußes Wasser 66 Pr. Pfunde wiegt, so nimmt ein Loth, ein Pfund, ein Centner, ein Schiffpfund von 3 Centnern, eine Schiffslast von 4000 Pfunden welchen Raum ein?

Ein ℔ = 32 Loth, also 66 ℔ = 66 . 32 Loth, und 1 Kubikfuß = 12 . 12 . 12 Kubikzoll; daher ist das Volumen von 66 . 32 Loth Wasser = 12 . 12 . 12 Kubikzoll; folglich ist das Volumen von einem Loth Wasser = $\frac{12.12.12}{66.32} = \frac{9}{11}$ Kubikzoll.

Das Volumen von 32 Loth oder einem Pfunde Wasser = $32.\frac{9}{11} = 26\frac{2}{11}$ Kubikzoll.

Das Volumen von einem Centner Wasser = $110.32.\frac{9}{11}$ Kubikzoll = $\frac{10.32.9}{12.12.12} = 1\frac{2}{3}$ Kubikfuß.

Das Volumen eines Schiffpfundes Wasser = $3.1\frac{2}{3} = 5$ Kubikfuß.

Das Volumen einer Schiffslast Wasser = $\frac{4000.32.9}{12.12.12.11} = 60\frac{240}{33}$ Kubikfuß = 60 Kubikfuß $1047\frac{3}{11}$ Kubikzoll.

4. Welches Volumen hat ein Centner, ein Schiffpfund und eine Schiffslast der in Nr. 2. angeführten Getreidearten a) in Scheffeln, b) in Kubikfuß ausgedrückt, da ein Scheffel = 3072 Kubikzoll?

a) Weil ein Scheffel Erbsen $90\frac{1}{2}$ ℔ wiegt, und ein Centner 110 ℔ schwer ist, so enthält ein Centner Erbsen so viele Scheffel, wie vielmal 110 ℔

Digitized by Google

die $90\frac{1}{2}$ Pfund enthalten; daher umfaßt ein Centner Erbsen $\frac{110}{90\frac{1}{2}}$ Scheffel $= 1\frac{39}{181}$ Scheffel $= 1{,}21547$ Scheffel $= 1$ Scheffel $3{,}4465$ Metzen.

Ein Schiffpfund Erbsen mißt $3 . \frac{110}{90\frac{1}{2}}$ Scheffel $= 3{,}6464$ Scheffel.

Eine Schiffslast Erbsen $= \frac{4000}{90\frac{1}{2}} = 44\frac{1}{4}$ Scheffel sehr nahe.

Ein Centner Weizen $= \frac{110}{85\frac{1}{2}} = 1{,}28655$ Scheffel.

Ein Schiffpfund Weizen $= 3 . \frac{110}{85\frac{1}{2}} = 3{,}85$ Scheffel nahe.

Eine Schiffslast Weizen $= \frac{4000}{85\frac{1}{2}} = 46{,}79532$ Scheffel.

Ein Centner Roggen $= \frac{110}{80\frac{1}{2}} = 1{,}36646$ Scheffel.

Ein Schiffpfund Roggen $= \frac{3 . 110}{80\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{10}$ Scheffel nahe.

Eine Schiffslast Roggen $= \frac{4000}{80\frac{1}{2}} = 49{,}69$ Scheffel nahe.

Ein Centner Gerste $= \frac{110}{55\frac{1}{2}} = 1{,}982$ Scheffel.

Ein Schiffpfund Gerste $= \frac{3 . 110}{55\frac{1}{2}} = 5{,}946$ Scheffel.

Eine Schiffslast Gerste $= \frac{4000}{55\frac{1}{2}} = 72{,}072$ Scheffel.

Ein Centner Hafer $= \frac{110}{45\frac{1}{2}} = 2{,}4176$ Scheffel.

Ein Schiffpfund Hafer $= \frac{3 . 110}{45\frac{1}{2}} = 7{,}2527$ Scheffel.

Eine Schiffslast Hafer $= \frac{4000}{45\frac{1}{2}} = 87{,}91209$ Scheffel.

Ein Centner Mehl $= \frac{110}{75} = 1\frac{7}{16}$ Scheffel.

Ein Schiffpfund Mehl $= \frac{3 . 110}{75} = 4\frac{2}{5}$ Scheffel.

Eine Schiffslast Mehl $= \frac{4000}{75} = 53\frac{1}{3}$ Scheffel.

b) Da nun 1 Scheffel $= 3072$ Kubikzoll $= \frac{16}{9}$ Kubikfuß, so darf man nur obige Resultate mit einer dieser Zahlen multipliciren, um die Scheffel in Kubikzoll oder Kubikfuß zu verwandeln. Nur von einer Schiffslast setze ich die Resultate hierher.

Eine Schiffslast Erbsen $= \frac{4000}{90\frac{1}{2}} . \frac{16}{9} = 78{,}577$ Kubikfuß.

Digitized by Google

Eine Schiffslast Weizen $= \frac{4000}{85\frac{1}{2}} \cdot \frac{16}{9} = 83{,}_{1709}$ Kubikfuß.

" " Roggen $= \frac{4000}{80\frac{1}{2}} \cdot \frac{16}{9} = 88{,}_{3368}$ "

" " Gerste $= \frac{4000}{55\frac{1}{2}} \cdot \frac{16}{9} = 128{,}_{128}$ "

" " Hafer $= \frac{4000}{45\frac{1}{2}} \cdot \frac{16}{9} = 156{,}_{288}$ "

" " Mehl $= \frac{4000}{75} \cdot \frac{16}{9} = 94{,}_{8148}$ "

5. Ein leeres Gefäß A wiegt $2\frac{1}{4}$ Loth, ein anderes B $1\frac{1}{2}$ Pfund, ein drittes C 4 Pfund 10 Loth, ein viertes D $12\frac{3}{4}$ Pfund, ein fünftes E 18 Pfd. 9 Loth; darauf füllt man jedes mit reinem Wasser bis zum obersten Rande und wägt es nun, so findet man das Gewicht von A $13\frac{1}{2}$ Loth, von B 12 Pfund 7 Loth, von C 27 Pfund 12 Loth, von D $89\frac{1}{4}$ Pfund, von E 111 Pfund 6 Loth; wie groß ist das innere Volumen von jedem Gefäße?

Wenn man das Gewicht des leeren Gefäßes von dem Gewichte des Gefäßes nebst dem des Wassers, welches es in sich faßt, hinwegnimmt, so muß man das Gewicht des Wassers übrig behalten; daher ist das Gewicht des Wassers im Gefäße

A $= 13\frac{1}{2}$ Loth $- 2\frac{1}{4}$ Loth $= 11\frac{1}{4}$ Loth;

B $= 12$ ℔ 7 Loth $- 1\frac{1}{2}$ ℔ $= 10$ ℔ 23 Loth $= 343$ Loth;

C $= 27$ ℔ 12 Loth $- 4$ ℔ 10 Loth $= 23$ ℔ 2 Loth $= 738$ Loth;

D $= 89\frac{1}{4}$ ℔ $- 12\frac{3}{4}$ ℔ $= 76\frac{1}{2}$ ℔;

E $= 111$ ℔ 6 Loth $- 18$ ℔ 9 Loth $= 92$ ℔ 29 Loth $= 2973$ Loth

Da nun nach Aufgabe 3. ein Loth Wasser ein Volumen von $\frac{9}{11}$ Kubikzoll hat, so ist das innere Volumen des Gefäßes

A $= 11\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{11} = 9\frac{9}{44}$ Kubikzoll $= 9\frac{1}{5}$ Kubikzoll nahe.

B $= 343 \cdot \frac{9}{11} = 280\frac{9}{11}$ Kubikzoll.

C $= 738 \cdot \frac{9}{11} = 603\frac{9}{11}$ Kubikzoll.

D $= 76\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{9}{11} = 2002\frac{1}{11}$ Kubikzoll.

E $= 2973 \cdot \frac{9}{11} = 2432\frac{5}{11}$ Kubikzoll.

6. Jedes Gefäß in der vorigen Aufgabe enthält wie viele Quart? Es ist nämlich ein Quart $= 64$ Kubikzoll.

Da 64 Kubikzoll den Rauminhalt eines Quart ausmachen, so wird jedes Gefäß so viele Quart fassen, wie vielmal seine Zahl Kubikzoll die 64 Kubikzoll enthalten; daher ist das Gefäß

$$A = \frac{9\frac{1}{5}}{64} = \frac{23}{160} = 0{,}_{14375} \text{ Quart.}$$

$$B = \frac{280\frac{9}{11}}{64} = 4{,}_{38778} \text{ Quart.}$$

Digitized by Google

$$C = \frac{603\frac{6}{11}}{64} = 9,_{43466}\text{ Quart.}$$

$$D = \frac{2002\frac{10}{11}}{64} = 31,_{29545}\text{ Quart.}$$

$$E = \frac{2432\frac{5}{11}}{64} = 38,_{0071}\text{ Quart.}$$

Man theilt ein Quart in Halbe, Viertel und Achtel Quart, oder in Halbe, Quartier und halbe Quartier; diese kleinere Maße wird man von jenen Gefäßen erhalten, wenn man den Decimalbruch des Quart mit 2, 4, 8 multiplicirt; ich will hier nur die Achtel Quart angeben.

A = 8 . 0,$_{14375}$ Quart = 1,$_{15}$ Achtel Quart.

B = 4 Quart + 8 . 0,$_{38778}$ = 4 Quart 3,$_{1}$ Achtel Quart.

C = 9 » + 8 . 0,$_{43466}$ = 9 » 3,$_{5}$ » »

D = 31 » + 8 . 0,$_{29545}$ = 31 » 2,$_{36}$ » »

E = 38 » + 8 . 0,$_{0071}$ = 38 » 0,$_{057}$ » »

Anmerk. Diese letzte Aufgabe giebt das sicherste und zugleich das genaueste Verfahren an, den Inhalt eines Gefäßes zu berechnen; und man muß sich in der That wundern, daß dieses Verfahren keine allgemeine Anwendung im gemeinen Leben findet. Physiker wenden kein anderes Verfahren an, das Volumen einer Substanz zu ermitteln, als eben dasjenige, welches voriger Aufgabe zum Grunde liegt, und keine Messung der Dimensionen eines Körpers kann zu einem so genauen Resultate führen, als eben das Abwägen desselben in Wasser, was sehr leicht ausführbar ist; außerdem hat es noch den Vortheil, daß es auch das Volumen solcher Körper bestimmt, deren Unregelmäßigkeit keine Messung ihrer Dimensionen gestattet. Hiebei ist aber noch zu bemerken, daß ein Preuß. Kubikfuß Wasser bei der Temperatur des destillirten Wassers von 15° Reaumur 66 Preuß. Pfunde wiegt. Beim Abwägen des Wassers muß man also demselben die Temperatur von 15° R. geben; dann wird man sicher ein sehr genaues Resultat erhalten. Anstatt des destillirten Wassers kann man zu diesem Zwecke Regenwasser benutzen, nicht aber das, welches zuerst herabfällt, denn dasselbe ist noch stark mit allerlei fremdartigen Theilchen, welche in der niedrigen Atmosphäre schwebten, geschwängert, sondern dasjenige, welches einige Zeit später herabfällt. Auch darf wohl nicht erinnert werden, daß Regenwasser, welches vom Dache, oder aus einer Rinne läuft, hiezu untauglich ist, weil es durch Abspülen vom Dache oder der Rinne viele fremdartige Theilchen mit sich führt.

Aufstrebende Lehrer, welche der edle Wunsch belebt, der Jugend für das praktische Leben nützliche Lehren mitzugeben, mögen vor den Augen ihrer Schüler Abwägungen leerer und solcher Gefäße, welche mit Wasser angefüllt sind, vornehmen und ihren Inhalt berechnen lassen, so wird dieses der sicherste Weg sein, das in Rede stehende Verfahren zur Ausübung in der Wirklichkeit ins Leben einzuführen.

7. Nelkenbrecher hat folgende Notiz: »Gewicht eines Französischen Kubikzolls

Gold . . .	= 7717 Holl. As.	Silber . . .	= 4357 Holl. As.
Quecksilber . :	= 5509 » »	Kupfer . . .	= 3475 » »
Blei	= 4459 » »	Messing . .	= 3303 » »

Digitized by Google

Eisen . . .	= 3086 Holl. As.	Weißen Franzwein	= 404 Holl. As.
Zinn . . .	= 2877 " "	Regenwasser . .	= 393 " "
Magnet . . .	= 2034 " "	Franzbranntwein	= 385 " "
Diamant . .	= 1336 " "	Thran . . .	= 381 " "
Weißen Marmor	= 1112 " "	Oel	= 378 " "
Gehauenen Stein	= 822 " "	Weizen . . .	= 322 " "
Ziegelstein . .	= 748 " "	Roggen . . .	= 307 " "
Pedro-Ximeneswein	= 500 " "	Gerste	= 258 " "
Seewasser . .	= 417 " "	Hafer	= 198 " "

Süßes Fluß- oder Brunnenwasser = 412 Holl. As.

Das Gewicht jedes dieser Stoffe ist wie vielmal so groß als das Gewicht destillirten Wassers von demselben Volumen. Dazu enthält Nelkenbr. noch folgende Angaben: 1 Kubikfuß destillirtes Wasser wiegt 70 Pfd. und 1 Pfd. = 10 186 Holl. As.

Hieraus folgt, daß 1 Kubikfuß destillirtes Wasser an Gewicht = 70 . 10186 Holl. As, also das Gewicht eines Kubikzolls = $\frac{70 \,.\, 10186}{12 \,.\, 12 \,.\, 12}$ = 412,61574 Holl. As. Daher ist

Gold . = 7717			18,702	
Queckfilber = 5509			13,351	
Blei . . = 4459			10,806	
Silber . = 4357	dividirt durch		10,559	mal.
Kupfer . = 3475	412,6273		8,421	
Messing . = 3303			8,004	
Eisen . . = 3086			7,470	

das Gewicht destillirten Wassers von demselben Volumen.

Die Zahl, mit welcher man das Gewicht destillirten Wassers von einem gewissen Volumen zu multipliciren hat, um das Gewicht eines gewissen Stoffes von demselben Volumen zu erhalten, heißt das specifische Gewicht dieses Stoffes.

Anmerk. Man hat meinem algebraischen Kopfrechnen den Vorwurf gemacht, daß es technische Ausdrücke und Lehren der Physik in Anwendung bringe, und daher nicht allgemein verständlich sei; darauf erwiedere ich, daß ich sowohl die technischen Ausdrücke erklärt, als auch die Lehren der Physik, die ich angewandt, erläutert habe; wo es nicht geschehen ist, da habe ich das Gebrauchte für allgemein bekannt gehalten; und ich frage jeden Unbefangenen, ob vorstehende Erklärung des specifischen Gewichts, nach vorangegangener Rechnung, etwas Dunkles und Räthselhaftes enthalte? Und sollte diese Erklärung des spec. Gewichts noch nicht völlig deutlich sein, so lese man weiter und führe die Berechnung der vorgelegten Aufgaben selbst aus, so wird man gewiß einen völlig deutlichen Begriff von dem wahren Wesen des spec. Gewichts erhalten. Ebenso verfahre man mit andern hier vorkommenden Dingen, die man nicht in gewöhnlichen Rechenbüchern findet, dann wird man das Wesen desselben schon fassen. Ueberhaupt lasse sich der junge Lehrer durch einen fremdartigen Ausdruck vom Eindringen in die Sache

Digitized by Google

nicht abschrecken; Er betrachte die Sache nicht als ein Geheimniß, sondern nehme sie so, wie sie gegeben ist, dann wird jede Dunkelheit verschwinden.

Soll übrigens das angewandte Rechnen mit Recht den Namen des Angewandten führen, so müssen darin solche Beziehungen zwischen ungleichartigen Größen, wie sie hier vorkommen, wirklich im praktischen Rechnen behandelt werden, und es darf sich nicht allein nur auf den Kauf und Verkauf der Waaren erstrecken, und wenn jene Beziehungen und Verhältnisse bisher in den gewöhnlichen Rechenbüchern vernachläßigt worden sind, so ist dieses kein Gesetz, daß es auch ferner geschehen müsse; denn nicht die Sache selbst, sondern die Unkunde derselben hat die Mangelhaftigkeit in dieser Hinsicht veranlaßt, und die große Ausbreitung des Maschinenwesens fordert dringend dazu auf, mit rüstigem Geiste auch in diesem Felde Fortschritte zu machen.

8. Wie vielmal so groß ist das Gewicht jedes der in Nr. 7. genannten Stoffe als das des Regenwassers von demselben Volumen? Oder: Wie verhält sich das Gewicht des Regenwassers als Einheit zu dem Gewichte der übrigen in Aufgabe 7. genannten Stoffe, wenn alle gleiches Volumen, nämlich einen Kubikzoll, haben?

1 Kbkzoll Regenwasser : 1 Kbkz. Gold = 393 : 7717 = 1 : 19,638.
1 » » : 1 » Queckslb. = 393 : 5509 = 1 : 14,018.
1 » » : 1 » Blei = 393 : 4459 = 1 : 11,346.
1 » » : 1 » Silber = 393 : 4357 = 1 : 11,084.

Weder diese Resultate, noch die der vorigen Aufgabe stimmen mit der Angabe Munckes überein, denn dessen Angaben sind: das specifische Gewicht des Goldes, gehämmerten = 19,361, des Queckslbers = 13,597, des Blei's = 11,445, des Silbers, gehämmerten = 10,622, des Kupfers, gegossenen, = 8,788, des Messings = 8,400, des Eisens, geschmiedeten, = 7,788 ꝛc. Hieraus folgt, daß die Angaben Nelkenbrechers nicht richtig sein können. Wir wollen aber seine Angaben noch auf eine dritte Weise in der folgenden Aufgabe prüfen.

9. Nach genauen Berechnungen ist ein Par. Kubikfuß = 1,10872 Preuß. Kubikfuß, und ein halbes Preuß. Pfund = 4865,578 Holl. As, ein Preuß. Kubikfuß destillirten Wassers = 66 Preuß. Pfd.; nach diesen und den Angaben des Gewichts der Substanzen in Aufgabe 7. beträgt das specifische Gewicht derselben wie viel?

Da in Aufg. 7. das Volumen der Substanzen 1 Par. Kubikzoll ist, so muß das Volumen des destillirten Wassers gleichfalls ein Kubikzoll sein.

Nun berechne man zunächst das Gewicht eines Pariser Kubikfußes destillirten Wassers in Preuß. Pfd., und verwandle diese in Holl. As.

Das Gewicht eines Pariser Kubikfußes destillirten Wassers = $1{,}10872 \times 66 . 2 . 4865{,}578$ Holl. As = 1728 Kubikzoll nach Pariser Maß; daher ist das Gewicht eines Pariser Kubikzolles destillirten Wassers = $\frac{1{,}10872 . 66 . 2 . 4865{,}578}{1728}$ Holl. Hs = 412,0847 Holl. As; daher ist das specifische Gewicht des

			Muncke.	
Goldes . . .	= 7717	18,73	19,361	
Queckſilbers . .	= 5509	13,37	13,597	
Blei's	= 4439	10,82	11,445	
Silbers . . .	= 4357	10,57	10,622	
Kupfers . . .	= 3475	8,43	8,484	Japaniſches
Meſſings . . .	= 3303	8,02	8,400	
Eiſens . . .	= 3086	7,49	7,788	
Zinnes . . .	= 2877	6,98	7,291	Engl. gegoſſen
Magnets . . .	= 2034	4,94	5,090	Magneteiſenſtein
Diamants . .	= 1336	3,24	3,600	
Marmors . . .	= 1112	2,72	2,717	Kararischer
Pedro-Ximeneswein	= 500	1,27	—	
Oels	= 378	0,917	0,7153	Olivenöl.

dividirt durch 412 Holl. Aß.

Zur Vergleichung habe ich die Angaben von Muncke, wie ſie ſich in Gehlers phyſikaliſchen Wörterbuche, neu bearbeitet von Brandes und Muncke, vorfinden, beigefügt, und obgleich die Reſultate der Rechnung von den Angaben Munckes abweichen, ſo nähern ſie ſich doch den letztern; und man kann hieraus ſehen, wie das ſpecifiſche Gewicht der Körper zu berechnen iſt.

10. Wie ſchwer iſt eine Stange gegoſſenen Eiſens, deren Länge 9 Fuß, Breite 2 Zoll und Dicke 4 Linien iſt? Das ſpecifiſche Gewicht des gegoſſenen Eiſens iſt = 7,251.

Um das Gewicht dieſer Stange Eiſen zu finden, muß man zunächſt ihren kubiſchen Inhalt berechnen; dieſer iſt $9 . 12 . 2 . \frac{1}{3} = 72$ Kubikzoll.

Nun hat man das Gewicht des deſtillirten Waſſers von demſelben Volumen, alſo von 72 Kubikzoll, zu ermitteln; da aber 1 Kubikfuß deſtillirtes Waſſer = 66 ℔, ſo iſt das Gewicht eines Kubikzolls $= \frac{66}{1728}$ ℔, alſo das Gewicht von 72 Kubikzoll deſtillirten Waſſers $= \frac{72 . 66}{1728} = \frac{11}{4}$ ℔.

Da daß ſpezifiſche Gewicht des gegoſſenen Eiſens = 7,251 iſt, ſo heißt dieſes: das Gewicht des gegoſſenen Eiſens von einem gewiſſen Volumen iſt 7,251 mal ſo groß als das Gewicht des deſtillirten Waſſers von demſelben Volumen; daher iſt das Gewicht der gedachten Stange Eiſen $= \frac{11}{4} . 7,251 = 19,94$ ℔ $= 19$ ℔ 30,08 Loth.

11. Einem Schiffskapitain werden zu ſeinen übrigen Verladungen noch 1200 Centner Zink angetragen. Er weiſet den Antrag vorläufig nicht zurück, ſondern er will noch erſt in Ueberlegung ziehen, ob er auch auf ſeinem Schiffe noch hinlänglichen Raum dazu habe; daher ſtellt er eine Rechnung vermittelſt des ſpecif. Gewichts des gegoſſenen Zinks an. Wenn nun das ſpecif. Gewicht des Zinks = 7,213 iſt, welches Volumen nimmt jene Maſſe Zink ein?

Zunächſt müſſen wir das Volumen deſtillirten Waſſers, welches 1200 Centner ſchwer iſt, berechnen. Bei allen Rechnungen dieſer Art muß man ſtets von der wahren Angabe: 1 Kubikfuß deſtillirten Waſſers = 66 ℔ ſchwer, ausgehen; daher das Volumen von 11 ℔ dieſes Waſſers $= \frac{1}{6}$ Ku-

Digitized by Google

bikfuß, also von 110 ℔ oder einem Centner $= \frac{1}{6}$ Kubikfuß, daher das Volumen von 1200 Centnern $= 1200 . \frac{1}{6}$ Kubikfuß $= 2000$ Kubikfuß.

Da nun 2000 Kubikfuß Wasser $= 1200$ Centner, so ist das Gew. von 2000 Kubikfuß Zink $= 7{,}213 . 1200$ Centner; also ist das Volumen von 1200 Centnern Zink $= \frac{2000}{7{,}213} = 277{,}277$ Kubikfuß.

12. In einem nicht langen Zeitraume gaben die Kupferminen zu Fahlun 6 Millionen Centner Kupfer, zu Zeiten Gustav Adolfs betrug die jährliche Ausbeute über 90 000 Centner, zu Carls XII. Zeiten war der jährliche Ertrag nur 35 000 Centner und gegenwärtig ist er nur noch jährlich 10 000 Centner. Wenn nun das specif. Gewicht des gegossenen Kupfers $= 8{,}788$ ist, welche Volumen müssen jene Massen Kupfer haben?

Da 1 Kubikfuß Wasser $= 66$ ℔, so ist 1 Kubikfuß Kupfer $= 8{,}788 . 66$ ℔; also ist das Volumen von einem ℔ Kupfer $= \frac{1}{8{,}788 . 66}$ Kubikfuß; also das Volumen von 1 Centner Kupfer $= \frac{110}{8{,}788 . 66} = \frac{10}{8{,}788 . 6}$ Kubikfuß; daher das Volumen von 6 Mill. Centn. Kupfer $= \frac{60\,000\,000}{8{,}788 . 6} = \frac{10\,000\,000}{8{,}788}$ Kubikfuß $= 1\,137\,915{,}339$ Kubikfuß. Um sich ein ungefähres Bild dieser Masse zu machen, so denke man sich einen Würfel von $104{,}3$ Fuß Länge, eben solcher Breite und eben solcher Höhe; oder wenn man diese Masse in Platten von einem Zoll Dicke zerlegte, so könnte man mit denselben eine Chaussee von 18 Fuß Breite und $31{,}91$ Meilen Länge, also nahe 32 Meilen weit belegen, oder ein Feld von 75 861 Morgen oder von 2 528 Hufen 51 Morgen bedecken.

Ferner sind 90 000 Centner Kupfer $= \frac{150\,000}{8{,}788} = 1706{,}87$ Kubikfuß ꝛc.

13. Man erzählt, um Beispiele von dem Reichthume Augsburgischer Kaufleute zu geben, daß Bartholomäus Welser in Verbindung mit Fugger dem Kaiser Carl V. auf einmal 12000 Tonnen Goldes vorgeschossen haben. Unter einer Tonne Goldes versteht man stets 100 000 und zwar der größten kursirenden Silbermünze; angenommen nun, daß diese Münzen Thalerstücke, deren 10 $=$ 1 Mark f. S. oder 2-Guldenstücke, und daß die Auszahlung in Dukaten à $4\frac{1}{2}$ Fl. geschehen, daß ferner 67 Dukaten $= 23\frac{1}{2}$ Karat fein Gold, so ist die Frage, welches das Volumen dieser Masse Gold in Dukaten gewesen sei? Dazu hat man noch folgende Angaben: das specifische Gewicht des gehämmerten Goldes $= 19{,}361$, des gehämmerten Kupfers $= 9{,}000$.

Digitized by Google

Da 1 Dukaten = $4\frac{1}{2}$ Fl., 2 Fl. = 1 Thlr, so sind $4\frac{1}{2}$ Fl. = $\frac{4\frac{1}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ Thlr., folglich sind 12000 Tonnen Goldes = 12000 . 100000 : $\frac{9}{4}$ = $\frac{1\,600\,000\,000}{3}$ Dukaten.

Weil nun 67 Dukaten = $23\frac{1}{2}$ Karat f. Gold + $\frac{1}{2}$ Karat Kupfer so ist das Volumen des Goldes und des Kupfers von diesem Gewichte zu berechnen.

1 Kubikfuß destillirtes Wasser = 66 ℔, also ein Kubikfuß Gold = $19{,}_{361}$. 66 ℔, daher 1 ℔ = $\frac{1}{19{,}_{361} . 66}$ Kubikfuß, und 1 ℔ = 2 Mark = 48 Karat, also 1 Karat Gold = $\frac{1}{48 . 19{,}_{361} . 66}$ Kubikf.; folglich ist das Volumen von 67 Dukaten = $23\frac{1}{2}$ Karat Gold = $\frac{23\frac{1}{2}}{48 . 19{,}_{361} . 66}$ Kubikfuß.

Ferner ist 1 Kubikfuß Kupfer = 9 . 66 ℔, also 1 ℔ Kupfer = $\frac{1}{9 . 66}$ Kubikfuß, daher $\frac{1}{2}$ Karat Kupfer = $\frac{\frac{1}{2}}{48 . 9 . 66}$ Kubikfuß, daher das Volumen von 67 Dukaten an Gold und Kupfer = $\frac{23\frac{1}{2}}{48 . 19{,}_{361} . 66}$ + $\frac{\frac{1}{2}}{48 . 9 . 66}$ = $\frac{47 . 9 + 19{,}_{361}}{2 . 48 . 19{,}_{361} . 9 . 66}$ = $\frac{442{,}_{361}}{2 . 48 . 19{,}_{361} . 9 . 66}$ Kubikfuß. Hieraus folgt endlich, daß $\frac{1\,600\,000\,000}{3}$ Dukaten = $\frac{1\,600\,000\,000 . 442{,}_{361}}{3 . 67 . 2 . 48 . 19{,}_{361} . 9 . 66}$ = $\frac{44\,236\,100\,000\,000}{3 . 67 . 3 . 2 . 19{,}_{361} . 9 . 66}$ = $\frac{11\,059\,025\,000\,000}{3\,467\,380\,851}$ = $3218{,}_{286}$ Kubikfuß.

14. Die Erfahrung lehrt, daß jeder in Wasser untergetauchte Körper so viel an seinem Gewichte verliert, als das Gewicht von dem Volumen des Wassers beträgt, das der untergetauchte Körper durch sein Volumen beim Untertauchen verdrängt und einnimmt. Dieses soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Das specifische Gewicht des Alabasters = 2,7, des Krystalls = = $2{,}_{694}$, des Basalts = $2{,}_{864}$, des Bernsteins = $1{,}_{085}$, des Bleis = $11{,}_{445}$, des geschmiedeten Eisens = $7{,}_{788}$, des grünen Glases = $2{,}_{642}$ ꝛc. Wie schwer ist ein Kubikfuß von jedem Stoffe?

Das specifische Gewicht eines Stoffes ist die Zahl, mit welcher man das Gewicht destillirten Wassers von demselben Volumen des gegebenen Stoffes multipliciren muß, um das Gewicht dieses Stoffes zu erhalten. Da

nun das Gewicht von einem Kubikfuß destillirten Wassers = 66 ℔ ist, so ist das Gewicht von

1	Kubikfuß	Alabaster	= 2,7 . 66 =	178,2	℔
1	»	Krystall	= 2,694 . 66 =	177,804	℔
1	»	Basalt	= 2,864 . 66 =	189,024	℔
1	»	Bernstein	= 1,085 . 66 =	71,610	℔
1	»	Blei	= 11,445 . 66 =	755,37	℔
1	»	Eisen geschm.	= 7,788 . 66 =	514,008	℔
1	»	Glas, grünes	= 2,642 . 66 =	174,372	℔

Wird nun ein Kubikfuß von diesen genannten Stoffen in destillirtem Wasser untergetaucht, so verdrängt jeder Stoff durch seinen Rauminhalt einen Kubikfuß Wasser aus seiner Stelle; diese Quantität Wasser hielt dem übrigen das Gleichgewicht, oder die übrige Masse des Wassers wirkte mit einem solchen Drucke auf den gedachten Kubikfuß Wasser, als dieser jener einen Widerstand leistete; dieser Widerstand ist aber das Gewicht von einem Kubikfuß Wasser von 66 ℔, daher wirkt das übrige Wasser mit einem Drucke von 66 ℔ auf den Raum, welchen der neue Körper eingenommen hat, und daher muß der Körper an seinem Gewichte ebenso viel verlieren. Zur recht klaren Anschauung stelle man sich die Sache so vor: das Wasser sei in Ruhe oder im Gleichgewichte; nun denke man sich in diesem Wasser einen Kubikfuß desselben begrenzt und gleichsam ausgeschnitten und ausgehoben, so würde, wenn dieser Raum leer bliebe, das Wasser sich bestreben, den leeren Raum wieder auszufüllen, das Gleichgewicht wiederherzustellen und das Eindringen des Wassers in diesen leeren Raum würde mit der Kraft von 66 ℔ vor sich gehen. In demselben Augenblick aber, in welchem man den Kubikfuß Wasser heraushebt, denke man sich zugleich einen andern Körper von einem Kubikfuß in den leeren Raum gestellt, so bliebe die übrige Masse des Wassers noch in Ruhe, wenn auch die neue Masse 66 ℔ schwer wäre, und dieselbe würde also in dem Wasser weder sinken noch steigen, sie hätte gleichsam ihr Gewicht im Wasser verloren; wiegt nun der Kubikfuß des neuen Körpers mehr als 66 ℔, so sinkt er mit dem Ueberschusse seines Gewichts über 66 ℔ zu Boden, weniger als 66 ℔, so wird er mit dem Ueberschusse der 66 ℔ über sein Gewicht von dem übrigen Wasser in die Höhe gehoben, und er muß auf dem Wasser schwimmen. Daraus folgt nun, daß ein Kubikfuß von einem gegebenen Stoffe, im Wasser untergetaucht, 66 ℔ an seinem Gewichte verliert; daher ist das Gewicht von einem Kubikfuß

Alabaster	im Wasser	= 178,2	— 66 =	112,2	℔
Krystall	» »	= 177,804	— 66 =	111,804	℔
Basalt	» »	= 189,024	— 66 =	123,024	℔
Bernstein	» »	= 71,61	— 66 =	5,61	℔
Blei	» »	= 755,37	— 66 =	689,37	℔

Digitized by Google

Eisen im Wasser $= 514{,}008 - 66 = 448{,}008$ ℔
Glas » » $= 174{,}372 - 66 = 108{,}372$ ℔

Vorstehende Resultate kann man auch so schreiben;

Alabaster wiegt im Wasser $(2{,}7 - 1).66 = 1{,}7 \,.66$ ℔
Krystall » » » $(2{,}694 - 1).66 = 1{,}694 \,.66$ ℔
ꝛc. ꝛc. ꝛc.
Blei » » » $(11{,}445 - 1) = 10{,}445 \,.66$ ℔
Eisen » » » $(7{,}788 - 1) = 6{,}788 \,.66$ ℔

d. h. das Gewicht von einem Kubikfuße eines gegebenen Stoffes im destillirten Wasser ist gleich dem Produkte aus seinem, um Eins verminderten specifischen Gewichte und dem Gewichte von einem Kubikfuß Wasser oder 66 ℔.

Ferner ist das Volumen von einem Pfunde destillirten Wassers $= \frac{1}{66}$ Kubikfuß; daher ist das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfuß Alabasters $= 2{,}7$ ℔.

Das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfuß Krystall $= 2{,}694 \,.1$ Pfd.
» » » » » Basalt $= 2{,}864 \,.1$ »
» » » » » Blei $= 11{,}445 \,.1$ »
» » » » » Eisen $= 7{,}788 \,.1$ »

daher wiegt im destillirten Wasser $\frac{1}{66}$ Kubikfuß

Alabaster $2{,}7 - 1 = 1{,}7$ ℔ Blei $11{,}445 - 1 = 10{,}445$ ℔
Krystall $2{,}694 - 1 = 1{,}694$ » Eisen $7{,}788 - 1 = 6{,}788$ »
Basalt $2{,}864 - 1 = 1{,}864$ »

Dieses und den vorigen Satz kann man in folgendem allgemeinen Satze aussprechen: Das Gewicht von einem gegebenen Volumen eines gewissen Stoffes im destillirten Wasser ist gleich dem Produkte aus seinem um Eins verminderten specifischen Gewichte und dem Gewichte des destillirten Wassers von demselben Volumen.

15. Das specifische Gewicht des Seewassers ist $= 1{,}0286$. Wie schwer wird ein a) Kubikfuß, b) Centner der in Aufgabe 14. genannten Stoffe im Seewasser sein?

a) Das Gewicht eines Kubikfußes Seewasser $= 1{,}0286 \,.\, 66$ Pfd., daher wird ein Kubikfuß von jenen Stoffen an seinem Gewichte $1{,}0286 \,.\, 66$ Pfd. verlieren; daher wiegt ein Kubikfuß

Alabaster im Seewasser $(2{,}7 - 1{,}0286).66$ Pfd. $= 110{,}3124$ Pfd.
Krystall » » $(2{,}698 - 1{,}0286).66$ » $= 110{,}1804$ »
Basalt » » $(2{,}864 - 1{,}0286).66$ » $= 121{,}1364$ »
Bernstein » » $(1{,}085 - 1{,}0286).66$ » $= 3{,}7224$ »
Blei » » $(11{,}445 - 1{,}0288).66$ » $= 687{,}4824$ »
Eisen » » $(7{,}788 - 1{,}0286).66$ » $= 446{,}1204$ »
Glas » » $(2{,}642 - 1{,}0286).66$ » $= 196{,}4844$ »

Digitized by Google

b) Da das Gewicht von 1 Kubikfuß Seewasser $= 1{,}0286 . 66$ Pfd., so ist das Volumen von 1 Pfd. Seewasser $= \frac{1}{1{,}0286 . 66}$ Kubikfuß. Aus demselben Grunde ist das Volumen von 1 Pfd. Alabaster $= \frac{1}{2{,}7 . 66}$ Kubikfuß. Wird nun 1 Pfd. Alabaster in Seewasser eingetaucht, so verdrängt 1 Pfd. Alabaster $\frac{1}{2{,}7 . 66}$ Kubikfuß Seewasser, und wie viel dieses Volumen Seewasser an Gewicht beträgt, ein solches Gewicht muß also 1 Pfd. Alabaster im Seewasser verlieren. Das Gewicht von $\frac{1}{2{,}7 . 66}$ Kubikf. destillirten Wassers $= \frac{1}{2{,}7 . 66} . 66$ Pfd. $= \frac{1}{2{,}7}$ Pfd.; daher das Gewicht von $\frac{1}{2{,}7 . 66}$ Kubikfuß Seewasser $= 1{,}0286 . \frac{1}{2{,}7} = \frac{1{,}0286}{2{,}7}$ Pfd.; und daher verliert also 1 Pfd. Alabaster in Seewasser $\frac{1{,}0286}{2{,}7}$ Pfd., oder 1 Pfd. Alabaster wiegt im Seewasser nur $1 - \frac{1{,}0286}{2{,}7} = \frac{2{,}7 - 1{,}0286}{2{,}7}$ Pfunde; daher wiegt ein Centner Alabaster im Seewasser $\left(\frac{2{,}7 - 1{,}0286}{2{,}7}\right) . 110$ Pfd. Nach eben den Schlüssen erhält man:

1 Centner Alabaster wiegt in Seewasser $\left(\frac{2{,}7 - 1{,}0286}{2{,}7}\right) . 110 = 68{,}094$ ℔

1 „ Krystall „ „ „ $\left(\frac{2{,}698 - 1{,}0286}{2{,}698}\right) . 110 = 68{,}063$ „

1 „ Basalt „ „ „ $\left(\frac{2{,}864 - 1{,}0286}{2{,}864}\right) . 110 = 70{,}493$ „

1 „ Bernstein „ „ „ $\left(\frac{1{,}085 - 1{,}0286}{1{,}085}\right) . 110 = 5{,}718$ „

1 „ Blei „ „ „ $\left(\frac{11{,}445 - 1{,}0286}{11{,}445}\right) . 110 = 100{,}114$ „

1 „ Eisen „ „ „ $\left(\frac{7{,}788 - 1{,}0286}{7{,}788}\right) . 110 = 95{,}471$ „

1 „ Glas „ „ „ $\left(\frac{2{,}642 - 1{,}0286}{2{,}642}\right) . 110 = 68{,}174$ „

Aus a) ergiebt sich folgender allgemeine Satz:

Ein gewisser Stoff von einem gegebenen Volumen hat ein solches Gewicht in einer Flüssigkeit, als das Produkt aus dem specifischen Gewichte des Stoffes, um das specifische Gewicht der Flüssigkeit vermindert, und dem Gewichte des destillirten Wassers von demselben gegebenen Volumen, beträgt.

Digitized by Google

Aus b) folgt dieser Satz:

Ein gewisser Stoff von gegebenem Gewichte hat ein solches Gewicht in einer Flüssigkeit, als das Produkt aus dem specifischen Gewichte des Stoffes, um das specifische Gewicht vermindert, und dem gegebenen Gewichte des Stoffes durch das specifische Gewicht des Stoffes dividirt, beträgt.

16. Das specifische Gewicht des flüssigen Queckſilbers ist $= 13{,}_{597}$, das des gegossenen Eisens $= 7{,}_{251}$. Wie schwer ist eine eiserne Kugel von 6 Zoll Durchmesser, und indem sie in Queckſilber schwimmt, wie tief wird sie in dasselbe einsinken?

Der kubische Inhalt einer Kugel ist gleich $\frac{1}{6}$ von dem Kubus ihres Durchmessers mit der Verhältnißzahl $\pi = 3{,}_{14159}$ multiplicirt; daher ist der Inhalt gedachter Kugel $= \frac{1}{6} . 6 . 6 . 6 . 3{,}_{14159} = 6 . 6 . 3{,}_{14159} = 113{,}_{09724}$ Kubikzoll.

1 Kubikfuß destillirtes Wasser $= 66$ ℔, also 1 Kubikzoll $= \frac{66}{1728}$ $= \frac{11}{288}$ ℔; daher $113{,}_{09724}$ Kubikzoll destillirten Wassers $= 113{,}_{09724} \times \frac{11}{288}$ ℔. Folglich ist das Gewicht der eisernen Kugel $= 7{,}_{251} . 113{,}_{09724} \times \frac{11}{288}$ ℔, und das Gewicht des Queckſilbers von demselben Volumen $= 13{,}_{597} . 113{,}_{09724} . \frac{11}{288}$ ℔. Daher kann die eiserne Kugel durch seine Schwere nur eine solche Quantität des Queckſilbers in demselben verdrängen, als diese dem Gewichte nach gleich dem Gewichte der Kugel ist; folglich ist das Volumen des durch die Schwere der eisernen Kugel aus der Stelle gedrängten Queckſilbers $= 7{,}_{251} . 113{,}_{09724} . \frac{11}{288} : 13{,}_{597} . 113{,}_{09724} . \frac{11}{288}$ $= \frac{7{,}_{251}}{13{,}_{597}}$ von gedachter Kugel $= 0{,}_{53326}$ mal die Kugel $= 60{,}_{3125}$ Kubikzoll. Also sinken nur $60{,}_{3125}$ Kubikzoll der Kugel ein und es ragen daher über dem Queckſilber noch $46{,}_{78476}$ Kubikzoll der eisernen Kugel hervor. Da der Inhalt der halben Kugel $= 56{,}_{54863}$ Kubikzoll beträgt, so sind also noch $3{,}_{76387}$ Kubikzoll über der Halbkugel unter der Oberfläche des Queckſilbers, welches etwas über $\frac{1}{7}$ Zoll beträgt; also ragen beinahe $2\frac{6}{7}$ Zoll dieser Kugel über der Oberfläche des Queckſilbers hervor.

17. Das specifische Gewicht des Achats ist $= 2{,}_{590}$, der Braunkohle $= 1{,}_{280}$, des Carniol $= 2{,}_{620}$, des Diamant $= 3{,}_{600}$, des Elfenbeins $= 1{,}_{917}$, des gemeinen Granits $= 2{,}_{956}$, des Hyazinths $= 4{,}_{680}$, der Lava $= 2{,}_{832}$, des Meerschaums $= 1{,}_{600}$, des Porzellans $= 2{,}_{293}$, ꝛc. Wie verhalten sich die absoluten Gewichte dieser Körper, wenn sie gleiches Volumen haben?

Da das specifische Gewicht eines Körpers die Zahl ist, mit welcher man das Gewicht des destillirten Wassers von gleichem Volumen zu multipliciren hat, um das Gewicht des Körpers zu erhalten, so ist das Gewicht von einem Kubikfuße des Achats $= 2{,}_{59} . 66$ Pfd., der Braunkohle $= 1{,}_{28} . 66$ Pfd., des Carniol $= 2{,}_{62} . 66$ Pfd. ꝛc.

Digitized by Google

Das Gewicht eines Körpers, ohne Rücksicht auf das Gewicht eines andern, heißt das absolute Gewicht desselben. Die Körper werden gewöhnlich in der Luft gewogen, und das Gewicht, welches man für einen Körper erhält, wird auch das absolute Gewicht desselben genannt. Genau die Sache genommen, ist dieses unrichtig; denn das Gewicht eines Körpers, welches man durch Wägung in der Luft erhält, ist bereits mit Rücksicht auf das Gewicht der Luft von demselben Volumen des Körpers herausgebracht. Denn nicht allein in Wasser, sondern in jeder Flüssigkeit verliert ein Körper an seinem Gewichte, und zwar genau so viel, als sein Volumen der Flüssigkeit an Gewicht beträgt. Daher fällt in der Luft eine Feder viel langsamer zur Erde als ein Schrotkorn, dagegen eilen aber beide mit gleicher Schnelligkeit der Erde zu, wenn ihr Fall im luftleeren Raume geschieht. Das Gewicht, welches ein Körper in der Luft verliert, wird aber deswegen nicht berücksichtigt, weil dieser Verlust sehr gering ist; denn er beträgt ungefähr $\frac{1}{770}$, oder ein Kubikfuß Luft $= \frac{66}{770}$ Pfd. Wir wollen also vorläufig das Gewicht der Luft bei den absoluten Gewichten der Körper nicht in Rechnung ziehen, wie es gewöhnlich geschieht, und so erhalten wir folgende Proportionen:

1 Kubikfuß Achat : 1 Kubikfuß Braunkohle $= 2{,}_{59} . 66 : 1{,}_{28} . 66 = 2{,}_{59} : 1{,}_{28}$;

1 Kbf. Braunkohle : 1 Kbf. Carniol $= 1{,}_{28} . 66 : 2{,}_{62} . 66 = 1{,}_{28} : 2{,}_{62}$;

1 Kbf. Carniol : 1 Kbf. Diamant $= 1{,}_{62} . 66 : 3{,}_{6} . 66 = 1{,}_{62} : 3{,}_{6}$; ꝛc.

Hieraus folgt der Satz:

Die absoluten Gewichte zweier Körper von gleichem Volumen stehen im geraden Verhältnisse ihrer specifischen Gewichte.

18. Das specifische Gewicht des Ahornholzes ist $= 0{,}_{75}$, des Apfelbaumholzes $= 0{,}_{793}$, des Birnbaumholzes $= 0{,}_{661}$, des Brasilienholzes $= 1{,}_{031}$, des Buchenholzes $= 0{,}_{852}$, des Buchsbaumholzes Holländ. $= 1{,}_{026}$, des Campecheholzes $= 0{,}_{913}$, des Cedernholzes, Indischen $= 1{,}_{315}$, des Citronenholzes $= 0{,}_{726}$; wie verhalten sich die absoluten Gewichte dieser Körper von ungleichem Volumen?

Aus den Angaben der Aufgabe folgt, daß ein Kubikfuß des Ahornholzes $= 0{,}_{75} . 66$ Pfd., also V Kubikfuß $= V . 0{,}_{75} . 66$ Pfd.

Eben so ist 1 Kubikfuß Apfelbaumholzes $= 0{,}_{793} . 66$ Pfd., daher sind V′ Kubikfuß dieses Holzes $= V' . 0{,}_{793} . 66$ Pfd.

Ferner 1 Kubikfuß Birnbaumholzes $= 0{,}_{661} . 66$ Pfd., also V″ Kubikfuß Birnbaumh. $= V'' 0{,}_{661} . 66$ Pfd. ꝛc. Daher ist

V Kbf. Ahornh. : V′ Kbf. Apfelbaumh. $= V . 0{,}_{75} . 66 : V' . 0{,}_{793} . 66$

V′ Kbf. Apfelbaumh. : V″ Kbf. Birnbaumh. $= V' . 0{,}_{793} . 66 : V'' . 0{,}_{661} . 66$ ꝛc.

oder V Kbf. Ahornh. : V′ Kbf. Apfelbaumh. $= V . 0{,}_{75} : V' . 0{,}_{793}$

V′ Kbf. Apfelbaumh. : V″ Kbf. Birnbaumh. $= V' . 0{,}_{793} : V'' . 0{,}_{661}$ ꝛc.

Digitized by Google

Daher folgender Satz:

Die absoluten Gewichte zweier Körper stehen im geraden Verhältnisse der Produkte aus ihren Volumen und specifischen Gewichten. Deshalb verhalten sich die absoluten Gewichte von 3 Kubikfuß Brasilienholzes zu 5 Kubikfuß Buchenholzes $= 3 . 1{,}031 : 5 . 0{,}852 = 3{,}093 : 4{,}260 = 1{,}031 : 1{,}42 = 1031 : 1420$.

19. Das specifische Gewicht des Amerik. Ebenholzes ist $= 1{,}331$, des Eichenkernholzes $= 1{,}170$, des Erlenholzes $= 0{,}680$, des Eschenholzes $= 0{,}845$, des Fernambuckholzes $= 1{,}014$, des Span. Flüederholzes $= 0{,}770$, des Franzosenholzes $= 1{,}333$, des Granatenbaumholzes $= 1{,}354$; in welchem Verhältnisse stehen die Volumen dieser Hölzer, wenn sie gleiche absolute Gewichte haben?

Das absolute Gewicht des Kubikfußes vom Ebenholze ist $= 1{,}331 . 66$ ℔; also V Kubikfuß dieses Holzes $= V . 1{,}331 . 66$ ℔. Das absolute Gewicht von 1 Kubikfuß des Eichenholzes $= 1{,}17 . 66$ ℔, also V′ Kubikfuß von diesem Holze $= V' . 1{,}17 . 66$ ℔. ꝛc.

Sollen nun die absoluten Gewichte dieser Hölzer gleich sein, so müssen $V . 1{,}331 . 66$ ℔ vom Ebenholze $= V' . 1{,}17 . 66$ ℔ vom Eichenholze sein, ist V Kubikf. Ebenholz : V′ Kbf. Eichenholz $= 1{,}17 . 66 : 1{,}331 . 66 = 1{,}17 : 1{,}331$.

Oder: 1 Kubikfuß des Erlenholzes $= 0{,}68 . 66$ ℔; nun suche man das Volumen v des Erlenholzes, welches gerade 66 ℔ wiegt. Dieses wird man aber leicht durch den Satz finden können:

Gleiche Volumen von einem und demselben Holze haben gleiche absolute Gewichte und ist ein Volumen 2, 3, 4, 5 ꝛc. mal so groß als ein anderes von demselben Holze; so muß auch das absolute Gewicht des ersten Volumen 2, 3, 4, 5 ꝛc. mal so groß als das absolute Gewicht des andern Volumen sein; oder die Volumen einer und derselben Materie sind ihren absoluten Gewichten proportional, und umgekehrt: die absoluten Gewichte von einem und demselben Stoffe sind ihren Volumen proportionirt. Daher

$0{,}68 . 66$ ℔ : 66 ℔ = 1 Kubikfuß Erlenholz : v Kubikfuß Erlenholz;

$0{,}845 . 66$ ℔ : 66 ℔ = 1 Kubikfuß Eschenholz : v′ Kubikfuß Eschenholz.

Diese Proportionen kann man auch so stellen:

v Kubikfuß Erlenholz : 1 Kubikfuß $= 66 : 0{,}68 . 66 = 1 : 0{,}68$;

1 Kubikfuß : 1 Kbf. Eschenholz $= 0{,}845 . 66 : 66 = 0{,}845 : 1$.

Durch Zusammensetzung dieser beiden Proportionen erhält man:

v Kubikfuß Erlenholz : v′ Kubikfuß Eschenholz $= 0{,}845 : 0{,}68$.

Da nun sowohl v Kubikfuß Erlenholz als auch v′ Kubikfuß Eschenholz 66 Pfund wiegen, so hat man aus dieser und obiger Proportion folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn die absoluten Gewichte zweier Stoffe gleich sind: so stehen ihre Volumen im umgekehrten Verhältnisse ihrer specifischen Gewichte; und umgekehrt: die specifischen Gewichte zweier Stoffe bei gleichen absoluten Gewichten stehen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Volumen. Der zweite Satz ist nicht völlig die Umkehrung des ersten. Denn jeder mathematische Satz (jedes hypothetische Urtheil) besteht aus zwei Sätzen, von denen der eine die Bedingung (oder den Grund), der andere das Bedingte (oder die Folge) enthält. Der Satz, welcher die Bedingung (den Grund) angiebt, fängt in der Regel mit: wenn, der andere, welcher das Bedingte (die Folge) setzt, mit: so an.

Will man nun einen Satz umkehren: so muß man die Bedingung (den Grund) zum Bedingten (zur Folge) und das Bedingte (die Folge) zur Bedingung (zum Grunde) machen. Daher heißt die Umkehrung des vorstehenden Satzes: Wenn die Volumen zweier Stoffe im umgekehrten Verhältnisse ihrer specifischen Gewichte stehen: so sind ihre absoluten Gewichte einander gleich.

Und dieser Satz ist vollkommen wahr; denn das absolute Gewicht einer Materie ist stets gleich dem Produkte aus ihrem Volumen, ihrem specifischen Gewichte und 66 Pfund, wenn die Einheit des Volumens 1 Kubikfuß ist. Denn nach vorstehendem Satze sei:

V Kubikfuß Fernambuckholz : V′ Kubikfuß Fliederholz $= 0{,}770 : 1{,}014$; so ist V Kubikfuß Fernambuckholz . $1{,}014 =$ V′ Kubikfuß Fliederholz . $0{,}770$. Nun sind V Kbf. Fernambuckholz $=$ V . $1{,}014 \cdot 66$ ℔ und V′ Kbf. Fliederholz $=$ V′ . $0{,}770 \cdot 66$ ℔; da aber V . $1{,}014 =$ V′ . $0{,}770$, so ist auch V . $1{,}014 \cdot 66$ ℔ $=$ V′ . $0{,}770 \cdot 66$ ℔, d. h. die absoluten Gewichte dieser Hölzer sind einander gleich.

20. Das specifische Gewicht des Hollunderbaumholzes $= 0{,}695$, des Kirschbaumholzes $= 0{,}715$, des Korkholzes $= 0{,}240$, des Lindenholzes $= 0{,}604$, des Lorbeerbaumholzes $= 0{,}822$, des Mahagoni $= 1{,}063$, des Maulbeerbaums $= 0{,}897$, des Mispelbaums $= 0{,}944$, des Olivenbaums $= 0{,}927$, des Orangenbaums $= 0{,}705$, des Pappelbaums $= 0{,}383$, des Pflaumenbaums $= 0{,}785$, der Tanne, weißen $= 0{,}550$, rothen $= 0{,}498$, der Ulme $= 0{,}671$, des Wachholders $= 0{,}556$, des Wallnußbaums $= 0{,}671$, der Weide $= 0{,}585$, der Weinrebe $= 1{,}327$; wie verhalten sich die Volumen dieser Hölzer, wenn sie ungleiche absolute Gewichte haben?

Es ist das absolute Gewicht von 1 Kubikfuß des Hollunderbaums $=$ $= 0{,}695 \cdot 66$ ℔, und das Volumen von P Pfunden dieses Baumes sei V, so ist $0{,}695 \cdot 66 : P = 1$ Kbf. : V Kbf.

Das absolute Gewicht von 1 Kbf. des Kirschenbaumes $= 0{,}715 \cdot 66$ ℔, und sei P′ das absolute Gewicht von V′ Kubikfuß desselben Holzes, so hat man folgende Proportionen:

Digitized by Google

$0{,}695 . 66 : P = 1$ Kubikfuß : V Kubikfuß des Hollunderbaums

$P' : 0{,}715 . 66 = V'$ Kubikfuß des Kirschbaums : 1 Kubikfuß;

daher durch Zusammensetzung:

V' Kubikfuß des Kirschbaums : V Kubikfuß des Hollunderbaums $= 0{,}695 . 66 . P' : 0{,}715 . 66 . P = 0{,}695 . P' : 0{,}715 . P.$

Daher der Satz:

Die Volumen zweier Stoffe von ungleichen absoluten Gewichten stehen in dem zusammengesetzten Verhältnisse aus dem geraden Verhältnisse ihrer absoluten und dem umgekehrten Verhältnisse ihrer specifischen Gewichte.

21. In welchem Verhältnisse stehen die specifischen Gewichte zweier Körper, wenn sie gleiche Volumen, aber ungleiche absolute Gewichte haben? Es ist zum Beispiel 1 Kubikfuß Korkholz $= 15{,}84$ Pfunden und 1 Kubikfuß des Lindenholzes $= 39{,}864$ Pfunden schwer. Wie verhalten sich also die specifischen Gewichte dieser Hölzer?

Da das specifische Gewicht einer Materie gleich ihrem absoluten Gewichte, dividirt durch das absolute Gewicht des destillirten Wassers von demselben Volumen ist, so ist, weil das absolute Gewicht von 1 Kubikfuß destillirten Wassers $= 66$ ℔, das specifische Gewicht des Korkholzes $= \frac{15{,}84}{66}$ und das des Lindenholzes $= \frac{39{,}864}{66}$; daher ist: Spec. Gewicht des Korkholzes : Spec. Gew. des Lindenholzes $= \frac{15{,}84}{66} : \frac{39{,}864}{66} = 15{,}84 : 39{,}864 = 0{,}24 : 0{,}604 = 240 : 604 = 60 : 151.$

Daher der Satz: Wenn zwei Körper gleiche Volumen haben: so sind ihre specifischen Gewichte ihren absoluten Gewichten proportional.

22. In welchem Verhältnisse stehen die specifischen Gewichte zweier Körper, wenn ihre absoluten Gewichte einander gleich, ihre Volumen aber ungleich sind? Z. B. Ein Centner vom Lorbeerbaumholze hat ein Volumen von $2\frac{34}{1233}$ Kubikfuß und ein Centner von Mahagoni ein Volumen von $1\frac{226}{396}$ Kubikfuß.

Das specifische Gewicht dieser Körper zu finden, muß man das absolute Gewicht derselben durch das absolute Gewicht des destillirten Wassers von demselben Volumen dividiren; daher ist das specifische Gewicht des Lorbeerbaumholzes $= \frac{110\text{ ℔}}{2\frac{34}{1233} . 66\text{ ℔}}$ und des Mahagoni $= \frac{110\text{ ℔}}{1\frac{226}{396} . 66\text{ ℔}}$. Folglich: Specifisches Gewicht des Lorbeerbaums : Specifischen Gewichte des Mahagoni $= \frac{110}{2\frac{34}{1233} . 66} : \frac{110}{1\frac{226}{396} . 66} = \frac{1}{2\frac{34}{1233}} : \frac{1}{1\frac{226}{396}} = 1\frac{226}{396} : 2\frac{34}{1233} =$

Digitized by Google

$\frac{825}{360} : \frac{2400}{1233} = \frac{1}{360} : \frac{4}{1233} = \frac{1}{123} : \frac{4}{411} = 411 : 532.$ Daher der Satz:

Wenn die absoluten Gewichte zweier Körper gleich sind: so stehen ihre specifischen Gewichte im umgekehrten Verhältnisse ihrer Volumen.

23. In welchem Verhältnisse stehen die specifischen Gewichte zweier Körper, wenn sowohl ihre absoluten Gewichte als auch ihre Volumen verschieden sind? Z. B. $8\frac{108}{289}$ Kubikfuß des Maulbeerbaums wiegen 495 und $9\frac{73}{103}$ Kubikfuß des Olivenbaums wiegen 594 ℔.

Da stets das specifische Gewicht eines Körpers gleich seinem absoluten Gewichte dividirt durch das absolute Gewicht des destillirten Wassers von demselben Volumen ist; so ist das specifische Gewicht des Maulbeerbaums $= \frac{495\ ℔}{8\frac{108}{289} . 66\ ℔}$ und das des Olivenbaumes $= \frac{594\ ℔}{9\frac{73}{103} . 66\ ℔}$; daher ist

Specifisches Gewicht des Maulbeerbaums : Specifischen Gewichte des Olivenbaums $= \frac{495}{8\frac{108}{289} . 66} : \frac{594}{9\frac{73}{103} . 66} = \frac{495}{8\frac{108}{289}} : \frac{594}{9\frac{73}{103}} = 495 \times 9\frac{73}{103} : 594 . 8\frac{108}{289} = 299 : 309.$

Allgemeiner Satz: Wenn sowohl die absoluten Gewichte zweier Körper als auch ihre Volumen verschieden sind: so ist das Verhältniß ihrer specifischen Gewichte gleich dem geraden Verhältnisse ihrer absoluten Gewichte dividirt durch ihre zugehörigen Volumen, oder gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus dem geraden Verhältnisse ihrer absoluten Gewichte und dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Volumen.

24. Nelkenbrecher bemerkt Folgendes: »Der Franz. Kubikfuß destillirtes Wasser wiegt im luftleeren Raume, nach poids de marc (Markgewicht):

a) bei der Temperatur von 0° = 70 Pfund 60 Grains;

b) in der Luft = 69 Pfund 14 Onces 5 Gros 57 Grains;

c) bei der Temperatur von 5° = 70 Pfund 1 Gros 16 Grains;

d) in der Luft = 69 Pfund 14 Onces 6 Gros 13 Grains;

e) bei der Temperatur von 20° in freier Luft = 69 Pfund 12 Onces 4 Gros 30,5 Grains;

f) der Kubikfuß Luft = 1 Once 3 Gros 3 Grains;

g) der Cylinder-Fuß Luft = 1 Once 0 Gros 48,642857 Grains bei der Temperatur von 10°;

h) das Verhältniß der Luft zum Wasser bei dieser Temperatur, wie 1 zu 810.«

Wie groß ist das Gewicht eines Kubikfußes der Luft nach jeder dieser Angaben, und welches das Verhältniß des Gewichts der Luft zu dem des Wassers von gleichem Volumen oder das specifische Gewicht der Luft? Hiezu

Digitized by Google

sind folgende Angaben erforderlich: das Pfund Markgewicht = 16 Onces à 8 Gros à 3 Deniers à 24 Grains. Hieraus folgt 1 ℔ = 16 . 8 . 3 . 24 = 9216 Grains.

A) 70 ℔ 60 Grains = 645 180 Grains,

69 ℔ 14 Onces 5 Gros 57 Grains = 644 385 Grains;

daher ist das Gewicht der Luft bei 0° = 795 Grains; folglich ist das specifische Gewicht der Luft bei 0° = $\frac{795}{645180}$ = 0,0012322 oder

Gewicht von 1 Kbf. Luft : Gewicht von 1 Kbf. Wasser = 1 : 811,3585.

B) 70 ℔ 1 Gros 16 Grains = 645 208 Grains,

69 ℔ 14 Onces 6 Gros 13 Grains = 644 400 Grains;

daher das Gewicht von 1 Kubikfuß Luft = 804 Grains; also 1 Kubikfuß Luft : 1 Kbf. Wasser = 804 : 645 208 = 1 : 802,4975 und das specifische Gewicht der Luft = $\frac{804}{645208}$ = 0,0012461.

C) Da 1 Kubikfuß Wasser in freier Luft bei der Temperatur von 20° 69 Pfd. 12 Onces 4 Gros 30,5 Grains und 1 Kubikfuß Luft bei derselben Temperatur 1 Once 3 Gros 3 Grains wiegt, so muß man das Gewicht der Luft zu dem des Wassers hinzusetzen, um das des Wassers im luftleeren Raume zu erhalten, und daher ist dieses = 69 Pfund 13 Onces 7 Gros 33,5 Grains = 643 929,5 Grains. Das Gewicht der Luft = 795 Grains; daher ist

Gewicht der Luft : Gewichte des Wassers = 795 : 643 929,5 = 1 : 809,974.

Specifisches Gewicht = 0,0012346.

25. Welches Gewicht hat die Luft eines Zimmers, das 28 Fuß lang, 20 Fuß breit und 12 Fuß hoch ist, wenn man das specifische Gewicht der Luft = 0,0012346 annimmt?

Der kubische Inhalt des Zimmers ist = 28 . 20 . 12 = 6720 Kubikfuß. Da nun 1 Kubikfuß destillirtes Wasser = 66 Pfd., so ist das Gewicht des Kubikfußes der Luft = 0,0012346 . 66, und daher das Gewicht der Luft, welche in gedachtem Zimmer enthalten ist, = 6720 . 0,0012346 . 66 = 547,569792 Pfd.

26. Man nimmt an, daß sich die Luft 10 Meilen weit über der Erde erstrecke, welches durch die Brechung der Lichtstrahlen in erwähnter Höhe begründet wird. Zwar ist nun die Luft nicht überall von gleicher Dichtigkeit, also auch nicht von gleichem specifischem Gewichte, doch wollen wir ein gleiches specifisches Gewicht der Luft in allen Regionen derselben für unsere Aufgabe annehmen, und unter dieser Annahme das Gewicht der die Erde umgebenden Luft, und eines Luft-Cylinders berechnen, dessen Grundfläche einen Durchmesser von einem Fuße Länge, und nach obiger Bemerkung eine Höhe von 10 Meilen hat. Das specifische Gewicht der Luft = 0,0012345 gesetzt. 1 geographische Meile = 23 664 Rheinländ. oder Preuß. Fuße.

A) Ein Kreis, dessen Durchmesser = 1 Fuß ist, hat zum Flächeninhalte $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \pi$ Kubikfuß; daher ist der kubische Inhalt eines Cylinders,

Digitized by Google

dessen Grundfläche zum Durchmesser einen Fuß, und zur Höhe 10 Meilen à 23 664 Fuß hat, $= 10 . 23\,664 . \frac{1}{4} . \pi = 236\,640 . \frac{1}{4} . 3{,}14159 =$ 185 856,4644 Kubikfuß.

Daher ist das Gewicht der Luft dieses Cylinders nach obiger Annahme $= 185\,856{,}4644 . 0{,}0012345 . 66 = 15\,143{,}02714\,99188$ Pfund = 137 Centner 73 Pfd.

B) Früher ist der Durchmesser der Erdkugel = 1718,8734 Meilen à 23 664 Fuß berechnet, und dieses führte auf den kubischen Inhalt der Erde = 2659 070 965,28 Kubikmeilen. Wollen wir nun den kubischen Inhalt nach den Angaben der Aufgabe berechnen, so müssen wir zunächst den kubischen Inhalt einer Kugel suchen, deren Durchmesser um 20 Meilen länger als der der Erde ist, und von dieser Größe die der Erdkugel hinwegnehmen.

Da nun der kubische Inhalt jeder Kugel $= \frac{1}{6}$ von dem Kubus ihres Durchmessers mit der Verhältnißzahl π multiplicirt ist, so ist der kubische Inhalt der Erdkugel sammt der sie umgebenden Luft bis in die Höhe von 10 Meilen $= \frac{1}{6} . 1738{,}8734 . 1738{,}8734 . 1738{,}8734 . 3{,}14159 =$ 2752 974 239,15081 42726 35616 22$\frac{2}{3}$ Kubikmeilen, davon den Inhalt der Erdkugel hinweggenommen, läßt den kubischen Inhalt der Luft = 93 903 273,87 Kubikmeilen.

Nun berechne man zuerst das Gewicht der Luft von einer Kubikmeile $= 23\,664 . 23\,664 . 23\,664 . 0{,}0012345 . 66$ Pfund = 107 969 104 608 4,620288 Pfd. = 9 815 373 146 Centner.

Aus diesen Zahlen wird man schon das ungeheuere Gewicht der Luft nach den Annahmen der Aufgabe ersehen; zur Verkürzung der Rechnung setze man das Gewicht der Kubikmeile Luft = 9 800 000 000 Centner, und den kubischen Inhalt der die Erde umgebenden Luft = 93 900 000 Kubikmeilen, so ist deren Gewicht = 920 220 000 000 000 000 Centnern, also über 920 220 Billionen Centner.

Daß nun diese Zahl mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt, ist natürlich klar, doch aber wird das Resultat der Rechnung Manchen in seinen Erwartungen überraschen, und ihn veranlassen, vorsichtig über Dinge zu urtheilen, die kein Gegenstand gewöhnlicher Conversation sind. Man lege sich zum Beispiel die Frage über die Schwere der Erde vor; wie viele Centner möchte wohl die Schwere derselben betragen?

27. Angenommen, die ganze Erde bestände nur aus Wasser; wie groß muß ihr Gewicht in Centner ausgedrückt sein?

Nach früheren Berechnungen ist der kubische Inhalt der Erde = 2 659 070 965 Kubikmeilen.

Da nun eine Kubikmeile, die Meile zu 23 664 Fuß gerechnet, = 13 251 482 578 944 Kubikfuß, und 1 Kubikfuß = 66 Pfd. = $\frac{3}{5}$ Centner, so ist das Gewicht einer Kubikmeile Wasser = 7 950 889 547 366 Centner; daher das Gewicht der Erde, wenn sie nur aus destillirtem Wasser bestände

Digitized by Google

= 21141 979541 322922 821190 Centner, also über 21 Tausend Trillionen Centner.

Nimmt man an, daß ein Pferd 10 Centner tragen könne, welches offenbar zu viel ist; so würden über 2 Tausend Trillionen Pferde zur Fortschaffung einer solchen Masse erforderlich sein; und dieses ungeheuere Gewicht schleudert die Sonne in Kreisen um sich mit der Leichtigkeit, mit welcher der Mensch etwa eine Flintenkugel, an einer Schnur befestigt, um sich schwingt.

28. Das specifische Gewicht der Platina, geschmolzen = 20,855, des Iridium = 19,500, des Goldes, gegossen = 19,258, des Queckſilbers = 13,597, des Palladium, geschmolzen = 11,800, des Bleies = 11,445, des Silbers, gegossen = 10,414, des Kupfers, gegossen = 8,788, des Eisens, gegossen = 7,251, des Zinns, Engl., gegossen = 7,291, des Zinks, gegossen = 7,213. Nimmt man nun von jedem Metalle so viele Pfunde, als sein specifisches Gewicht Einheiten enthält, so wird es wie viele Pfunde im Wasser verlieren, oder, in Wasser untergetaucht, wie schwer sein?

Das Gewicht von 1 Kubikfuße der Platina = 20,855 . 66 Pfd.; daher ist das Volumen von 1 Pfunde der Platina = $\frac{1}{20{,}855 \,.\, 66}$ Kubikfuß; folglich ist das Volumen von 20,855 Pfd. der Platina = $\frac{20{,}855}{20{,}855 \,.\, 66}$ = $\frac{1}{66}$ Kubikfuß; und diese Masse Platina, in Wasser untergetaucht, muß also so viel an ihrem Gewichte verlieren, als das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfuß des Wassers beträgt. Da nun 1 Kubikfuß Wasser 66 Pfd. wiegt, so ist das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfuß Wasser = $\frac{66 \cdot 1}{66}$ Pfd. = 1 Pfd.; also verlieren 20,855 Pfunde Platina im Wasser 1 Pfd., und daher wiegen sie im Wasser nur 20,855 − 1 = 19,855 Pfd.

Aus denselben Gründen wiegen im Wasser 19,5 Pfund Iridium nur 18,5 Pfd., 19,258 Gold nur 18,258 Pfd., 13,597 Pfd. Queckſilber nur 12,597 Pfd. ꝛc. Daher der Satz:

Eine Zahl Pfunde eines Stoffes, die gleich dem specifischen Gewichte desselben ist, verliert im Wasser stets ein Pfund an seinem Gewichte. Ist die Einheit des Gewichts Loth, Quentchen, Grän, Gran ꝛc., so ist der Verlust im Wasser auch ein Loth, Quentchen, Grän, Gran ꝛc.

29. Jemand schmilzt 3 Mark Silber und 5 Mark Kupfer zusammen, so ist die Frage, a) wie viele Loth Silber eine Mark der Mischung enthalte? b) welches der Feingehalt des neuen Silbers durch einen Bruch ausgedrückt sei? c) wie viel diese Mischung im Wasser verlieren werde?

a) Da jede Mark 16 Loth enthält, so müssen 3 Mark Silber = 3.16 = 48 Loth sein. Da nun 3 Mark Silber und 5 Mark Kupfer zusammengeschmolzen sind, so enthält die Mischung 8 Mark, und diese begreifen in sich 48 Loth fein Silber; daher kommt auf eine Mark $\frac{48}{8}$ = 6 Loth f. Silber,

Digitized by Google

oder das Silber ist 6löthig, welches das Münzsilber ist, aus dem in Baden 6 Kreuzerstücke, in Braunschweig gute Groschenstücke, in Dänemark Markstücke, in Lübeck Schillingstücke, in Preußen $\frac{1}{12}$ Thalerstücke geprägt werden.

b) Da 8 Mark Mischung nur 3 Mark f. Silber enthalten, so begreift jede Mark der Mischung nur $\frac{3}{8}$ Mark f. Silber in sich; also ist der Feingehalt $\frac{3}{8}$.

c) Nach vorstehender Aufgabe ist das specifische Gewicht des Silbers 10,414, das des Kupfers 8,788; daher verlieren 10,414 Mark Silber im Wasser 1 Mark und 8,788 Mark Kupfer im Wasser gleichfalls 1 Mark.

Weil also 10,414 Mark Silber im Wasser 1 Mark verlieren, so muß 1 Mark Silber im Wasser einen Verlust von $\frac{1}{10,414}$ und daher 3 Mark Silber einen Verlust von $\frac{3}{10,414}$ Mark haben. Aus demselben Grunde erleiden 5 Mark Kupfer im Wasser einen Verlust von $\frac{5}{8,788}$ Mark; daher verliert die ganze Mischung im Wasser $\frac{3}{10,414} + \frac{5}{8,788}$ m℔ $= \frac{9\,804\,250}{11\,439\,779}$ m℔.

30. In einer Münzstätte werden 88 Mark Gold und 8 Mark Kupfer zusammengeschmolzen, um das Gold der Engl. Guinee und Sovereigns, der Oestreichischen Souveraind'or, der Portugisischen und Spanischen Goldmünzen zu erhalten. a) Wie viel karatig ist das Münzgold? b) Welches ist der Feingehalt als ein Bruch? c) Wie viel verliert diese Komposition in Wasser?

a) 88 m℔ Gold + 8 m℔ Kupfer = 96 m℔, und diese enthalten 88 mal 24 Karat f. Gold; daher hat eine Mark des Münzgoldes $\frac{88 \cdot 24}{96} = 22$ Karat fein Gold und es ist daher 22karatig.

b) Da 96 m℔ Münzgold nur 88 m℔ f. G. enthält, so kommt auf eine Mark $\frac{88}{96} = \frac{11}{12}$ m℔ f. G., und daher ist der Feingehalt dieses Goldes $= \frac{11}{12}$.

c) Nach Aufgabe 28. ist das specifische Gewicht des Goldes = 19,258, das des Kupfers = 8,788; daher verlieren 19,258 m℔ f. G. im Wasser 1 m℔, also 88 m℔ f. G. im Wasser $\frac{88}{19,258} = \frac{44000}{9629} = 4\frac{5484}{9629}$ m℔.

Aus demselben Grunde verlieren 8 m℔ Kupfer im Wasser $\frac{8000}{8788} = \frac{2000}{2197}$ m℔; daher der Verlust im Wasser der ganzen Mischung $= 4\frac{5484}{9629} + \frac{2000}{2197} = 5\frac{10151435}{21154913}$ m℔.

31. In Berlin werden 390 Mark f. Gold und 42 Mark Kupfer zusammengeschmolzen, um Gold der Frd'or oder der Deutschen Pistolen zu erhalten. a) Wie viel karatig ist das Gold der Frd'or? b) Welches ist der Feingehalt der Pistolen als Bruch? c) Wie viel verliert diese Komposition im Wasser? d) Wie viele Frd'or wird man aus diesem Münzgolde prägen, wenn 35 Frd'or aus einer Mark gemacht werden sollen? e) Welches ist das Schrot- und Korngewicht der Frd'or in Grän?

Digitized by Google

a) Dieses Münzgold enthält $390 + 42 = 432$ m⅄, welche $390 . 24$ Karat f. Gold enthalten; daher hat eine Mark der Mischung $\frac{390 . 24}{432} = 21\frac{3}{4}$ Karat f. Gold.

b) Eine Mark des Münzgoldes $= \frac{390}{432} = \frac{65}{72}$ Mark f. G.

c) Die ganze Mischung verliert im Wasser $\frac{390}{19{,}258} + \frac{42}{8{,}788} = 25\frac{6659331}{21164913}$ m⅄.

d) Da eine Mark des Münzgoldes 35 Frd'or giebt, so erhält man aus 432 m⅄ $432 . 35 = 15\,120$ Frd'or, im Werthe von 75 600 ℳ in Gold oder 85 680 ℳ in Courant.

e) Eine Mark $= 288$ Grän, daher 432 m⅄ $= 432 . 288$ Grän $= 432 . 35$ Frd'or; daher das Schrotgewicht eines Frd'or $= \frac{288}{35} = 8\frac{8}{35}$ Grän, und das Korngewicht eines Frd'or $= \frac{390 . 288}{432 . 35} = 7\frac{3}{7}$ Grän.

32. Das specifische Gewicht des gehämmerten Goldes ist 19,36, das des gehämmerten Kupfers 9,000. Jemand besitzt nun einen großen goldenen Pokal, der angeblich von 18karatigem Golde sein soll. Da ihm Freunde durch ihre Bemerkungen über den Pokal die Feinheit desselben verdächtig machen, so entschließt er sich, da er ein guter Physiker und Rechner ist, die Feinheit des Goldes durch Abwägen in Luft und Wasser zu prüfen. Er findet das Gewicht des Bechers in Luft gewogen 2 Mark 11 Karat 1 Grän, in Wasser gewogen 2 Mark 6 Karat 11 Grän. Von welcher Feinheit ist demnach das Gold dieses Pokals, oder wie viel feines Gold und Kupfer enthält derselbe?

Der Verlust des Pokals an Gewicht im Wasser beträgt also 2 m⅄ 11 Karat 1 Grän weniger 2 m⅄ 6 Karat 11 Grän $= 4$ Karat 2 Grän. Bestände der Pokal aus feinem Golde, so müßte er, da er 2 m⅄ 11 Karat 1 Grän $= 709$ Grän schwer ist, im Wasser $\frac{709}{19{,}36} = \frac{70900}{1936} = 36\frac{301}{484}$ Grän verlieren, weil 19,36 Grän feines Gold im Wasser 1 Grän verlieren (Aufg. 28.) Daher beträgt der Verlust des Pokals im Wasser $13\frac{183}{484}$ Grän mehr, als nach vorstehender Annahme.

Nun verlieren 9 Grän Kupfer im Wasser 1 Grän, also verliert 1 Grän Kupfer im Wasser $\frac{1}{9}$ Grän, 1 Grän f. Gold im Wasser $\frac{1}{19{,}36} = \frac{100}{1936} = \frac{25}{484}$ Grän; daher verliert 1 Grän Kupfer im Wasser $\frac{1}{9} - \frac{25}{484} = \frac{259}{4356}$ Grän mehr als Gold von demselben Gewichte. Da nun der Pokal $13\frac{183}{484}$ Grän mehr als f. Gold von demselben Gewichte verliert, so muß der Pokal so viele Grän Kupfer enthalten, als der Ueberschuß des Gewichtverlusts von 1 Grän Kupfer in diesem Ueberschusse enthalten ist; also enthält der Pokal $13\frac{183}{484} : \frac{259}{4356} = 225$ Grän Kupfer und $709 - 225 = 484$ Grän f. Gold.

Digitized by Google

Folglich ist der Feingehalt des Goldes im Pokal $= \frac{484}{709}$ f. G., und verwandelt man diesen Bruch in Karat- und Grän, so erhält man $\frac{484}{709}$ m. $= 16$ Karat $4\frac{428}{709}$ Grän.

33. Jemand wägt Schwefelzink in der Luft und findet sein Gewicht 4 Pfd. $16\frac{3}{5}$ Loth; darauf wägt er es in Wasser und hierin ergiebt sich das Gewicht desselben 3 Pfd. $10\frac{618}{3005}$ Lth. Wenn ferner das specifische Gewicht des Schwefels $1{,}92$ und das des Zinks $7{,}212$ ist, so enthält diese Masse wie vielen Schwefel und Zink?

Diese Aufgabe kann man ebenso wie die vorige auflösen, nämlich so, daß man von der Annahme ausgeht, die Masse bestehe nur aus dem einen Stoffe ꝛc. Zur Wiederholung will ich diese Aufgabe noch wie die vorige auflösen, und in den nachfolgenden ein anderes Verfahren anwenden.

4 Pfd. $16\frac{3}{5}$ Lth. $= 144\frac{3}{5}$ Lth. Da das specifische Gewicht des Schwefels $1{,}92$ ist, so verlieren $1{,}92$ Lth. Schwefel im Wasser 1 Lth.; würde also der Körper nur aus Schwefel bestehen, so müßte er im Wasser $(1{,}92 : 1 = 144\frac{3}{5} : \frac{14460}{192} = \frac{1205}{16})$ $75\frac{5}{16}$ Lth. verlieren. Da er nun im Wasser 3 Pfd. $10\frac{618}{3005}$ Lth. $= 106\frac{618}{3005}$ Lth. wiegt, so hat er im Wasser $38\frac{237}{601}$ Lth. verloren. Reiner Schwefel von dem angegebenen Gewichte verliert also im Wasser $75\frac{5}{16}$ Lth., und Schwefelzink nur $38\frac{237}{601}$ Lth.; daher verliert dieses $36\frac{58229}{96016}$ Lth. weniger als jener von demselben Gewichte.

Nun muß man berechnen, wie viel 1 Lth. Zink im Wasser weniger als 1 Lth. Schwefel verliert.

Da das specifische Gewicht des Zinks $7{,}212$ ist, so müssen $7{,}212$ Lth. Zink im Wasser 1 Lth. verlieren; daher ist der Verlust von 1 Lth. Zink im Wasser $\frac{1}{7{,}212} = \frac{1000}{7212} = \frac{250}{1803}$ Lth., von 1 Lth. Schwefel im Wasser $\frac{1}{1{,}92} = \frac{100}{192} = \frac{25}{48}$ Lth.; also verliert 1 Lth. Zink im Wasser $\frac{25}{48} - \frac{250}{1803} = \frac{36725}{96016}$ Lth. weniger als eben so viel Schwefel. Daher wird die Masse Schwefelzink so viele Loth Zink enthalten, als dieser Unterschied in jenem enthalten ist $= 36\frac{58229}{96016} : \frac{36725}{96016} = 96\frac{3}{5}$ Lth., und folglich sind in diesem Schwefelzink $144\frac{3}{5} - 96\frac{3}{5} = 48$ Lth. Schwefel enthalten.

13. In einer Münze werden Gold und Kupfer zusammengeschmolzen; die Mischung wiegt in der Luft 21 183,8 Mark, in Wasser verliert sie $1219\frac{307}{2197}$ Mark; das specifische Gewicht des Goldes ist $19{,}258$, das des Kupfers $8{,}788$. Aus wie vielem Golde und Kupfer besteht die Mischung?

Da die Mischung im Wasser $1219\frac{307}{2197}$ Mark verliert, so ist dieses das Gewicht des Wassers, welches das Gemisch von Gold und Kupfer verdrängt hat, oder des Wassers, welches mit der Mischung gleiches Volumen hat, und wenn man mit diesem Gewichte in das der Mischung dividirt, so muß man das specifische Gewicht der Mischung erhalten. Folglich ist das

Digitized by Google

specifische Gewicht der Mischung = 21183,8 Mark dividirt durch $1219\frac{307}{2197}$ = $\frac{2118\,38}{10} \cdot \frac{2197}{2678450} = 17\frac{5035793}{13392250}$.

Das das specifische Gewicht des Goldes 19,258 ist, so verlieren 19,258 Mark Gold im Wasser 1 Mark (Aufg. 28.), daher ist der Verlust des Goldes im Wasser = $\frac{1}{19,258} = \frac{500}{9626}$; aus demselben Grunde ist der Verlust des Kupfers im Wasser = $\frac{1}{8,788} = \frac{250}{2197}$, und der Verlust der Mischung = $\frac{13392250}{23270403}$; daher beträgt der Verlust des Goldes $\frac{13087750}{23270403}$ weniger und der des Kupfers $\frac{13087500}{23270403}$ mehr als der Verlust der Mischung; es muß also Gold und Kupfer in solchen Quantitäten mit einander vermischt sein, daß der Wenigerverlust des Goldes den Mehrverlust des Kupfers aufhebt. Da nun eine Mark Kupfer im Wasser $\frac{13087500}{23270403}$ Mark mehr als eine Mark der Mischung verliert, so muß man so viele Mark fein Gold nehmen, als der Wenigerverlust des Goldes an einer Mark in jenem Mehrverluste enthalten ist, also $\frac{13087500}{23270403} : \frac{13087750}{23270403}$ = 10 Mark f. G. Das feine Gold verhält sich also zum Kupfer in der Mischung = 10 : 1; hat also Kupfer das Einfache von einem gewissen Gewichte, so hat das Gold das 10fache von demselben Gewichte, beide also das 11fache = 21183,8 Mark, daher das Einfache = 1925,8 Mark Kupfer und Gold = 19258 Mark.

35. Die vorstehende Auflösung führt auf folgenden Satz:

Je größer das specifische Gewicht eines Stoffes ist, desto geringer ist sein Verlust im Wasser.

Ferner: Das Verhältniß der Gewichte zweier Stoffe von verschiedenem specifischen Gewichte, die eine Mischung ausmachen, ist gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Differenzen der Verluste, zwischen dem Verluste des specifisch schwersten Stoffes und dem der Mischung, und dem Verluste der Mischung und dem des specifisch leichtesten Stoffes.

Dieser Satz findet bei allen Mischungsaufgaben Anwendung; er ist daher von Wichtigkeit und wird im Folgenden noch häufig wiederkehren, daher habe ich ihn abgesondert ausgedrückt.

36. Ein Danziger Großhändler hat 4 Dutzend Eßlöffel à 6 Loth schwer, einen Vorlegelöffel à 16 Loth schwer, 5 Dutzend Theelöffel à 2 Loth schwer, ein Zuckergefäß à 24 Loth schwer, 6 Leuchter à 32 Loth schwer von einem Silberarbeiter verfertigen lassen; das in Danzig verarbeitete Silber soll $12\frac{3}{4}$ bis 13 Loth fein sein; das Silber dieser Arbeiten wird 13 Loth fein angegeben. Da nun der Werth des Silbers allein keine geringen Kosten verursacht und dieser Kaufmann noch andere silberne Geschirre machen zu lassen beabsichtigt, so will er sich durch Abwägen der silbernen Gefäße in Luft und Wasser von der Richtigkeit der Angabe überzeugen. Er

Digitized by Google

findet nun, in Luft gewogen, das Gewicht der Arbeiten der Angabe gemäß, gemäß, nämlich 39 Mark, in Waſſer haben ſie ein Gewicht von 35 Mark $1\frac{10}{21}$ Loth. Wenn nun das ſpecifiſche Gewicht des Silbers $= 10\frac{1}{2}$, das des Kupfers $= 9$ geſetzt wird; wie viel Silber und Kupfer befindet ſich in den verfertigten Sachen?

Der Verluſt im Waſſer beträgt 3 Mark $14\frac{11}{21}$ Loth $= 62\frac{11}{21}$ Loth; alſo iſt das ſpecifiſche Gewicht des verarbeiteten Silbers $= \frac{39 . 16}{62\frac{11}{21}} = 9\frac{99}{101}$. Nun iſt der Verluſt des feinen Silbers im Waſſer $= \frac{1}{10\frac{1}{2}} = \frac{2}{21}$, oder des verarbeiteten $= \frac{1}{9\frac{99}{101}} = \frac{101}{1008}$, und der des Kupfers $= \frac{1}{9}$; dieſe Reſultate ſtelle man ſenkrecht unter einander, und nehme die Differenzen je zweier auf einander folgenden.

$\frac{2}{21} = \frac{96}{1008}$
$\frac{101}{1008} = \frac{101}{1008}$
$\frac{1}{9} = \frac{112}{1008}$

$\frac{5}{1008}$
$\frac{11}{1008}$

Der Verluſt des feinen Silbers beträgt alſo $\frac{5}{1008}$ weniger, der des Kupfers $\frac{11}{1008}$ mehr als der der Miſchung. Nimmt man alſo eine Mark f. Silber, ſo verliert dieſe $\frac{5}{1008}$ $m\mathcal{K}$ weniger als die Miſchung; daher muß man ſo viele Mark Kupfer nehmen, daß jener Weniger-Verluſt durch dieſen Mehr-Verluſt erſetzt werde, alſo ſo viele Mark, als in $\frac{5}{1008}$ die $\frac{11}{1008}$ enthalten ſind, das ſind $\frac{5}{11}$ $m\mathcal{K}$; daher iſt Silber zu Kupfer in der Miſchung $= 1 : \frac{5}{11} = 11 : 5$. Aus dieſer neuen Darſtellung, welche abſichtlich ohne Anwendung des Satzes 35. gemacht wurde, dieſen Satz noch mehr zu begründen, findet man die Wahrheit desſelben beſtätigt. Silber hat alſo das 11fache, Kupfer das 5fache desſelben Gewichts, zuſammen das 16fache $= 39$ $m\mathcal{K}$; daher iſt das Einfache $= \frac{39}{16}$ $m\mathcal{K} = 39$ Loth; die Feinheit des Silbers iſt alſo $\frac{11}{16} \cdot 39 = \frac{11}{16}$ oder 11löthig und nicht 13.öthig; die Mehrangabe iſt alſo $39 . 2 = 78$ Loth $= 4\frac{7}{8}$ $m\mathcal{K}$ fein Silber. Rechnet man die Mark fein Silber zu $13\frac{5}{6}$ $\mathcal{R}$, ſo iſt hiebei für den Silberarbeiter ein Gewinn von $4\frac{7}{8} . 13\frac{5}{6} = 67\frac{7}{16}$ $\mathcal{R}$.

37. Das ſpecifiſche Gewicht des Carrariſchen Marmors iſt $2,_{717}$, das der Rothtanne $0,_{498}$. Man will einen Marmorblock, der 10 Fuß lang, 5 Fuß breit, 1 Fuß dick iſt, in Verbindung mit Korkholz, deſſen ſpecifiſches Gewicht $0,_{240}$ iſt, auf dem Waſſer eines Fluſſes transportiren; wie vieles Korkholz muß man mit dem Marmor verbinden, damit das ſpecifiſche Gewicht dieſer Verbindung dem des Rothtannenholzes gleich ſei?

Obgleich dieſe Aufgabe eine andere Einkleidung hat, ſo wird ſie doch durch dieſelben Schlußfolgen, wie die vorige, gerechnet. Denn

$\frac{1}{2,_{717}} = \frac{1000}{2717}$ iſt der Verluſt des Marmors im Waſſer;

$\frac{1}{0,_{498}} = \frac{1000}{498}$ iſt der Verluſt des Tannenholzes im Waſſer;

Digitized by Google

$\frac{1}{0,24} = \frac{100}{24}$ ist der Verlust des Korkholzes im Wasser.

Daher beträgt der Verlust des Marmors im Wasser $\frac{500}{249} - \frac{1000}{2717} = \frac{1106500}{249.2717}$ weniger als der des Tannenholzes, und der Verlust des Korkholzes im Wasser $\frac{25}{6} - \frac{500}{249} = \frac{3225}{6.249} = \frac{1075}{498}$ mehr als der des Tannenholzes; folglich verhält sich das Gewicht des Marmors zu dem Gewichte des Korkholzes $= \frac{1075}{498} : \frac{1106500}{249.2717} = 1075 . 2717 : 2 . 1109500 =$ 43 . 2717 : 2 . 44380.

Nun ist das Gewicht des Marmors gegeben; denn sein Volumen ist $=$ 10 . 5 . 1 $=$ 50 Kubikfuß $=$ 50 . 2,717 . 66 Pfund; daher ist:
43 . 2717 : 2 . 44380 $=$ 50 . 2,717 . 66 ℔ Marmor : dem Gewichte des Korkholzes, welches daher $= \frac{44380 . 100 . 66}{43 . 1000} = \frac{4438 . 66}{43} = 6811\frac{35}{43}$ ℔ ist.

38. Der Schwerpunkt eines Körpers ist derjenige Punkt, welcher, hinlänglich unterstützt, den ganzen Körper in Ruhe erhält. Daher denkt man sich die ganze Masse eines Körpers, also auch sein ganzes Gewicht in seinem Schwerpunkte versammelt, so daß man folglich für das Gewicht eines Körpers das Gewicht seines Schwerpunktes setzen kann.

Es sei der Körper (Fig. 58.) ein Würfel oder Kubus, so wird sein Schwerpunkt eine solche Lage haben, daß er nicht allein von allen Ecken A, c, B, d, C, a, D, b gleichweit, sondern auch von allen Seiten- und Grundflächen gleichweit entfernt ist. Verbindet man also zwei gegenüberliegende Ecken, wie B, d, oder C, a, so muß er sowohl in der Mitte der Bd, als auch in der Mitte der Ca, also in ihrem Durchschnittspunkte O liegen. Zieht man die Ecklinien (Diagonalen) des Quadrats ABCD, und abcd, welche sich in f, e durchschneiden; so ist f der Schwerpunkt des Quadrats ABCD, e der des Quadrats abcd, und daher muß der Schwerpunkt O des Würfels auch in der Mitte der ef liegen.

Allgemein: Der Schwerpunkt eines Prisma liegt in der Mitte derjenigen Geraden, welche die Schwerpunkte ihrer Grundflächen verbindet.

Sei Fig. 59. ein Prisma, dessen Grundflächen Fünfecke sind, so kann man den Schwerpunkt derselben leicht finden. Denn H sei die Mitte von BC, I die Mitte von AD, F die Mitte von HI, so ist F der Schwerpunkt des Vierecks ABCD; ferner sei FG $= \frac{1}{6}$ FE, so ist G der Schwerpunkt des Fünfecks ABCDE (Aufg. 17.). Eben so bestimme man den Schwerpunkt g des Fünfecks abcde, und sei O die Mitte der Gg, so ist O der Schwerpunkt des Prisma. Ferner wird es klar sein, daß Gg, d. h. die Gerade, welche die Schwerpunkte der Grundflächen eines Prisma verbindet, parallel einer Seitenkante Aa, oder Bb, oder Cc ꝛc. sein muß.

Würde die Gerade Gg, die durch die Schwerpunkte der Grundflächen und den des Prisma geht, durch eine andere Gerade, deren Verlängerung

Digitized by Google

mit jener zusammenfiele, unterstützt, so würde dadurch der Schwerpunkt und der ganze Körper unterstützt, und er bliebe also in Ruhe.

Man denke sich einen Körper von beliebiger Gestalt und an einem Faden aufgehängt, so wird die Richtung des Fadens lothrecht sein; daher muß seine Verlängerung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Hängt man daher einen Körper an zwei verschiedenen Stellen auf, so muß der Punkt, durch welchen die beiden Aufhängelinien verlängert durch den Körper gingen, der Schwerpunkt desselben sein.

Man betrachte die Lage eines Körpers im Wasser, so wird man auch hiedurch die Lage seines Schwerpunktes ermitteln können.

Ein im Wasser schwimmender Würfel wird in jeder Lage in Ruhe, also auch im Gleichgewichte sein, wenn zwei gegenüberliegende Ecken desselben in senkrechter Lage, oder die Schwerpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen in einer Senkrechten liegen, die also auch jedesmal durch den Schwerpunkt des Würfels gehen.

Man kann den allgemeinen Grundsatz aufstellen: Ein von Ebenen begrenzter Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Schwerpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen und der Schwerpunkt des Körpers in einer Geraden liegen, die eine gegen die ruhig stehende Oberfläche des Wassers lothrechte Richtung hat.

Daher wird ein Parallelepipedon im Gleichgewichte sein, wenn die Gerade, welche durch die Schwerpunkte zweier gegenüberstehender Seitenflächen geht, senkrecht zur Wasseroberfläche oder zu einer Horizontalebene ist; denn diese Gerade geht zugleich durch den Schwerpunkt des Körpers.

Auch dieser Satz ist allgemein: Denkt man sich einen Körper in drei Stücke zerlegt, von jedem derselben seinen Schwerpunkt bestimmt und liegen nun diese drei Punkte in einer Geraden, die lothrecht zu einer Horizontalfläche ist: so ist der Körper im Gleichgewicht.

Anmerk. Den früher beim Hebel versprochenen Beweis vom statischen Momente will ich nun geben; er rührt nicht von mir, sondern von einem Mathematiker Stevin aus dem Mittelalter her.

39. Man denke sich ein Parallelepipedon, dessen senkrechter Durchschnitt seiner Länge nach das Rechteck ACca darstelle; dieser Durchschnitt soll durch den Schwerpunkt des Parallelepipedon gehen, und wird es daher halbiren (Fig. 60.).

Ist nun R, r die Mitte von AC, ac, und AC horizontal, Rr also vertikal (senkrecht), so geht Rr durch den Schwerpunkt des Körpers, und wird die Gerade Rr in senkrechter Richtung unterstützt, so muß der ganze Körper im Gleichgewichte sein.

Das ganze Parallelepipedon denke man sich nun in zwei andere zerlegt, deren senkrechte Durchschnitte ihrer Längen nach durch oben gedachten

Digitized by Google

Durchschnitt gebildet werden, und ABba, BCcb sein mögen. Seien nun wieder D, d die Mitten der AB, ab und E, e solche der BC, bc; so geht Dd durch den Schwerpunkt des einen und Ee durch den Schwerpunkt des andern Parallelepipedon; werden ferner Dd, Ee senkrecht unterstützt, so müssen die beiden Parallelepipeden ABba, BCcb im Gleichgewichte sein. Und es ist nun einerlei, ob die beiden gedachten Parallelepipeden in D und E oder das ganze in R unterstützt werde, in jedem Falle ist Gleichgewicht vorhanden.

Behalten wir nun von der ganzen Zusammenstellung nur die drei Punkte D, R, E und die verbindende Gerade DE in der Vorstellung; denken wir uns ferner das Gewicht des einen Parallelepipedon ABba durch das Gewicht P, das des andern BCcb durch das Gewicht Q vorgestellt, die in den verlängerten Richtungen dD, eE befestigt sind: so haben wir die Vorstellung vom mathematischen Hebel.

Die Länge AB des Parallelepipedon ABba sei L, die Länge BC des andern sei l; so ist $AD = DB = \frac{1}{2}L$, $BE = EC = \frac{1}{2}l$ und $AR = RC = \frac{1}{2}(L+l) = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$.

Sei ferner der eine Arm DR des Hebels $= p$, der andere $RE = q$, so ist $p = DR = RA - AD = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}l$ und $q = ER = RC - CE = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}L$.

Nehmen wir nun an, was wir bereits stillschweigend gethan haben, daß die Masse des ganzen Körpers gleichmäßig vertheilt ist, d. h. daß gleiche Volumen desselben, von beliebiger Größe, gleiche Massen und also auch gleiche Gewichte haben: so müssen sich die Massen und also auch die Gewichte der beiden Parallelepipeden ABba, BCcb, wie ihre Längen L, l verhalten; und weil die Gewichte der genannten Körper durch P, Q vorgestellt werden, so ist

$$P : Q = L : l = \tfrac{1}{2}L : \tfrac{1}{2}l.$$

Es ist aber auch $\frac{1}{2}L : \frac{1}{2}l = q : p$, wie wir vorher gesehen haben; daher ist $P : Q = q : p$, oder $P \cdot p = Q \cdot q$; d. h. die Gewichte stehen im umgekehrten Verhältnisse der Länge ihrer Hebelarme, oder die Produkte aus den Gewichten und den Längen ihrer Hebelarme sind einander gleich, wenn der Hebel im Gleichgewicht ist.

Dieser Beweis ist sehr sinnreich und übertrifft alle übrigen, welche für diesen Satz gegeben werden, an Einfachheit.

40. Ein eichener Balken AB von $64\frac{1}{2}$ Fuß Länge, 1 Fuß Breite und 14 Zoll Dicke ruht auf zwei andern, C und D, in folgenden Distanzen: Ah $= 25$ Fuß, gf $= 22$ Fuß, eB $= 13\frac{1}{2}$ Fuß; die Breiten der unter ihm liegenden Balken hg $=$ fe $= 22$ Zoll. Das specifische Gewicht des Eichenkernholzes ist 1,170. (Fig. 61.)

a) Wenn der Balken nur auf dem in C ruhete, welches Gewicht müßte man in A anbringen, damit er im Gleichgewichte bliebe, und welchen Druck müßte der Balken C ertragen?

Digitized by Google

b) Wenn der horizontale Balken nur auf dem in D läge, welches Gewicht müßte man in B befestigen, damit Gleichgewicht erfolgte, und wie groß wäre der Druck auf den Balken in D?

c) Wenn der eichene Balken wirklich auf den beiden in C und D liegt, wird Gleichgewicht vorhanden sein, oder nicht? und wenn es nicht ist, hat man in A oder B ein Gewicht und welches zur Herstellung des Gleichgewichts anzubringen, und wie groß ist der Druck auf jeden der Balken C und D?

Wird die Grundfläche eines Körpers von einer andern Fläche unterstützt, so bleibt er in Ruhe oder im Gleichgewichte, wenn die Senkrechte, welche durch seinen Schwerpunkt geht, die Unterstützungsfläche trifft, obgleich ein Theil des Körpers über derselben hervorsteht; und der Körper fällt von der Unterstützungsfläche zur Erde, wenn die durch den Schwerpunkt gehende Vertikale die Unterstützungsfläche nicht trifft. Daraus geht hervor, daß man das Gewicht eines Körpers stets in Bezug auf seinen Schwerpunkt betrachten muß.

Den Balken AB kann man sich in Bezug auf die Unterlage C in drei Theile getheilt denken, in den Theil von A bis h, in den von h bis g und in den von g bis B; würde jeder dieser Theile in der senkrechten Richtung durch seinen Schwerpunkt unterstützt, so bliebe jeder im Gleichgewichte; da nun der Theil, welcher die Länge hg hat, wirklich unterstützt ist, so hat man nur die beiden andern in Bezug auf einander zu betrachten.

Es ist nun Ah $= 25'$, E sei die Mitte von Ah, also Eh $= \frac{25}{2}'$, und auf E wirkt ein Gewicht, das gleich dem des Balkens Ah ist; folglich hat man das letzte zu suchen.

Da das Gewicht des Balkens von seinem Rauminhalte und seinem specifischen Gewichte abhängt, so muß man beides in Rechnung ziehen. (Fig. 62.)

Man berechne zuerst das ganze Gewicht des Balkens. Die Länge AB des Balkens $= 64\frac{1}{6}'$, seine Breite $= 1$ Fuß und seine Dicke $= \frac{7}{6}'$, daher sein Volumen $= 64\frac{1}{6} . 1 . \frac{7}{6} = 74\frac{31}{36}$ Kubikfuß; sein specifisches Gewicht $= 1{,}17$; daher ein Kubikfuß desselben $= 1{,}17 . 66$ ℔; also das Gewicht des ganzen Balkens $= 74\frac{31}{36} . 1{,}17 . 66 = 5780{,}775$ ℔.

a) Weil Ah $= 25'$, die Dicke $= 14''$ und die Breite $= 1'$, so ist der Inhalt dieses Theils des Balkens $= 25 . 1 . \frac{7}{6}$ Kubikfuß; daher sein Gewicht $= 25 . \frac{7}{6} . 1{,}17 . 66 = 25 . 7 . 1{,}17 . 11$ ℔ $=$ E; gB $= 37\frac{1}{3}'$; also ist das Gewicht des Balkenstückes gB $= 37\frac{1}{3} . 1 . \frac{7}{6} . 1{,}17 . 66 = \frac{112}{3} . 7 . 1{,}17 . 11$ ℔ $=$ F.

Ist nun F die Mitte von gB, so wirkt also auf den Punkt E das Gewicht E und auf den Punkt F die Last F; und es muß sein, wenn R, S die Kräfte sind, die sich in E, F das Gleichgewicht halten, R : S $=$ Fg : Eh $= \frac{37\frac{1}{3}}{2} : \frac{25}{2} = 112 : 75$. Da nun S $=$ F $= \frac{112}{3} . 7 . 1{,}17 . 11$ ℔, so

ist $R = \frac{112}{3} . 7 . 1,_{17} . 11 . \frac{112}{75}$ ℔, und $E = 25 . 7 . 1,_{17} . 11$ ℔; daher muß also in E, außer der Kraft E, noch eine andere $= \frac{112}{3} . 7 \times 1,_{17} . 11 . \frac{112}{75} - 25 . 7 . 1,_{17} . 11 = \frac{7 . 1,_{17} . 11}{3 . 75} . (112 . 112 - 3 . 75 . 25) = 2730,_{3276}$ ℔.

Da nun $Ah = 2\,Eh$, so muß das Gewicht Q in A die Hälfte des Gewichtes R in E sein; also darf man nur in A die Hälfte von dem anbringen, was über das Gewicht in E noch angebracht werden mußte; daher $Q = \frac{1}{2} . 2730,_{3276} = 1365,_{1638}$ ℔.

Ist der Balken nur durch die Unterlage C unterstützt, so muß C nicht allein das Gewicht des Balkens AB, sondern noch das Gewicht Q tragen; daher wirkt auf C eine Kraft $= 5780,_{775} + 1365,_{1638} = 7145,_{9388}$ ℔.

b) Die zweite Frage wird eben so wie die erste behandelt. $Af = 25' + 22'' + 22' = 48\frac{5}{6}'$; daher ist das Balkenstück $Af = 48\frac{5}{6} . 1 . \frac{7}{6}$ Kubikfuß, und daher sein Gewicht $= 48\frac{5}{6} . 7 . 1,_{17} . 11$ ℔ $= H$, welches im Schwerpunkte H, der Mitte von Af, wirkt. $Be = 13\frac{1}{2}$; also Balkenstück $Be = 13\frac{1}{2} . 1 . \frac{7}{6}$ Kubikfuß, und sein Gewicht $= 13\frac{1}{2} . 7 . 1,_{17} . 11$ ℔ $= K$, das im Schwerpunkte K, der Mitte von Be, herabdrückt. (Fig. 63.)

Nun ist Gewicht T : Gewicht U = Ke : Hf $= \frac{13\frac{1}{2}}{2} : \frac{48\frac{5}{6}}{2} = 81 : 293$.

Da nun $T = H = 48\frac{5}{6} . 7 . 1,_{17} . 11$ ℔; so ist Gewicht $U = \frac{293}{81} . 48\frac{5}{6} \times 7 . 1,_{17} . 11$ ℔; folglich ist das in K fehlende Gewicht $= U - K = 14\,697,_{646}$ ℔.

Da nun $Be = 2\,Ke$, so ist $P = \frac{1}{2}$ des fehlenden Gewichts in K, daher $P = 7348,_{823}$ ℔, und auf die Unterlage D wirkt also ein Gewicht $= 5780,_{775} + 7348,_{823} = 13\,129,_{598}$ ℔.

c) Da $Ah = 25'$, $Be = 13\frac{1}{2}'$, $AB = 64\frac{1}{6}'$, so ist $\frac{1}{2} AB = 32\frac{1}{12}' = AM = MB$, und M, die Mitte der AB, oder der Schwerpunkt des Balkens AB zwischen den Unterlagen C und D, daher ist der Balken im Gleichgewichte; und man kann die drei Punkte C, M, D als die Punkte der Unterstützung und der Befestigung der Gewichte eines mathematischen Hebels betrachten. (Fig. 64.)

In dem Unterstützungspunkte M wirkt eine Last $L = 5780,_{775}$ ℔ $=$ dem Gewichte des ganzen Balkens AB; in C und D wirken Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen, und das Gleichgewicht erfordert, daß Kraft C : Kraft D $= eM : Mh$; daher Kraft C : L $= eM : eh$ und Kraft D : L $= hM : he$; denn Kraft C + Kraft D = L. Nun ist $Ah = 25'$, $AM = 32\frac{1}{12}'$, also $hM = 7\frac{1}{12}'$; $Be = 13\frac{1}{2}'$, also $eM = 18\frac{7}{12}'$, und $eh = 25\frac{2}{3}'$; daher ist

Kraft C : L $= 18\frac{7}{12}' : 25\frac{2}{3}' = 223 : 308$

Kraft D : L $= 7\frac{1}{12}' : 25\frac{2}{3}' = 85 : 308$; folglich ist

Kraft C $= \frac{223}{308} . 5780,_{775} = 4185,_{43125}$ ℔;

Kraft D $= \frac{85}{308} . 5780,_{775} = 1595,_{34375}$ ℔.

Digitized by Google

41. Die Welle ist ein Cylinder, welcher sich um seine Axe drehen kann; diese ruht mit ihren Enden, die von Eisen oder Stahl sind, in metallenen Pfannen, welche inwendig mit Oel bestrichen sind, die Reibung möglichst gering zu machen. Sei nun CB der Radius der Welle, und der Kreis, dessen Mittelpunkt C und den Radius CB hat, der Querdurchschnitt der Welle. An der Welle sei ein Rad befestigt, das mit dem Querdurchschnitt der Welle denselben Mittelpunkt habe, und sein Radius sei CA. Es ist nun klar, daß sich mit der Welle zugleich auch das Rad bewegen müsse. Man denke sich ferner an der Welle und am Rade ein Seil befestigt, und sowohl um die eine als auch um das andere die befestigten Seile gewunden; an dem freien Ende des Seils der Welle hänge das Gewicht L, des Rades das Gewicht K. Zieht man nun durch C, den Mittelpunkt der Axe der Welle, eine horizontale Gerade, so wird sie in A den Punkt, in welchem das Seil das Rad, in B den Punkt, in welchem das Seil die Welle berührt, treffen. (Fig. 65.)

Die Gerade AB, mit dem festen Punkte C und den Gewichten K, L bildet nun einen mathematischen Hebel, und daher ist zur Bedingung des Gleichgewichts nothwendig, daß K : L = BC : CA, oder K . AC = L . BC sei.

Ist die Kraft P = der Kraft K und cAP ein rechter Winkel, oder wirkt die Kraft P in A senkrecht auf Ac; ist ferner die Last Q = der Last L, und wirkt auch Q in B senkrecht auf Bc, so bleibt noch Gleichgewicht in dieser Anordnung der Kräfte, wenn vorher K und L im Gleichgewicht waren, und es muß noch sein P : Q = Bc : Ac.

Die zwei Geraden Ac, cB, welche unter einem beliebigen Winkel AcB in c so befestigt sind, daß sie sich um den festen Punkt c drehen können, heißt mit seinen Kräften P, Q ein mathematischer Winkelhebel. (Fig. 66.)

Dieses Werkzeug, nämlich die Welle mit dem Rade, kommt unter mancherlei Gestalten und verschiedenen Namen vor, wie Erdwinde, Göpel, Kreuzhaspel, Mühlenrad ꝛc., und man kann es in Mühlen, auf Schiffen, bei Bauten ꝛc. sehen.

42. Ist anstatt des Rades an der Axe der Welle ein Hebelarm mit einer Handhabe befestigt, so heißt derselbe eine Kurbel. Vermittelst der Kurbel wird die Welle um ihre Axe gedreht. Zur Heraufschaffung des Wassers aus einem Brunnen gebraucht man eine Welle mit einer Kurbel versehen. Der Durchmesser der Welle ist einen Fuß, der Hebelarm ist $1\frac{1}{2}$ Fuß lang; der Eimer hat einen Rauminhalt von 2 Kubikfuß. Das Gewicht des Eimers beträgt 15 ℔. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Eimer voll Wasser heraufzuschaffen?

Da 1 Kubikfuß Wasser = 66 ℔, so sind 2 Kbf. Wasser = 2 . 66 = 132 ℔, dazu noch das Gewicht des Eimers 15 ℔, sind zusammen 147 ℔ = L.

Digitized by Google

Ist nun bc der Radius der Welle, cA der Hebelarm mit AP, der Handhabe, so ist bc = ½ Fuß, weil der Durchmesser der Welle = 1 Fuß, und cA = 1½ Fuß; daher ist zur Bedingung des Gleichgewichts L : P = Ac : cb oder 147 ℔ : P = 1½ : ½ = 3 : 1; folglich P = $\frac{147}{3}$ = 49 ℔. Man muß also eine Kraft, die 49 ℔ hebt, anwenden, um den Eimer voll Wasser in der Luft schwebend zu erhalten; ist also die Kraft größer als 49 ℔, so ist sie vermögend, den Eimer Wasser heraufzuwinden.

43. Sei ABC (Fig. 67.) die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide und S ihre Spitze. Sei BD = DC; so ist △ ABD = △ ACD, weil der Inhalt eines Dreiecks gleich dem halben Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe ist; ihre Grundlinien BD, DC sind einander gleich, und auch ihre Höhen, denn von A giebt es nur eine Senkrechte auf BC; würde also AD unterstützt, so müßte das △ ABC im Gleichgewichte sein; daher liegt der Schwerpunkt des △ ABC in der Geraden AD.

Ist nun ferner AE = BE, so liegt, aus denselben Gründen, der Schwerpunkt des △ ABC auch in CE; daher ist G, der Durchschnittspunkt der AD, CE, der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, und es ist wie früher, AG = ⅔ AD, GD = ⅓ AD, und CG = ⅔ CE, GE = ⅓ CE.

Legt man eine Ebene durch S und AD, so wird die Pyramide durch dieselbe in zwei gleiche Pyramiden ABDS und ACDS zerlegt; denn jede Pyramide ist gleich einem Drittel des Produkts aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe; ihre Grundflächen ABD, ACD sind einander gleich, solches sind auch ihre Höhen, weil es nur eine Senkrechte von S auf die Grundfläche ABC giebt, daher sind auch die genannten Pyramiden einander gleich. Würde also die Gerade AD senkrecht unterstützt, so müßte die ganze Pyramide im Gleichgewichte sein. Eben dasselbe gilt in Bezug auf die Ebene CES; daher muß in dem Durchschnitte GS dieser und jener Ebene der Schwerpunkt der ganzen Pyramide liegen.

Nimmt man SF = ⅔ SE, so ist F der Schwerpunkt des △ ABS, und betrachtet man △ ABS als die Grundfläche, C als die Spitze der Pyramide, so gilt von CF dasselbe, was man von SG fand; es muß also auch in CF der Schwerpunkt der Pyramide, also in ihrem Durchschnittspunkte O liegen.

Da nun EF = ¼ ES, EG = ¼ EC, so ist FG parallel CF; daher ist EF : ES = EG : EC = FG : SC = 1 : 3; folglich ist FG : SC = FO : OC = GO : OS = 1 : 3; denn △ FGO ähnlich △ CSO; daher FO = ¼ FC, CO = ¾ CF, und GO = ¼ GS, SO = ¾ SG; und O ist der Schwerpunkt der Pyramide. Hieraus folgt der Satz:

Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in derjenigen Geraden, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte ihrer Grundfläche verbindet, und er ist in derselben um ¾ dieser

Digitized by Google

Geraden von der Spitze und um $\frac{1}{4}$ derselben von der Grundfläche der Pyramide entfernt.

Anmerk. Derjenige Leser, welcher einige Kenntnisse der Geometrie und zwar aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke hat, wird die Gründe der Ableitung des Schwerpunkts der Pyramide deutlich einsehen; Andern kann in solcher Kürze die Sache nicht klarer gemacht werden.

Der für den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide ausgesprochene Satz gilt für den Schwerpunkt jeder Pyramide, weil jede Pyramide in dreiseitige zerlegt werden kann.

44. Ein Obelisk von Granit, in Gestalt einer geraden vierseitigen Pyramide, auf der Erde liegend, soll vermittelst Maschinen in die Höhe gerichtet werden. Welche Kraft wird dazu mit Anwendung einer Welle erforderlich sein, um den Obelisken auf seine Grundfläche zu stellen? Die Höhe des Obelisken beträgt 180 Fuß; seine Grundfläche ist ein Quadrat, dessen eine Seite 30 Fuß lang ist; das specifische Gewicht des gemeinen Granits ist $2{,}_{956}$. (Fig. 68.)

Sei ABCD die Grundfläche, S die Spitze des Obelisken; die AC, BD mögen sich in E durchschneiden, so ist E der Schwerpunkt des Quadrats ABCD; daher liegt der Schwerpunkt der Pyramide in SE, und zwar um $\frac{3}{4}$ SE von der Spitze S und $\frac{1}{4}$ SE von E entfernt. Da nun SE senkrecht auf der Grundfläche ABCD steht, so ist SE die Höhe des Obelisken $= 180'$, und $EO = \frac{1}{4}ES = 45'$, so ist $OS = \frac{3}{4}SE = 135'$ und O ist der Schwerpunkt der ganzen Pyramide.

Da $AB = 30'$, so ist $\square ABCD = 30 \cdot 30 = 900$ Quadratfuß, und weil der Inhalt einer Pyramide gleich $\frac{1}{3}$ des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe ist, so ist der Inhalt des Obelisken $= \frac{1}{3} \cdot 900 \cdot 180 = 54\,000$ Kubikfuß. Das specifische Gewicht dieses Granits ist $2{,}_{956}$, und ein Kubikfuß Wasser $= 66\,\text{℔} = \frac{3}{5}$ Centner; daher ist das Gewicht des Obelisken von Granit $= \frac{3}{5} \cdot 54\,000 \cdot 2{,}_{956} = 95\,774{,}_{4}$ Centnern. Würde also der Schwerpunkt O des Obelisken senkrecht unterstützt, so würde derselbe im Gleichgewichte sein, und er würde auf die Unterlage einen Druck von $95\,774{,}_{4}$ Centnern ausüben. Da man in der Kavalerie annimmt, daß ein Pferd von ausgezeichneter Stärke 10 Centner fortziehen könne, so würden zum Transporte dieses Obelisken 9577 Pferde erforderlich sein.

Man kann nun den ganzen Obelisken als einen Hebel betrachten und zwar auf folgende Weise.

Man bringe ein Stativ mit 4 Füßen RF, RG, RH, RK an, die eine Rolle R tragen. mm′ sei die Axe einer Welle, welche auf irgend eine Art an den Erdboden befestigt ist. Es gehe nun ein Seil, das an der Spitze S des Obelisken fest gemacht ist, über die um ihre Axe bewegliche Rolle R bis zur Welle, sei um diese geschlungen und an derselben befestigt; indem nun die Welle vermittelst der Hebelarme ab, cd, ef ꝛc. um ihre Axe gedreht wird,

Digitized by Google

zieht das Seil die Spitze S des Obelisken in die Höhe; der Erdboden hebt den Druck der Kante AB auf, mit welcher der Obelisk den Erdboden berührt; daher kann man den Widerstand der Erde und den Zug des Seils als die beiden Kräfte betrachten, welche in der Richtung von unten nach oben, und die Schwere oder das Gewicht des Obelisken als die Mittelkraft, die im Schwerpunkte O in der entgegengesetzten Richtung, von oben nach unten, wirkend sind; folglich sind die Hebelarme dieses physischen Hebels die Längen SO, OE und die Gewichte desselben sind die Gewichte der Körper, welche dadurch entstehen, daß man durch den Schwerpunkt O des Obelisken eine Ebene A′B′C′D′ parallel der Grundfläche ABCD legt. Man hat also nun die Gewichte dieser Körper und ihre Schwerpunkte zu suchen.

Die Stereometrie lehrt nun, daß sich die, durch eine der Grundfläche parallele Ebene, abgeschnittene Pyramide zur ganzen Pyramide verhalte, wie sich der Kubus der Höhe der abgeschnittenen Pyramide zum Kubus der Höhe der ganzen Pyramide verhält. Daher ist:

Pyramide A′B′C′D′S : Pyramide ABCDS = SO . SO . SO : SE . SE . SE.

Es ist aber SO = $\frac{3}{4}$ SE, also ist vorstehendes Verhältniß dem von $\frac{3}{4}$ SE . $\frac{3}{4}$ SE . $\frac{3}{4}$ SE : SE . SE . SE = $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}$: 1 = 27 : 64. Folglich ist Pyramide A′B′C′D′S = $\frac{27}{64}$ der Pyramide ABCDS; also ist die abgekürzte Pyramide ABCDA′B′C′D = $\frac{37}{64}$ Pyramide ABCDS. Da nun das Gewicht der ganzen Pyramide = 95 774,4 Centnern, so ist das Gewicht der abgeschnittenen Pyramide A′B′C′D′S = $\frac{27}{64}$. 95 774,4 = 40 404$\frac{33}{40}$, der abgekürzten = $\frac{37}{64}$. 95 774,4 = 55 369$\frac{21}{40}$ Centnern. Jenes Gewicht heiße P, dieses Q.

Nun hat man die Schwerpunkte dieser beiden Körper zu suchen. Der Schwerpunkt der abgeschnittenen Pyramide ist nach obigem Satze leicht gefunden; ist er O′, so ist SO′ = $\frac{1}{4}$ SO = $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}$ SE = $\frac{9}{16}$ SE, und OO′ = $\frac{1}{4}$ SO = $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ SE = $\frac{3}{16}$ SE.

Der Schwerpunkt der abgekürzten Pyramide sei O″; so ist als Bedingung des Gleichgewichts P : Q = OO″ : OO′.

Es ist aber P : Q = $\frac{27}{64}$ Pyramide ABCDS : $\frac{37}{64}$ derselben = 27 : 37, und OO′ = $\frac{3}{16}$ SE; daher wird obige Proportion diese:

27 : 37 = OO″ : $\frac{3}{16}$ SE; also OO″ = $\frac{81}{16 . 37}$ SE = $\frac{81}{592}$ SE.

Nun sind aber die Hebelarme nicht OO′, OO″, sondern OS, OE; also hat man die Gewichte der Punkte S, E zu suchen. Man nenne nun das Gewicht im Punkte S auch S und im Punkte E gleichfalls E, so ist Gewicht O′ : Gewicht S = SO : OO′ = $\frac{3}{4}$ SE : $\frac{3}{16}$ SE = 4 : 1; daher Gewicht S = $\frac{1}{4}$ Gewicht O′ = $\frac{1}{4}$. $\frac{27}{64}$ Pyramide ABCDS; eben so ist Gewicht O″ : Gewicht E = $\frac{1}{4}$ SE : $\frac{81}{16 . 37}$ SE = 4 . 37 : 81; also Gewicht E = $\frac{81}{4 . 37}$. Gewicht O″ = $\frac{81}{4 . 37}$. $\frac{37}{64}$ = $\frac{81}{4 . 64}$ Pyramide ABCDS.

Digitized by Google

Nach dem Gesetze des statischen Moments muß nun sein: Gewicht S.SO = Gewicht E.EO; und dieses ist in der That vorhanden. Denn Gewicht S.SO $= \frac{1}{4} . \frac{27}{64} .$ Pyramide ABCDS $. \frac{3}{4}$ SE $= \frac{1}{4} . \frac{27}{64} . \frac{3}{4} = \frac{81}{4.64.4}$, und Gewicht E.EO $= \frac{81}{4.64}$ Pyramide ABCDS $. \frac{1}{4}$ SE $= \frac{81}{4.64.4}$, woraus die Gleichheit erhellt.

Der Erdboden muß also einen Druck = Gewicht E $= \frac{81}{4.64}$ Pyramide ABCDS $= \frac{81}{4.64} . 95\,774,4 = 30\,303\frac{96}{160}$ Centnern, und das Seil ein Gewicht S $= \frac{27}{4.64} .$ Pyramide ABCDS $= \frac{27}{4.64} . 95\,774,4 = 10\,101\frac{33}{160}$ Centnern tragen.

Wäre nun der Durchmesser der Welle = 2 Fuß, jeder Hebelarm ma = 4 Fuß, so ist mn : ma = 1′ : 4″.

Nennt man nun das Gewicht, welches auf die Welle in n wirkt, n, das, welches auf ma in a wirkt, a; so ist:

Gewicht n : Gewicht a = ma : mn = 4 : 1, also Gewicht a $= \frac{1}{4}$ Gewicht n.

Das Gewicht aber, welches auf n wirkt, ist gleich dem, welches auf das Seil SR in S wirkt $= 10\,101\frac{33}{160}$ Centnern; daher Gewicht a $= \frac{1}{4} . 10\,101\frac{33}{160} = 2525\frac{193}{640}$ Centnern $= 277\,783\frac{11}{64}$ ℔.

Stöpel macht nun in seinem: »Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen, Stendal in Kommission bei Franzen und Große, 1819.« Seite 327 die Bemerkung: daß der Mensch mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,14 ℔ drücken, $265\frac{1}{4}$ ℔ heben, und 102 ℔ im Gehen ziehen könne. Ein Pferd ziehe etwa 771 ℔. Nach dieser Annahme wären also 277 783$\frac{11}{64}$ ℔ : 102,14 ℔ = 2719,6, also 2719 Menschen zur Errichtung des Obelisken vermittelst der Welle erforderlich.

45. Ein Rad, an welches in der Richtung der Radien desselben auf dem äußern Umfange Zähne angebracht sind, mit denen es in die Zähne eines andern Rades greift, und dieses mit bewegt, heißt ein Stirnrad. Stehen die Zähne senkrecht auf der Fläche des Rades, so heißt es ein Kronrad. Alle Zähne eines Rades zusammengenommen bilden den Kamm desselben (Fig. 69.)

Das kleinere Rad, in dessen Zähne der Kamm des größern greift, um es zu bewegen, heißt das Getriebe, der Triebstock, der Trilling.

Greifen mehrere Räder in einander und zwar so, daß durch die Bewegung des einen Rades alle übrigen in Bewegung gesetzt werden, so heißt diese Verbindung der Räder ein Räderwerk.

In Fig. 70. sind P, Q, R Räder, die an Wellen angebracht sind. Nun greife das Rad P mit seinem Kamme in das Getriebe B des Rades Q, dieses wieder mit seinem Kamme in das Getriebe C des Rades R ꝛc. An der Welle des Rades A hänge eine Last L; vom Rade R gehe ein Seil über eine Rolle S, und an diesem Seile wirke eine Kraft K.

Die Radien der Räder P, Q, R seien r, r′, r″; die Radien der Welle A und der Getriebe B, C seien ϱ, ϱ′, ϱ″. Nennt man die Kräfte, mit

Digitized by Google

welchen die Räder P, Q, R wirken, P, Q, R, so hat man nach dem Gesetze des statischen Moments

$$L : P = r : \varrho$$
$$P : Q = r' : \varrho' \quad \text{Hieraus folgt durch Zusammen-}$$
$$Q : R = r'' : \varrho'' \quad \text{setzung}$$
$$L : R = r . r' . r'' : \varrho . \varrho' . \varrho''.$$

Die erste Proportion ist aus dem Vorhergehenden klar; die zweite wird dadurch begreiflich, daß man erwägt, das Rad Q könne sich mit keiner andern Kraft bewegen, als mit derjenigen, welche das Rad P auf das Getriebe B des Rades Q ausübt; und hieraus ergiebt sich nach demselben Schlusse die Richtigkeit der dritten Proportion. Auf K wirkt nun wieder keine andere Kraft, als diejenige, welche das Rad R hervorbringt; daher ist $K = R$, folglich ist $L : K = r . r' . r'' : \varrho . \varrho' . \varrho''$.

Diese Auseinandersetzung nimmt stillschweigend an, daß die bewegende Kraft durch das Gewicht oder die Last L erzeugt werde; dieselben Verhältnisse müssen aber stattfinden, wenn man K als die Kraft ansieht, welche die Bewegung veranlaßt, oder Ursache derselben ist.

Die obige zusammengesetzte Proportion giebt daher das Verhältniß zwischen der Ursache und der Wirkung an, oder zwischen Kraft und Last. Will man dieses Verhältniß in Zahlen ausdrücken, so muß man die Längen der Radien r, r', r''; ϱ, ϱ', ϱ'' oder ihr Verhältniß zu einander kennen.

Sei $r = 44''$, $r' = 34''$, $r'' = 24''$; $\varrho = 14''$, $\varrho' = 11''$, $\varrho'' = 6''$; so ist $L : K = 44 . 34 . 24 : 14 . 11 . 6 = 272 : 7$.

Nimmt man an, daß ein Mensch 168 ℔ von oben nach unten ziehen könne, so wäre $L : 168 ℔ = 272 : 7$; daher $L = \frac{272 . 168}{7} = 6528 ℔$.

46. Sowohl der Radius jedes Rades als auch der seines Getriebes oder seiner Welle kommt in Rechnung, überdies noch die Last und die Kraft, dieses sind doppelt so viele Stücke als die Zahl der Räder und noch zwei Stücke; ferner ist die Zahl der Proportionen gleich der Zahl der Räder; und da man aus jeder Proportion nur eine Größe berechnen kann, so ist die Zahl der Größen, welche berechnet werden können, gleich der Zahl der Räder; folglich müssen zur Berechnung der in den angezeigten Proportionen vorkommenden Größen so viele als die Zahl der Räder und noch zwei Größen gegeben sein.

Ist die Zahl der Räder n, so ist die Zahl der in Rechnung vorkommenden Größen $2 . n + 2$.

Die Zahl der berechenbaren Größen ist n, und die Zahl der gegebenen ist $n + 2$.

Die obige zusammengesetzte Proportion kann man auch so ausdrücken

$$\frac{K}{L} = \frac{\varrho . \varrho' . \varrho''}{r . r' . r''} = \frac{\varrho}{r} . \frac{\varrho'}{r'} . \frac{\varrho''}{r''}.$$

Digitized by Google

In diesem Ausdrucke kommt nur das Verhältniß der Radien der Räder zu denen ihrer Getriebe vor. Soll z. B. die Kraft nur $\frac{1}{100}$ der Last betragen, so ist $\frac{K}{L} = \frac{1}{100} = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\varrho'}{r'} \cdot \frac{\varrho''}{r''}$; also muß man den Bruch $\frac{1}{100}$ in drei solche Brüche zerlegen, deren Produkt gleich dem gegebenen Bruche ist; und man könnte $\frac{1}{100} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$ setzen. Diese ist aber nicht die einzige mögliche Zerlegung; denn man kann auch $\frac{1}{100} = \frac{6}{600} = \frac{24}{2400} = \frac{15}{1500} = \frac{105}{10500}$ ꝛc. setzen, und dieses giebt folgende Brüche $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{15}$, oder $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{96}$, oder $\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{10}$, ꝛc.

Ferner kann man aus den angezeigten Proportionen die Kraft finden, welche jedes Rad ausübt, so ist $P = \frac{\varrho}{r} . L$; $Q = \frac{\varrho'}{r'} . P = \frac{\varrho}{r} . \frac{\varrho'}{r'} . L$, $R = \frac{\varrho}{r} . \frac{\varrho'}{r'} . \frac{\varrho''}{r''} . L$.

Für mehr oder weniger als 3 Räder findet man ähnliche Proportionen und ähnliche Ausdrücke.

47. Die Zahl der Zähne des Rades P sei Z, die des Rades Q sei Z'; die Zahl der Zähne des Getriebes B sei z', und die des Getriebes C sei z''. Die Getriebe können anstatt der Zähne auch Triebstöcke haben, so vertreten diese die Stelle der Zähne. Die Zahlen der Umläufe der Räder P, Q, R seien U, U', U''.

Hat z. B. das Rad P 150 Zähne, das Getriebe B 15 Zähne oder Triebstöcke, so wird das Getriebe B so viele Umläufe machen, während das Rad P einen Umlauf vollendet, als 15 in 150 enthalten ist; daher ist $U' = \frac{Z}{z'}$ d. h. Wenn ein Rad einen Umlauf macht, so ist die Zahl der Umläufe des Getriebes, welches durch jenes Rad in Bewegung gesetzt wird, gleich der Zahl der Zähne des bewegenden Rades dividirt durch die Zahl der Triebstöcke des bewegten Getriebes.

Macht also das Rad P U Umläufe, so ist die Zahl U' der Umläufe des bewegten Rades $Q = U . \frac{Z}{z'} = U . u' = U'$.

Hieraus folgt nun:

für einen Umlauf des Rades P ist die Zahl der Umläufe des Rades $Q = u' = \frac{Z}{z'}$

" " " " " Q " " " " " " " " $R = u'' = \frac{Z'}{z''}$

ferner ist für U Umläufe des Rades P die Zahl der Umläufe des Rades Q $= U' = U . u' = \frac{Z}{z'} . U$; für U' Umläufe des Rades Q ist die Zahl der Umläufe des Rades $R = U'' = U' . u'' = \frac{Z'}{z''} . U' = \frac{Z}{z'} . \frac{Z'}{z''} . U$.

Digitized by Google

Hat also Rad P 540 Zähne = Z, Rad Q 360 Zähne = Z, ferner Getriebe B = 24 Triebstöcke = z′, Getriebe C = 18 Triebstöcke = z″, so ist für 60 Umläufe des Rades P die Zahl der Umläufe des Rades Q $= \frac{Z}{z'} . U = \frac{540}{24} . 60 = 1350$, und die Zahl der Umläufe des Rades R $= \frac{Z}{z'} . \frac{Z'}{z''} . U = \frac{540}{24} . \frac{360}{18} . 60 = 2700$.

Würde sich also das Rad P in einer Minute einmal herumdrehen, so müßte in derselben Zeit das Rad Q sich $\frac{540}{24} = 22\frac{1}{2}$ und das Rad R sich $\frac{540}{24} . \frac{360}{18} = 450$ mal herumdrehen, also das letzte Rad in jeder Sekunde $7\frac{1}{2}$ Umläufe machen.

II. Beziehungen zwischen Raumgrößen und dem Gelde.

A. Beziehungen zwischen Längengrößen und dem Gelde.

Die Längengrößen auf Geld bezogen und umgekehrt führt auf keine andern Aufgaben als auf solche, welche den Kauf und Verkauf gewisser Waaren, die nach Längeneinheiten gemessen werden, zum Gegenstande haben. Eine andere mit diesen verwandte Art Aufgaben behandelt die Reisekosten, nicht aber den Transport von Waaren, weil in diesen auch das Gewicht derselben in Betracht gezogen wird.

1. Die Elle von einem Zeuge wird mit 3 Thlr. $8\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt; Jemand hat von diesem Zeuge $5\frac{7}{8}$ Ellen gekauft; wie viel hat er dafür zu zahlen?

Jede dieser Art Aufgaben kann auf dreifache Weise, durch Schlüsse, Proportionen und den Kettensatz berechnet werden; daher müssen auch alle drei geübt werden.

Da 1 Elle 3 ℳ $8\frac{1}{2}$ Sgr. kostet, so beträgt der Werth von $5\frac{7}{8}$ Ellen

$5\frac{7}{8} . (3\ ℳ\ 8\frac{1}{2}\ \text{Sgr.}) = \frac{47}{8} . 3\ ℳ + \frac{47}{8} . \frac{17}{2}\ \text{Sgr.}$

$\frac{47}{8} . 3\ ℳ = 17\ ℳ\ 18\frac{3}{4}\ \text{Sgr.}$

$\frac{47}{8} . \frac{17}{2}\ \text{Sgr.} = 1\ \text{„}\ 19\frac{15}{16}\ \text{„}$

$19\ ℳ\ 8\ \text{Sgr.}\ 8\frac{1}{4}\ ₰.$

2. Man hat 27 ℳ 18 Sgr. 5 ₰ für $6\frac{1}{2}$ Ellen von einem Zeuge bezahlt; wie theuer ist eine Elle von demselben?

$6\frac{1}{2}$ Ellen : 1 Elle = 27 ℳ 18 Sgr. 5 ₰ : x, oder

13 : 2 = 27 ℳ 18 Sgr. 5 ₰ : x = 4 ℳ 7 Sgr. $5\frac{5}{13}$ ₰

13 | 55 ℳ 6 Sgr. 10 ₰

3. Wenn $4\frac{3}{4}$ Ellen eines Zeuges 10 ℳ 10 Sgr. kosten; wie viel hat man für $27\frac{5}{8}$ Ellen von demselben Zeuge zu bezahlen?

$27\frac{5}{8}$ Ellen — $4\frac{3}{4}$ — $10\frac{1}{3}$ ℳ

114 | 6851 | 60 ℳ 2 Sgr. $10\frac{14}{19}$ ₰.

Digitized by Google

Die Brüche werden dadurch weggeschafft, daß man auf beiden Seiten mit den Nennern multiplicirt.

Anmerk. In diesen Aufgaben hat man auch die ausländischen Maße und Münzen zu berücksichtigen; außerdem den Zoll, ferner den Vortheil und Nachtheil in Rechnung zu ziehen.

4. Ein Kaufmann nimmt auf der Leipziger Messe 3 Pack Tuch im Werthe von 47 520 ℳ. Wenn nun ein Pack Tuch 10 Stück zu 22 Tuch à 32 Ellen hält; wie theuer ist eine Preuß. Elle?

1 Leipziger Elle = 0,565 Meter; 1 Preuß. Elle = 0,667 Meter.

Seit Anfang des Jahres 1841 ist in Sachsen der 14 Thalerfuß eingeführt, 1 ℳ = 30 Neugroschen zu 10 ₰; die Sächs. Thaler sind also den Preuß. Thalern und die Neugroschen den Preuß. Sgr. gleich, 10 Sächsische Pfennige = 12 Preuß. Pfennigen.

Da 1 Pack $\frac{1}{3}$ von 3 Pack ist, so ist auch der Werth von 1 Pack $\frac{1}{3}$ von dem Werthe der 3 Pack; also 1 Pack Tuch = $\frac{1}{3}$. 47 520 ℳ = 15 840 ℳ.

Aus den Angaben der Aufgabe folgt, daß 1 Pack = 10 . 22 . 32 = 7040 Ellen; daher der Werth einer Elle = $\frac{15840}{7040}$ = $2\frac{1}{4}$ ℳ.

Weil 1 Leipz. Elle = 0,565 Meter, und 1 Preuß. Elle = 0,667 Meter, so ist 1 Preuß. Elle = $\frac{0,667}{0,565}$ Leipz. Ellen; daher der Werth einer Preuß. Elle = $\frac{667}{565}$. $2\frac{1}{4}$ ℳ = 2,656195 ℳ. Den Decimalbruch multiplicire man mit 30, so erhält man die Zahl der Sgr., also 30 . 0,656195 = 19,68585 Sgr.; den Decimalbruch mit 12 multiplicirt, giebt die Zahl der Pfennige, also ist 12 . 0,68585 = 8,2302 ₰; also ist der Werth einer Preuß. Elle = 2 ℳ 19 Sgr. 8,23 ₰.

Anmerk. So oft die Rechnung auf einen Bruch führt, der sich nicht durch kleine Zahlen ausdrücken läßt, hat man stets denselben in einen Decimalbruch zu verwandeln, wie es hier geschehen ist; denn dieses ist die kürzeste, einfachste und sicherste Rechnung; sie führt überall rasch zum Ziele, und ist vorzüglich für das Geschäftsleben geeignet; daher auch in allen großen Handelsstädten diese Rechnungsweise allgemein im Gebrauche ist. Wenn unsere Jugend hierin unbewandert erscheint, so ist es Schuld der Lehrer, die diese Rechnungsart als eine künstliche und geheimnißvolle scheuen, da sie doch viel einfacher als die gewöhnliche ist.

5. Auf der Frankfurter Messe nimmt ein Kaufmann 2 Pack 8 Stück 13 Tuch von einem gewissen Zeuge im Werthe von 35 224 ℳ. Die Transportkosten betragen $5\frac{1}{2}$ %. Wie theuer ist eine Elle, ohne und mit Rücksicht auf die Transportkosten?

2 Pack 8 Stück 13 Tuch zu 32 Ellen = 20 128 Ellen; daher
20 128 Ellen : 1 Elle = 35 224 ℳ : x = $1\frac{3}{4}$ ℳ ohne Transportkosten.

Da die Transportkosten $5\frac{1}{2}$ % betragen, so muß man so vielmal $5\frac{1}{2}$ ℳ für den Transport zahlen, als der Einkaufspreis 100 ℳ enthält, also kostet

Digitized by Google

die Zahl Ellen, welche im Einkaufe 100 ℔ an Werth sind, mit dem Transport $105\frac{1}{2}$ ℔, daher

$100 : 105\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$ ℔ : x = 1,84625 ℔ = 1 ℔ 25 Sgr. 4,65 ₰.

6. Auf der Leipziger Messe erhandelt ein Kaufmann 5 Ballen 8 Tuch von einem Zeuge im Werthe von 4624 ℔. Da er baare Zahlung leistet und die Waare unversteuert ist, so erhält er $8\frac{1}{3}$ % Rabatt. Wie viel hat er baar zu zahlen? Wie theuer eine Elle?

Diese $8\frac{1}{3}$ % müssen auf 100 gerechnet werden, d. h. für $108\frac{1}{3}$ ℔ Waare zahlt man baar 100 ℔. Daher ist die Baarzahlung für die ganze Waare

$$= \frac{4624 \cdot 100}{108\frac{1}{3}} = 4257{,}53846 \text{ ℔} = 4257 \text{ ℔ } 16 \text{ Neugr. } 1{,}5 \text{ Neupf.}$$

Da in der Aufgabe nicht bemerkt ist, ob man den Preis einer Elle mit oder ohne Rücksicht des Rabatts zu wissen wünscht, so muß er in beiden Fällen berechnet werden.

1 Ballen = 12 Tuch zu 32 Ellen; daher 5 Ballen 7 Tuch = 68.32 Ellen, also 1 Elle = $\frac{4624}{68.32} = 2\frac{1}{8}$ ℔ ohne Rabatt.

Mit Rücksicht auf Rabatt 1 Elle = $\frac{2\frac{1}{8} \cdot 100}{108\frac{1}{3}} = 1{,}923$ ℔ = 1 ℔ 27 Sgr. 8,26 ₰.

7. Jemand läßt sich aus den Niederlanden Tuch kommen, die Niederländische Elle (1 Meter gleich) zu 4 Fl. 55 Cents. Er remittirt (sendet) dafür einen Hamburger Wechsel von 23 849 m℔ 4 ß $5\frac{19}{25}$ ₰.

Der Kurs von Berlin auf Amsterdam ist 140 ℔ Preuß. Cour. für 250 Fl. Holl. Cour., und auf Hamburg 150 ℔ Preuß. Cour. für 300 m℔ Hamb. Bco. Die Preuß. Elle = 0,667 Meter.

a) Wie theuer ist die ganze Waare in Preuß. Courant?

b) Wie theuer ist die ganze Waare in Holl. Courant?

c) Wie viele Niederl. Ellen ließ man sich kommen?

d) Wie viele Preuß. Ellen hält das gesammte Tuch?

e) Wie theuer ist eine Preuß. Elle in Preuß. Courant?

a) Da für die ganze Waare ein Wechsel von 23 849 m℔ 4 ß $5\frac{19}{25}$ ₰ Hamb. Bco., 1 m℔ = 16 ß à 12 ₰, remittirt wird, und 300 m℔ = 150 ℔ Preuß. Cour., also 2 m℔ = 1 ℔ Pr. C., so sind

x Pr. — 23 849 m℔ 4 ß $5\frac{19}{25}$ ₰ Hamb. Bco.
2 — 1 ℔ Preuß. Cour.

25	298 116	11 924 ℔ 19 Sgr. $2\frac{2}{5}$ ₰ Pr. C.

Es sind $5\frac{19}{25}$ ₰ = $\frac{144}{25}$ ₰ = $\frac{12}{25}$ ß und 4 ß = $\frac{4 \cdot 12}{25}$ ß = $\frac{7}{25}$ m℔.

b) x Fl. Holl. Cour. — 23 849$\frac{7}{25}$ Hamb. Mark Bco.
300 — 150 Thlr. Pr. Cour.
140 — 250 Fl. Holl. Cour.

x Fl. Holl. Cour. = 21 294.

Digitized by Google

c) Da 1 Niederl. Elle = 4 Fl. 55 Cents, und 1 Fl. = 100 Cents, so sind 4 Fl. 55 Cents = 4,55 Fl.; folglich ist die Zahl der Niederländ. Ellen = 21 294 Fl. : 4,55 Fl. = 4680.

d) Weil 1 Pr. Elle = 0,667 Meter, und 1 Niederl. Elle = 1 Meter, so sind 4680 Niederl. Ellen = $\frac{4680}{0,667}$ = 7016,49178 Pr. Ellen.

e) Durch die Resultate unter a) und d) kann man den Preis einer Preuß. Elle in Preuß. Cour. berechnen; man kann denselben aber auch ohne vorhergehende Rechnungen unmittelbar aus den Angaben der Aufgabe durch den Kettensatz, wie folgt, finden:

-- 1 Pr. Elle
1 — 0,667 Meter
1 — 4,55 Fl. Holl. Cour.
250 — 140 ℳ Pr. Cour.

5 | 8,49758 | 1,699516 ℳ = 1 ℳ 20 Sgr. 11,82576 ₰;

also kostet eine Preuß. Elle nahe 1 ℳ 21 Sgr.

8. Jemand hat 9 Stück Tuch zu 22 Tuch à 32 Ellen eingekauft und für jede 8 Ellen 9 Thlr. gezahlt; er verkauft nun jede 3 Ellen zu 5 Thlr.; welchen Gewinn erlangt er dadurch im Ganzen und wie viele Procente beträgt derselbe?

9 Stück zu 22 Tuch à 32 Ellen = 9 . 22 . 32 Ellen; daher ist der Einkaufspreis = $\frac{9 \cdot 22 \cdot 32}{8}$. 9 Thlr. = 7128 Thlr. Der Verkaufspreis = $\frac{9 \cdot 22 \cdot 32}{3}$. 5 Thlr. = 10 560 Thlr.; also ist der Gewinn = 3432 Thlr.

Da man für 8 Ellen 9 Thlr. zahlt, so kostet 1 Elle $1\frac{1}{8}$ Thlr., und weil man 3 Ellen für 5 Thlr. verkauft, so nimmt man für 1 Elle $1\frac{2}{3}$ Thlr.; daher ist der Gewinn an 1 Elle $\frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$ Thlr.; und dieser beträgt daher $\frac{\frac{13}{24}}{1\frac{1}{8}}$. 100 = $\frac{13 \cdot 100}{27}$ = $48\frac{4}{27}$ %.

9. Jemand hat 18 Tuch 24 Ellen von einem Zeuge so erhandelt, daß er für jede 9 Ellen 13 Thlr. zahlt; durch den Verkauf im Kleinen will er $16\frac{2}{3}$ % gewinnen; für wie viel muß er eine Elle verkaufen und welches ist der ganze Gewinn durch diesen Handel?

Da 9 Ellen 13 Thlr. kosten, so ist der Preis 1 Elle = $\frac{13}{9}$ Thlr. Um $16\frac{2}{3}$ % zu gewinnen, muß man für jede 100 Thlr., die man zahlt, $116\frac{2}{3}$ Thlr. einnehmen; daher muß der Verkaufspreis 1 Elle = $\frac{\frac{13}{9}}{100} \times 116\frac{2}{3}$ = $\frac{13 \cdot 350}{900 \cdot 3}$ = $\frac{91}{54}$ Thlr. = 1 Thlr. 20 Sgr. $6\frac{2}{3}$ Pf. fein.

18 Tuch 24 Ellen = (18 . 32 + 24) Ellen; daher ist der Einkaufspreis = $\left(\frac{18 \cdot 32 + 24}{9}\right)$. 13 = $66\frac{2}{3}$. 13 Thlr. und folglich der ganze Gewinn = $\frac{66\frac{2}{3} \cdot 13}{100}$. $16\frac{2}{3}$ = 144 Thlr. $13\frac{1}{3}$ Sgr.

Digitized by Google

10. Ein Handlungsdiener hat durch den Verkauf im Kleinen und durch straffes Anziehen des Zeuges beim Messen desselben während eines Monats 8 Ellen zu $2\frac{3}{4}$ Thlr., indem er auf jede Elle einen halben Zoll ersparte, gewonnen. Da nun die Elle gesetzlich $25\frac{1}{2}$ Zoll halten soll, so hat er während gedachter Zeit wie viele Ellen verkauft?

8 Ellen à $25\frac{1}{2}$ Zoll $= 8 . 51 = 408$ halbe Zoll; also hat er während eines Monats 408 Ellen verkauft.

11. Während der keine Handlungsdiener durch karges Messen eines Zeuges beim Verkaufe an jeder Elle $\frac{1}{4}$ Zoll erspart, hat ein Anderer durch reichliches Messen auf jede Elle $\frac{1}{4}$ Zoll zugegeben; sie haben während einer gewissen Zeit 780 Ellen verkauft und dadurch für sich $26\frac{2}{3}$ Thlr. gewonnen, indem die Elle von diesem Zeuge $5\frac{2}{3}$ Thlr. kostete. Wie viele Ellen hat jeder verkauft?

Würde der Geizige alles allein verkauft haben, so hätte er einen Gewinn von $780 . \frac{1}{4} = 260$ Zoll. Da der Gewinn $26\frac{2}{3}$ Thlr. beträgt, und eine Elle $5\frac{2}{3}$ Thlr. kostet, so ist der Gewinn $\frac{26\frac{2}{3}}{5\frac{2}{3}} = \frac{80}{17}$ Ellen, und weil 1 Elle $= 25\frac{1}{2}$ Zoll; so sind $\frac{80}{17}$ Ellen $= \frac{80}{17} . \frac{51}{2} = 120$ Zoll; so sind durch den Verkauf des Andern $260 - 120 = 140$ Zoll verloren gegangen. Wenn aber dieser verkauft, so wird nicht allein an jeder Elle $\frac{1}{4}$ Zoll nicht gewonnen, sondern noch $\frac{1}{4}$ Zoll obenein verloren, also gehen dadurch in Bezug auf den Gewinn $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ Zoll verloren; folglich hat dieser $140 : \frac{7}{12} = 240$ Ellen und jener $780 - 240 = 540$ Ellen verkauft.

B. Beziehungen zwischen Flächengrößen und dem Gelde.

Die Flächen erstrecken sich nach zwei Dimensionen, also wird man in den Rechnungen mit denselben auch auf beide Rücksicht nehmen müssen, und daher können Größen dieser Art nicht allein Zeuge, sondern auch Wege, Aecker, Flächenräume der Häuser, wie die Fußböden, Decken, Flächen der Wände ꝛc. sein. Zeuge werden nach Länge und Breite verkauft und gekauft, ebenso Ländereien, diese auch verpachtet, die Fußböden mit Dielen, Fliesen ausgelegt, Wände mit Tapeten belegt ꝛc., mit Farben angestrichen ꝛc. Man hat hier also einen reichen Stoff zu Aufgaben.

12. Für $7\frac{1}{2}$ Ellen $\frac{5}{4}$ Ellen breites Tuch zahlt man 13 Thlr. 10 Sgr.; wie viele Ellen wird man für 60 Thlr. erhalten, wenn das Tuch von derselben Güte aber $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist?

$7\frac{1}{2}$ Ellen $\frac{5}{4}$ Ellen breites Tuch enthalten $7\frac{1}{2} . \frac{5}{4}$ Quadrat-Ellen, und da diese $13\frac{1}{3}$ Thlr. kosten, so ist der Preis einer Quadrat-Elle $= \frac{13\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2} . \frac{5}{4}} = \frac{64}{45}$ Thlr.; daher muß man für 60 Thlr. $60 : \frac{64}{45} = \frac{15 . 45}{16}$ Quadrat-Ellen erhalten.

Digitized by Google

Wenn man nun den Inhalt einer Fläche durch die eine ihrer Dimensionen dividirt, so erhält man die andere; daher ist die Länge des Tuches $= \frac{15 \cdot 45}{16} : \frac{6}{4} = \frac{15 \cdot 45}{16} \cdot \frac{2}{3} = 28\frac{1}{8}$ Ellen.

13. Wenn man für $4\frac{1}{2}$ Ellen $\frac{6}{4}$ Ellen breites Tuch 19 Thlr. 15 Sgr. zahlt, so wird man für $56\frac{1}{4}$ Ellen $\frac{7}{4}$ breites Tuch von derselben Feinheit wie viel zu zahlen haben?

Diese Aufgabe kann man auf eine ähnliche Weise als die vorige lösen; hier soll sie durch zusammengesetzte Proportionen berechnet werden.

$4\frac{1}{2}$ Ellen : $56\frac{1}{4}$ Ellen $= 19\frac{1}{2}$ Thlr. : A Thlr.
$\frac{6}{4}$ Ellen : $\frac{7}{4}$ Ellen $=$ A Thlr. : B Thlr. oder durch Zusammensetzung

$4\frac{1}{2} \cdot 6 \quad : 56\frac{1}{4} \cdot 7 \quad = 19\frac{1}{2}$ Thlr. : B Thlr.

In der ersten Proportion wird angenommen, daß der Zeug in beiden Fällen von gleicher Breite sei; und unter dieser Annahme ist es klar, daß der Werth desselben mit seiner Länge in gleichem Verhältnisse wachsen muß, d. h. ist die Länge des Zeuges im zweiten Falle das 2-, 3-, 4fache ꝛc. der Länge desselben im ersten, so muß auch der Preis desselben im zweiten Falle das 2-, 3-, 4fache ꝛc. des Preises im ersten sein, und dieser gesuchte Preis ist durch A bezeichnet, weil man ihn nicht berechnen darf, obwohl es leicht geschehen könnte, indem er durch Zusammensetzung der Proportionen aus der Rechnung geht.

In der zweiten Proportion wird die Länge des Zeuges in beiden Fällen als gleich angenommen, und man schließt wie vorher: der Werth des Zeuges wächst mit seiner Breite.

In gedachten Proportionen sind folgende zwei Aufgaben enthalten:

1) wenn $4\frac{1}{2}$ Ellen $19\frac{1}{2}$ Thlr. kosten, so werden $56\frac{1}{4}$ Ellen von demselben Zeuge (und nämlich von derselben Breite) wie viel (A Thlr.) kosten?
2) wenn eine gewisse Zahl Ellen (nämlich $56\frac{1}{4}$) $\frac{6}{4}$ Ellen breites Zeuges A Thlr. kosten, so werden dieselbe Zahl Ellen, die aber $\frac{7}{4}$ Ellen breit sind, wie viel (B Thlr.) kosten?

Bevor man die Proportionen zusammensetzt, wird man die Nenner der Brüche wegschaffen, welches dadurch geschieht, daß man die Glieder durch den Generalnenner multiplicirt, und darauf noch dieselben durch ihr gemeines Maß dividirt. Man findet dadurch B $=$ 284 Thlr. 11 Sgr. 3 Pf.

14. Für das Abmähen einer Wiese von $63\frac{3}{4}$ Ruthen Länge und $24\frac{3}{4}$ Ruthen Breite zahlt man 3 Thlr.; für das Abmähen einer andern Wiese von $39\frac{1}{4}$ Ruthen Breite giebt man 10 Thlr. 20 Sgr. Wenn nun der Tagelohn der Arbeiter in beiden Fällen derselbe war, wie lang war die andere Wiese?

$39\frac{1}{4}$ Ruthen : $24\frac{3}{4}$ Ruthen $= 63\frac{3}{4}$ Ruthen : A Ruthen Länge
3 Thlr. : $10\frac{3}{4}$ Thlr. $=$ A Ruthen : B Ruthen Länge

$39\frac{1}{4} \cdot 3 \quad : 24\frac{3}{4} \cdot 10\frac{3}{4} \quad = 63\frac{3}{4}$ Ruthen : B Ruthen Länge.

Digitized by Google

Bekanntlich können nur gleichartige Größen in Verhältniß zu einander stehen; daher stehen in der ersten Proportion die Breiten zu einander, und wieder die Längen zweier Wiesen zu einander in Verhältniß. Es wird aber angenommen, daß der Mäherlohn für beide einander gleich sei, daher müssen die Flächen beider Wiesen auch einander gleich sein. Sind aber zwei Flächen einander gleich, so kann mit der Breite der einen Fläche nicht zugleich ihre Länge wachsen; sondern wenn die Breite der einen Wiese das 2-, 3-, 4fache ꝛc. der Breite der andern wird: so muß die Länge der ersten der 2te, 3te, 4te Theil ꝛc. von der Länge der andern sein, oder so muß die Länge der zweiten Wiese das 2-, 3-, 4fache ꝛc. der Länge der ersten sein. Es verhält sich also nicht die Breite der einen zu der Breite der andern, wie die Länge der ersten zur Länge der andern, sondern umgekehrt, wie die Länge der andern zur Länge der ersten.

A bezeichnet also die Länge einer Wiese, die für 3 Thlr. abgemäht wird, wenn ihre Breite $39\frac{1}{3}$ Ruthen beträgt.

In der zweiten Proportion werden die Breiten beider Wiesen als gleich angenommen; und B bezeichnet die Länge einer Wiese, die bei einer Breite von $39\frac{1}{3}$ Ruthen für $10\frac{2}{3}$ Thlr. abgemäht wird, wenn solches mit der ersten unter den gegebenen Bedingungen geschieht. Daher ist B die gesuchte Länge $= 142\frac{2}{9}$ Ruthen.

15. Ein Zimmer ist 28 Fuß breit, 36 Fuß lang und 15 Fuß hoch; seine Wände sollen mit Tapeten belegt werden, die $\frac{5}{4}$ Ellen breit sind, und von denen eine Elle der Länge nach 20 Sgr. kostet; wie viele Ellen sind zur Bekleidung der Wände erforderlich, und wie hoch wird dieselbe zu stehen kommen?

Die vier Wände des Zimmers kann man als ein Rechteck betrachten, dessen eine Dimension die Höhe des Zimmers und dessen andere gleich dem Umfange des Fußbodens ist; der Umfang des Fußbodens ist aber $= 2.28 + 2.36 = 128'$; also hat dieses Rechteck zu seiner Länge $128'$ und zu seiner Breite $15'$.

Weil nur gleichartige Größen in Verhältniß gesetzt werden können, so muß man entweder die Fuß in Ellen oder umgekehrt verwandeln; da nach Ellen gefragt wird, so wird es zweckmäßig sein, die Fuße in Ellen zu verwandeln. Nun ist 1 Elle $= 25\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{25\frac{1}{2}}{12} = \frac{17}{8}$ F.; also 8 Ellen $= 17$ F., folglich sind 15 Fuß $= \frac{15 \cdot 8}{17}$ Ellen und 128 Fuß $= \frac{128 \cdot 8}{17}$ Ellen.

$\frac{5}{4}$ Ellen : $\frac{15 \cdot 8}{17}$ Ellen $= \frac{128 \cdot 8}{17}$ Ellen : A Ellen

1 Elle : A Ellen $= \frac{2}{3}$ ℳ : B ℳ

$\frac{5}{4}$: $\frac{15 \cdot 8}{17}$ $= \frac{128 \cdot 8}{17} \cdot \frac{2}{3}$ ℳ : B ℳ

Hieraus folgt B $= 226{,}^{706}$ ℳ $= 226$ ℳ 23 Sgr. $0{,}^{48}$ Pf.

Digitized by Google

A ergiebt sich aber = 340,1522 Ellen.

Die Schlüsse, welche auf diese Proportionen leiten, sind ähnlich denen in den vorigen Aufgaben.

16. Jemand zahlt für die Pacht einer Wiese von 136 Ruthen Länge und 85 Ruthen Breite 96 Thlr. 10 Sgr., für die Pacht einer andern Wiese zahlt er 182 Thlr.; eine Dimension dieser Wiese beträgt 105 Ruthen; wie groß ist die andere, wenn der Preis eines Centners Heu der ersten Wiese sich zum Preise von einem Centner Heu der andern Wiese wie 3 zu 4 verhält?

105 Ruthen	: 85 Ruthen	= 136 Ruthen	: A Ruthen
$96\frac{1}{3}$ ₰	: 182 ₰	= A Ruthen	: B Ruthen
4	: 3	= B Ruthen	: C Ruthen
1	: 78	= 2°	: C = 156°.

Wächst die eine Dimension, so muß die andere derselben Fläche in demselben Verhältnisse abnehmen, und die Wiese von 105° Breite und A Ruthen Länge ist gleich der ersten Wiese in Hinsicht ihres Flächeninhaltes und bei gleicher Güte, daher muß die Pacht für dieselbe auch $96\frac{1}{3}$ ₰ betragen.

Da nun die Pacht wächst, so muß auch die Größe der Wiese bei derselben Güte wachsen, und weil die eine Dimension, nämlich die Breite 105° dieselbe bleibt, so muß mit der Höhe der Pacht auch die andere Dimension B wachsen. Im dritten Falle wächst die Güte der Wiese, so kann nicht zugleich, bei derselben Höhe der Pacht, nämlich 182 Thlr., auch ihre andere Dimension wachsen, sie muß vielmehr in dem Verhältnisse abnehmen, in welchem die Güte wächst; daher stehen die Größen in den zweiten Verhältnissen der ersten und dritten Proportion mit denen in den ersten Verhältnissen in umgekehrten Verhältnissen.

17. Das Wesen zusammengesetzter Proportionen klar vor Augen zu legen, habe ich die vorstehenden Beispiele etwas ausführlich behandelt, und nun will ich das darüber Gesagte zusammenfassen, und daraus gewisse Gesetze ableiten, welche als Regeln in ähnlichen Fällen dienen können. Vorher muß ich aber bemerken, daß man diese Aufgaben auch durch Schlüsse berechnen könne, und weil diese Art zu rechnen das Denken mehr als die Anwendung gewisser Regeln fördert, so verdient sie in dieser Hinsicht den Vorzug vor jeder andern. Doch genau genommen, so ist die Rechnung vermittelst zusammengesetzter Proportionen von der durch Schlüsse im Wesentlichen nicht, sondern nur in der Form der Darstellung verschieden, und damit dieses deutlich hervortrete, so will ich die vorigen Aufgaben auch noch durch Schlüsse berechnen.

Aus Aufg. 13. folgt, daß das erste Stück Tuch $4\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}$ Quadratellen (Q. E.) enthält, und weil sein Preis $19\frac{1}{2}$ ₰ beträgt, so ist der Preis

Digitized by Google

1 □. E. $= \frac{19\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}}$ ℔. Das zweite Stück Tuch begreift nun $56\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4}$ □. E. in sich, daher wird sein Preis das Vielfache von dem Preise 1 □. E. sein, welches seine Fläche von 1 □. E. ist; also ist der Preis des andern Stückes Tuch $= 56\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} \times \frac{19\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}} = \frac{56\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot 19\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}} = \frac{225 \cdot 7 \cdot 39}{18 \cdot 6 \cdot 2} = 284\frac{3}{8}$ ℔.

Man durfte aber auch nicht den Preis einer Quadratelle berechnen, sondern man konnte gleich so schließen: welches Vielfache die Fläche des zweiten Stückes von der des ersten ist, dasselbe Vielfache muß der Preis des ersten von dem des andern sein. Nun ist die Fläche des zweiten Stückes ein Vielfaches $= \frac{56\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4}}{4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}}$ von der des ersten; daher ist der Preis des zweiten $= \frac{56\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4}}{4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}} \cdot 19\frac{1}{2}$ ℔.

Aus der ersten oben angeführter Proportionen folgt $A = \frac{56\frac{1}{4} \cdot 19\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ aus der zweiten $B = \frac{\frac{7}{4} \cdot A}{\frac{6}{4}}$, für A seinen Werth gesetzt, giebt $B = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{6}{4}} \cdot \frac{56\frac{1}{4} \cdot 19\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ ℔, was nicht allein mit vorstehendem Resultate völlig übereinstimmt, sondern auch dieselben Schlüsse durch seine Form ausdrückt, doch mit dem Unterschiede, daß in den Proportionen erst durch Zusammensetzung derselben der Inhalt der Flächen hervortritt.

Aufg. 14. Wie vielfach der Arbeitslohn für die zweite Wiese von dem der ersten ist, so vielfach muß die Fläche der zweiten von der der ersten sein; daher ist die Fläche der zweiten Wiese $= \frac{10\frac{2}{3}}{3} \cdot 63\frac{3}{4} \cdot 24\frac{3}{4}$, und den Inhalt einer Fläche durch ihre eine Dimension dividirt, giebt die andere $= \frac{10\frac{2}{3} \cdot 63\frac{3}{4} \cdot 24\frac{3}{4}}{3 \cdot 39\frac{1}{3}} = \frac{32 \cdot 191 \cdot 99}{3 \cdot 3 \cdot 118 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 191 \cdot 11}{59} = 142\frac{26}{59}$ Ruthen.

Aufg. 15. Der Flächeninhalt der vier Wände $= 15 \cdot 128$ □. F., 1 Elle $= 25\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{25\frac{1}{2}}{12} = \frac{17}{8}$ F., also 1 F. $= \frac{8}{17}$ E., und daher 1 □. F. $= \frac{8}{17} \cdot \frac{8}{17}$ □. E.; daher sind $15 \cdot 128$ □. F. $= 15 \times 128 \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{8}{17}$ □. E. Diese Fläche, nur durch ihre Breite $\frac{5}{4}$ E. dividirt, giebt die Länge derselben $= \frac{15 \cdot 128 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4}{17 \cdot 17 \cdot 5} = 340\frac{44}{289}$ Ellen.

Aufg. 16. Die Güte der ersten Wiese ist nur $\frac{3}{4}$ der andern, daher muß auch die Pacht, für gleiche Wiesenflächen, nach der Güte der ersten Wiese $\frac{3}{4}$ von der der andern $= \frac{3}{4} \cdot 182$ Thlr. sein. Wie vielfach nun

Digitized by Google

die Pacht der andern Wiese von der der ersten ist, ebenso vielfach muß die Fläche der andern von der der ersten sein $= \frac{4}{4} \cdot \frac{182}{96\frac{1}{4}} . 136 . 85$ Q. R., und diese Fläche durch ihre Dimension dividirt, giebt die andere $= \frac{3 . 182 . 136 . 85}{4 . 96\frac{1}{4} . 105} = 156°$. Eine genaue Vergleichung beider Rechnungsarten mit einander wird ihre Uebereinstimmung darthun.

Zusammengehörige oder beigeordnete Größen sind diejenigen, welche durch ihr Produkt eine neue Größe bestimmen. Zusammengehörige oder beigeordnete Größen sind bei der Länge und Breite eines Rechtecks, denn ihr Produkt bestimmt den Inhalt desselben. So sind auch beigeordnete oder zugeordnete Größen ein Vielfaches von einem Maße der Waaren, wie 7 Ellen von einem Zeuge, 8 Scheffel Weizen, 3 Morgen Land, 8 Pfund Brod, und der Preis eines Maßes, weil ihr Produkt den Werth der gegebenen Waare bestimmt.

Da jede Proportion aus zwei Verhältnissen besteht, und die Glieder jedes Verhältnisses gleichartige Größen sein müssen, so kann eine Proportion nur zwei ungleichartige Größen enthalten; je zwei von diesen ungleichartigen Größen müssen aber zugeordnete Größen sein. **Wenn nun die eine zweier zugeordneten Größen in Bezug auf die mit ihr gleichartige der beiden andern zugeordneten Größen wächst; so wird die andere der beiden ersten zugeordneten Größen in Bezug auf die mit ihr gleichartige Größe der beiden andern beigeordneten Größen in demselben Verhältnisse entweder auch wachsen oder abnehmen. Im ersten Falle stehen die beiden ersten gleichartigen Größen mit den beiden andern gleichartigen Größen im geraden, im andern Falle im umgekehrten oder wiederkehrenden Verhältnisse.**

Im geraden Verhältnisse stehen die Waaren und ihre Geldwerthe; die Volumen und die Gewichte einer Masse; die Arbeit, der Lohn, die Verzehrung ꝛc. und die Zahl der Arbeiter, die Zeit ꝛc.

Im umgekehrten Verhältnisse stehen die Längen und die Breiten der Rechtecke; die Längen der Hebelarme und ihre Gewichte; die Zahlen der Arbeiter und die Zeiten.

Sowohl das Vorhergehende als auch das Nachfolgende werden hinlänglich viele Beispiele gerader und umgekehrter Verhältnisse darbieten, und der Lehrer muß daher auf sie Acht haben.

Wenn zwei gleichartige Größen mit zwei andern gleichartigen Größen in geraden Verhältnissen stehen: so bilden die beiden ersten, so wie die beiden andern Größen gleichnamige Glieder der Verhältnisse einer Proportion, also die einen die Vorder-, die beiden andern die Hinterglieder derselben.

Digitized by Google

Stehen zwei gleichartige Größen mit zwei andern gleichartigen Größen in umgekehrten Verhältnissen: so bilden die beiden ersten die innern oder äußern, und die beiden andern die äußern oder innern Glieder einer Proportion.

Die eben gegebenen Erklärungen und angeführten Gesetze hat man nun theils in den vorstehenden, theils in den nachfolgenden Aufgaben aufzusuchen, und zu prüfen, damit man eine klare Vorstellung von denselben erhalte.

C. Beziehungen zwischen Körperräumen und dem Gelde.

Die Körperräume können entweder im Allgemeinen nach Kubikzoll, Kubikfuß, Kubikruthen ꝛc., oder im Besondern nach gewissen Maßen für Getreide, Flüssigkeiten ꝛc. genommen werden, und das Geld spielt in diesen Aufgaben nur die Rolle des Preises und Werthes, in welchen auch auf den Gewinn und Verlust Rücksicht genommen werden muß.

18. Brennholz wird in Preußen nach Klaftern (6 Fuß lang und breit, 3 Fuß hoch) zu 108 Kubikfuß gemessen, und das Holz darnach gekauft und verkauft. In einem Forste sind 24 Haufen Buchenholz, jeder zu 9 Fuß lang, 12 Fuß breit und 8 Fuß hoch aufgestellt. Man bedingt die Klafter mit 1 Thlr. 15 Sgr. und verkauft sie in der Stadt für 3 Thlr. 10 Sgr. Rechnet man nun $20\frac{0}{0}$ für Transportkosten, so ist die Frage, wie viel man für das Holz zahlte, wie viel man für dasselbe durch den Verkauf einnahm und wie viel der Gewinn in Procenten beträgt?

Da ein Haufen 9′ lang, 12′ breit und 8′ hoch ist, so ist sein kubischer Inhalt $= 9 . 12 . 8$ Kubikfuß $= \frac{9 . 12 . 8}{108} = 8$ Klaftern; also enthalten die 24 Haufen $24 . 8 = 192$ Klafter; folglich beträgt der Einkaufspreis $192 . 1\frac{1}{2} = 288$ Thlr.

Der Verkaufspreis ist daher $192 . 3\frac{1}{3} = 640$ Thlr.

Die Transportkosten müssen von dem Einkaufspreise gerechnet werden und betragen also $\frac{288}{100} . 20 = 57{,}6$ Thlr.; diese nebst 8 Einkaufspreise von dem Verkaufspreise hinweggenommen, läßt den Gewinn $= 640 - (288 + 57{,}6) = 294{,}4$ Thlr. Da der Einkaufspreis und die Transportkosten nicht zum Gewinne gehören, so müssen die Procente in Bezug auf diese beiden Summen gerechnet werden. Der Einkaufspreis und die Transportkosten betragen zusammen 345,6 Thlr.; davon ist $1\frac{0}{0} = 3{,}456$ Thlr.; wie vielfach nun der Gewinn 294,4 Thlr. von $1\frac{0}{0}$, nämlich 3,456 Thlr. ist, so viele Procente beträgt der Gewinn $= \frac{294{,}4}{3{,}456} = 85\frac{5}{27}\frac{0}{0}$.

19. Mahagoni und andere Amerikanische Bohlen und Bretter zu feinen Arbeiten werden nach Quadratfuß zu 1 Zoll Dicke in den großen See- und Handelsstädten Hamburg, Amsterdam ꝛc. verkauft. Ein Kaufmann behandelt 90 Bohlen Mahagoni, jede zu 18 Fuß Länge, 16 Zoll Breite

Digitized by Google

und 3 Zoll Dicke zu Hamburg, und zahlt für einen Quadratfuß 1 Mark 6 Schill. (1 Mark = 16 Schill.) Hamb. Bco. Transportkosten muß er $15\frac{0}{0}$ und den Gewinn rechnet er $25\frac{0}{0}$, weil ihm das Holz bis zum gänzlichen Verkaufe lange liegen kann. Für wie viel in Preuß. Cour. wird er den Preuß. Quadratfuß von diesem Holze zu verkaufen haben, wenn der Hamburger Fuß = 127 und der Preuß. Fuß = 139,13 Pariser Linien ist? Wie viele Hamburger Mark Banco hatte er zu zahlen und wie groß ist diese Summe in Preuß. Courant? Wie hoch kommt ihm das Holz an seinem Wohnorte zu stehen, und wie viel wird er durch den Verkauf einnehmen, und welches ist der Gewinn bei diesem ganzen Handel? $27\frac{3}{4}$ Mrk. Bco. = 14 Thlr. Preuß. Cour.

Jede Bohle enthält $\frac{12.18.16.3}{12.12.12.1}$ = 72 Quadratfuß; daher haben die 96 Bohlen 96 . 72 = 6912 Quadratfuß.

Folglich muß der Kaufmann $6912 . 1\frac{1}{8}$ = 9504 Mark Hamb. Bco. zahlen.

Da nun $27\frac{3}{4}$ Mark Bco. = 14 Thlr. Pr. Cour., so beträgt vorstehende Summe $\frac{9504}{27\frac{3}{4}} . 14 = 4740\frac{36}{37}$ Thlr. = 4740 Thlr. 22 Sgr. $8\frac{16}{37}$ Pf. Da die Transportkosten $15\frac{0}{0}$ betragen, so kostet ihm das Holz an seinem Wohnorte 115 für jede 100, die er in Hamburg zahlt, = $\frac{9504}{100 . 27\frac{3}{4}} . 14 . 115 = 5514$ Thlr. $11\frac{25}{37}$ Pf.

Der Gewinn ist von der Summe zu rechnen, die ihm das Holz an seinem Wohnorte kostet, daher beträgt er $\frac{9504 . 14}{27\frac{3}{4}} . \frac{115}{100} . \frac{25}{100} = 1378$ Thlr. 15 Sgr. $2\frac{34}{37}$ Pf.

1 Preuß. Fuß = $\frac{139,13}{127}$ Hamb. Fuß, also 1 Preuß. Quadratfuß = $\frac{139,13}{\text{denn die}} \frac{139,13}{127}$ Hamburger Quadratfuß; da nun 1 Hamb. Quadratfuß $1\frac{3}{8}$ Mark Hamb. Bco., und 1 Mark Hamb. Bco. = $\frac{14}{27\frac{3}{4}}$ = $\frac{56}{111}$ Thlr. Preuß. Cour., so kostet 1 Preuß. Quadratfuß $\frac{139,13}{127} . \frac{139,13}{127} \times \frac{56}{111} . 1\frac{3}{8}$ Thlr. Die Transportkosten mitzurechnen, muß man jenen Werth noch mit $\frac{115}{100}$, und diesen wieder, mit Rücksicht auf den Gewinn, mit $\frac{125}{100}$ multipliciren; daher muß er den Preuß. Quadratfuß für $1\frac{3}{8} . \frac{139,13}{127} \times \frac{139,13}{127} . \frac{56}{111} . \frac{115}{100} . \frac{125}{100}$ Thlr. = 1 Thlr. 5 Sgr. 10,836 Pf., also nahe für 1 Thlr. 5 Sgr. 11 Pf. verkaufen. Genau genommen, so ist der letzte Werth noch zu klein, denn dieser Quadratfuß hat zwar zu seiner Länge

Digitized by Google

und Breite einen Preuß. Fuß, doch zu seiner Dicke nur einen Hamb. Zoll. Nun ist ein Preuß. Zoll $= \frac{139,13}{127}$ Hamb. Zoll, daher der Werth von einem Preuß. Quadratfuß $= \frac{139,13}{127}$. (1 Thlr. 5 Sgr. 10,836 Pf.) = 1 Thlr. 9 Sgr. 3,985 Pf. oder 1 Thlr. 9 Sgr. 4 Pf.

20. Ein Scheffel Kartoffeln gilt 20 Sgr., wie theuer ist eine Metze, und wie viele Procente Gewinn nimmt der Verkäufer, wenn er die Metze für $1\frac{1}{2}$ Sgr. verkauft? 1 Scheffel = 16 Metzen.

1 Metze Kartoffeln $= \frac{20}{16} = 1\frac{1}{4}$ Sgr.

Der Gewinn ist daher $= \frac{\frac{1}{2} \cdot 100}{1\frac{1}{4}} = \frac{100}{5} = 20\frac{0}{0}$.

21. Nelkenbrecher bemerkt: »Ein Morgen Land, welches 6 Scheffel Roggen trägt, liefert wenigstens 80 Scheffel Kartoffeln.« Wenn nun ein Acker 154 Ruthen lang und 84 Ruthen breit ist, wie viele Scheffel Kartoffeln oder Roggen wird man auf demselben ernten? 1 Morgen = 180 Quadratruthen.

Der Acker ist $= \frac{154 \cdot 84}{180} = 71\frac{13}{15}$ Morgen; daher trägt er $71\frac{13}{15} \cdot 6$ $= 431\frac{1}{5}$ Scheffel Roggen oder $71\frac{13}{15} \cdot 80 = 5749\frac{1}{3}$ Schffl. Kartoffeln.

22. Wenn ein Morgen Land 6 Scheffel Roggen oder 80 Scheffel Kartoffeln trägt und 1 Scheffel Kartoffeln 15 Sgr. gilt, wie theuer wird dann 1 Scheffel Roggen sein müssen?

1 Scheffel Roggen $= \frac{80}{6} \cdot 15 = 200$ Sgr. = 6 Thlr. 20 Sgr.

23. Zwölf Quart Spiritus à 80 Grad sind wie viele Quart Branntwein à 50 Grad nach Tralles?

Der Branntwein besteht aus reinem Weingeiste oder Alkohol und Wasser. Heißt es nun, Spiritus oder Branntwein hat 80 Grad oder $80\frac{0}{0}$ Stärke, so bedeutet dieses, daß 100 Theile Branntwein 80 Theile Alkohol und 20 Theile Wasser enthalten. Daher hat Branntwein à 50 Grad 50 Quart Alkohol und 50 Quart Wasser.

Hieraus folgt, daß 1 Quart 80gradiger Spiritus nur $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ Qrt. Alkohol enthält, und daher haben 12 Quart Spiritus à 80 Grad $12 \cdot \frac{4}{5}$ $= 9\frac{3}{5}$ Quart Alkohol.

Ferner enthält 1 Quart Branntwein à 50 Grad $\frac{1}{2}$ Quart Alkohol; daher werden 12 Quart à 80 Grad $= 9\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 19\frac{1}{5}$ Quart Branntwein à 50 Grad fein.

24. Man giebt das spezifische Gewicht des Alkohols = 0,792 an; wie groß muß daher das specifische Gewicht des 80procentigen und des 50procentigen Branntweins sein, wenn Alkohol, mit Wasser vermischt, ihr Volumen nicht änderten?

Digitized by Google

1 Kubikfuß destillirten Wassers = 66 ℔, 1 Quart = 64 Kubikzoll.

Da 1 Kubikfuß = 12 . 12 . 12 Kubikzoll, so ist 1 Quart = $\frac{64}{12 \cdot 12 \cdot 12}$ = $\frac{1}{27}$ Kubikfuß; daher 1 Quart destillirten Wassers = $\frac{66}{27}$ = $\frac{22}{9}$ ℔; daher wiegt 1 Quart Alkohol = 0,792 . $\frac{22}{9}$ = 1,826 ℔; also $\frac{4}{5}$ Quart Alkohol = $\frac{4}{5}$. 1,826 = 1,4608 ℔, und $\frac{1}{5}$ Quart Wasser = $\frac{22}{5 \cdot 9}$ = 0,4889 ℔; also ist das Gewicht von 1 Quart 80proc. Spiritus = 1,4608 + 0,4889 = 1,9497 ℔; folglich das specifische Gewicht desselben = 1,9497 : $\frac{22}{9}$ = 0,7976.

Das Gewicht von $\frac{1}{3}$ Quart Alkohol = 0,913 ℔; das Gewicht von $\frac{1}{2}$ Quart Wasser = 1,2222 ℔, daher ist das Gewicht von 1 Quart 50proc. Branntweins = 2,1352 ℔; also sein specifisches Gewicht = 2,1352 : $\frac{22}{9}$ = 0,8735.

25. Nelkenbrecher: »Ein Morgen Land, welches 6 Scheffel Roggen trägt, liefert wenigstens 80 Scheffel Kartoffeln. Zu Branntwein verbrannt, erhält man vom Scheffel Roggen 12 Quart Spiritus à 80 Grad, oder 19,2 Quart Branntwein à 50 Grad nach Tralles; der Scheffel Kartoffeln zu 100 ℔ gerechnet, liefert 5 Quart Spiritus gleicher Stärke.« Rechnet man 1 Quart Spiritus à 80 Grad 8 Sgr., so ist die Frage, wie sich der Ertrag des Roggens zum Ertrage der Kartoffeln von einem Morgen Land verhalte?

6 Scheffel Roggen, deren jeder 12 Quart Spiritus à 8 Sgr. giebt, liefern 6 . 12 . 8 = 576 Sgr. = 19 Thlr. 6 Sgr.

80 Scheffel Kartoffeln, deren jeder 5 Quart Spiritus à 8 Sgr. giebt, bringen 80 . 5 . 8 = 3200 Sgr. = 106 Thlr. 20 Sgr.; daher ist der Ertrag des Roggens zu dem Ertrage der Kartoffeln = $19\frac{1}{5} : 106\frac{2}{3}$, oder = 9 : 50.

Da dieses Verhältniß unwahrscheinlich ist, so nehme man an, daß ein Scheffel Kartoffeln 5 Quart à 50 Grad liefere.

Weil nun 1 Quart Branntwein à 80 Grad 8 Sgr. kostet, und ein Quart Branntwein à 50 Grad nur $\frac{5}{8}$ des Alkohols von dem des 80gradigen enthält, so muß sein Werth auch nur $\frac{5}{8}$. 8 = 5 Sgr. sein. Daher liefern 80 Scheffel Kartoffeln à 5 Quart Branntwein à 5 Sgr. 80 . 5 . 5 = 2000 Sgr.; daher verhält sich der Ertrag des Roggens zum Ertrage der Kartoffeln = 576 : 2000 = 36 : 125.

26. Ein Gutsbesitzer hat im Herbste eine gewisse Zahl Scheffel Kartoffeln in der Erde vergraben; beim Ausgraben derselben im nächsten Frühjahre findet er, daß 27 Scheffel Kartoffeln erfroren sind; vor dem Ausgraben hatte er den Scheffel Kartoffeln zu 15 Sgr. bestimmt, nun muß er den Scheffel derselben zu $15\frac{1}{2}$ Sgr. rechnen, wenn er durch den Verkauf derselben ebenso viel einnehmen will, als er nach der ersten Annahme, ohne

Digitized by Google

den Verlust der erfrorenen Kartoffeln, berechnet hatte. Wie viele Scheffel hatte er im Herbste vergraben?

Die erfrorenen Kartoffeln bringen ihm einen Verlust von $27 . 15 = 405$ Sgr. Da nun dieser Verlust auf die Weise ersetzt wird, daß er auf jeden Scheffel $\frac{1}{2}$ Sgr. mehr als vorher rechnet, so muß er noch so viel Scheffel haben, als $405\frac{1}{2}$ Sgr. enthalten, also $405 : \frac{1}{2} = 810$ Scheffel; dazu die 27 Scheffel der erfrorenen Kartoffeln gesetzt, giebt 837 Scheffel als die im Herbste vergrabenen.

Anmerk. So einfach die Schlüsse dieser Rechnung sind, so wenig klar werden sie von der Jugend gefaßt; daher wird man zur Bestätigung der Richtigkeit der Rechnung noch die Probe derselben machen lassen:

837 Scheffel zu 15 Sgr. geben $837 . \frac{1}{2} = 418\frac{1}{2}$ Thlr.

810 Scheffel zu $15\frac{1}{2}$ Sgr. $= 810 . \frac{1}{2}$ Thlr. $+ 810 . \frac{1}{60}$ Thlr. $= 405$ Thlr. $+ 13\frac{1}{2}$ Thlr. $= 418\frac{1}{2}$ Thlr. Die Gleichheit der Einnahme in beiden Fällen bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

27. Würden anstatt der 27 Scheffel voriger Aufgabe 48 Scheffel Kartoffeln erfroren seyn, und hätte der Gutsbesitzer vor dem Ausgraben derselben den Scheffel zu 10 Sgr., nach Berechnung des Verlustes den Scheffel zu 11 Sgr. 4 Pf. haben annehmen müssen, durch den höhern Preis den Verlust zu ersetzen, wie viele Scheffel hätte er dann vergraben gehabt?

Der Verlust durch das Erfrieren der 48 Scheffel Kartoffeln ist $= 48 . \frac{1}{3} = 16$ Thlr.

Da nun 1 Scheffel 1 Sgr. 4 Pf. $= \frac{4}{3}$ Sgr. mehr als vorher kostet, so muß er noch so viele Scheffel haben, als $\frac{4}{3}$ Sgr. in 16 Thlr. enthalten sind; folglich hat er noch 16 Thlr. dividirt durch $\frac{4}{3}$ Sgr. $= 16 . 30$ Sgr. dividirt durch $\frac{4}{3}$ Sgr. $= 16 . 30 . \frac{3}{4} = 360$: also hat er noch 360 Schffl. gesunder Kartoffeln und hatte daher $360 + 48 = 408$ Scheffel vergraben.

28. Ein Wirthschafter fährt mit Weizen nach der Stadt und will den Scheffel zu 3 Thlr. 2 Sgr. verkaufen; durch Schadhaftigkeit der Säcke und Nachläßigkeit seiner Fuhrleute gehen ihm unterwegs $4\frac{1}{2}$ Scheffel verloren. Um diesen Verlust zu ersetzen, sieht er sich genöthigt, den Scheffel zu 3 Thlr. 5 Sgr. zu verkaufen. Mit wie vielen Scheffeln fuhr er von Hause?

Verlust $4\frac{1}{2} . 92$ Sgr.; also Zahl der noch vorhandenen Scheffel $= \frac{4\frac{1}{2} . 92}{3} = \frac{3}{2} . 92 = 138$; folglich fuhr er mit $138 + 4\frac{1}{2} = 142\frac{1}{2}$ Schffl. von Hause.

29. Ein Pächter will durch den Verkauf einer dazu bestimmten Zahl Scheffel Weizen seine Pacht bestreiten. Nimmt er den Scheffel Weizen zu $2\frac{1}{2}$ Thlr. an, so fehlen ihm 125 Thlr.; rechnet er den Scheffel zu 3 Thlr., so nimmt er 24 Thlr. mehr ein, als die Pacht beträgt; wie hoch belief sich seine Pacht?

Digitized by Google

Die zweite Annahme des Preises von einem Scheffel Weizen beträgt $\frac{1}{2}$ Thlr. mehr als die erste; durch dieses Mehr wird nicht allein das Fehlende von 125 Thlr. ersetzt, sondern noch ein Ueberschuß von 24 Thlr. erreicht; daher hat er so viele Scheffel Weizen zur Bestreitung der Pacht zum Verkaufe bestimmt, als $\frac{1}{2}$ Thlr. in $125 + 24 = 149$ enthalten ist; dieses sind also $149 . 2 = 298$ Scheffel.

298 Scheffel zu 3 Thlr. = 894 Thlr., welche um 24 Thlr. mehr als die Pacht sind, also beläuft sich die Pacht auf $894 - 24 = 870$ Thlr.

Anmerk. Diese Art Aufgaben bildet vorzüglich den Scharfsinn, daher müssen viele ähnlicher Art gerechnet werden; denn nur geweckter Scharfsinn macht bedeutende Fortschritte im Rechnen; viele Uebungen machen einen schnellen Rechner in gewissen Gattungen von Aufgaben, wie in den Handelsgeschäften; Scharfsinn führt zum fertigen und gewandten Rechner jeder Gattung von Aufgaben.

30. Ein Kaufmann hat in seinen Speichern eine gewisse Zahl von Lasten Weizen, die Last zu $56\frac{1}{2}$ Scheffel liegen. Rechnet er die Last zu 190 Thlr., so hat er einen Verlust von 1890 Thlr.; rechnet er sie zu 195 Thlr., so hat er einen Gewinn von 2500 Thlr.; wie viele Lasten hat er in seinen Speichern liegen?

$$\frac{1890 + 2500}{195 - 100} = \frac{4390}{5} = 878 \text{ Lasten.}$$

31. Eine Mauer von 36 Fuß Länge, 2 Fuß Dicke und 24 Fuß Höhe aufzuführen, kostet 150 Thlr; wie hoch werden sich die Kosten belaufen, wenn die Mauer eines Gebäudes 48 Fuß lang, 30 Fuß breit, 42 Fuß hoch und $1\frac{2}{3}$ Fuß dick gemacht werden soll?

Der kubische Inhalt der ersten Mauer beträgt $36 . 2 . 24$ Kubikfuß; der des Gebäudes kann als aus 4 Mauern bestehend betrachtet werden, nämlich aus den beiden Mauern der Länge nach, jede 48′ lang, $1\frac{2}{3}$′ dick und 42′ hoch, daher beider Inhalt $= 2 . 48 . \frac{5}{3} . 42 = 6720$ Kubikfuß, und aus den beiden der Breite des Gebäudes nach, deren eine Dimension nach der Breite des Gebäudes $= 30 - 2 . 1\frac{2}{3} = 26\frac{2}{3}$ Fuß (weil durch die Dicke der beiden ersten Mauern diese Dimension auf jedem Ende um $1\frac{2}{3}$ Fuß vermindert wird), und ihre beiden andern Dimensionen sind $1\frac{2}{3}$ Fuß Dicke und 42 Fuß Höhe, daher ist beider Inhalt $2 . 26\frac{2}{3} . 1\frac{2}{3} . 42 = 3733\frac{1}{3}$ Kubikf.; folglich ist der Inhalt der Mauer des Gebäudes $= 6720 + 3733\frac{1}{3} = 10453\frac{1}{3}$ Kbf.

Wie vielfach nun dieser Inhalt von dem Inhalte der ersten Mauer ist, ebenso vielfach müssen die Kosten der Mauer des Gebäudes von den Kosten der ersten Mauer sein, daher betragen die gesuchten Kosten $\frac{10453\frac{1}{3}}{36.2.24} . 150$ Thlr.

$= 907\frac{11}{17}$ Thlr. $= 907$ Thlr. 12 Sgr. $2\frac{2}{3}$ Pf.

Anmerk. Die Mauer des Gebäudes hätte man auch als eine einzige betrachten können, wenn man die Länge und Breite des Gebäudes als eine einzige Dimension zusammenrechnet; diese ist $2 . 48 + 2 . 26\frac{2}{3} = 149\frac{1}{3}$ Fuß; daher der Inhalt der ganzen Mauer $= 149\frac{1}{3} . 1\frac{2}{3} . 42 = 10453\frac{1}{3}$ Kubikfuß.

Digitized by Google

32. Die Kosten einer aufgeführten Mauer von 24 Fuß Länge, $1\frac{1}{2}$ Fuß Dicke, 18 Fuß Höhe betragen 64 Thlr. 24 Sgr. Wie hoch wird die Mauer eines Gebäudes, welches 56 Fuß lang, 32 Fuß breit und 45 Fuß hoch ist, zu stehen kommen, wenn die Dicke der Mauer $1\frac{3}{4}$ Fuß betragen soll?

Diese Aufgabe kann auf dieselbe Weise wie die vorige berechnet werden; ich will zur Berechnung der vorstehenden Proportionen gebrauchen.

Damit die ganze Mauer des Gebäudes als eine einzige in Rechnung gebracht werden könne, muß man zunächst ihre Dimension der Länge nach suchen; diese ist $2.56+2.(32-2.1\frac{1}{2})=2.(56+28\frac{1}{2})=169$ Fuß; nun stelle man die Data der Aufgabe in folgender Art neben einander:

24′ Länge, $1\frac{1}{2}$′ Dicke, 18′ Höhe kosten 64 Thlr. 24 Sgr.
169′ » $1\frac{3}{4}$′ » 45′ » » ?

$$
\begin{array}{rcll}
24 : 169 = 64\frac{4}{5} \text{ Thlr.} & : & A & \text{(Kosten für 169′ L., } 1\tfrac{1}{2}\text{′ D., 18′ H.)} \\
\frac{3}{2} : \frac{7}{4} = A & : & B & \text{(Kosten für 169′ L., } 1\tfrac{1}{2}\text{′ D., 18′ H.)} \\
18 : 45 = B & : & C & \text{(Kosten für 169′ L., } 1\tfrac{3}{4}\text{′ D., 45′ H.)} \\
\hline
8 : 1183 = 9 & : & C = 1330 \text{ Thlr. } 26\frac{1}{4} \text{ Sgr.} &
\end{array}
$$

Die Kosten der Mauer wachsen mit ihren Dimensionen; daher stehen die gleichartigen Größen mit ihren zugeordneten Größen in geraden Verhältnissen.

Die nicht berechneten Größen, A, B, pflegt man nicht in die Proportionen aufzunehmen, weil sie aus der Rechnung gehen; ich thue dieses, um die Art und Weise des Zusammenhanges der Proportionen klar vor Augen legen zu können; denn durch diese Anordnung erkennt man deutlich, wie man nach und nach zur gesuchten Größe gelangt. Der Lehrer wird seinen Schülern eine klare Ansicht von dieser Berechnungsweise geben, wenn er sie anhält, jede Proportion als eine für sich bestehende Aufgabe zu betrachten, und die Bedingungen derselben sie aussprechen läßt, welches in folgender Art geschehen kann:

die erste Proportion drückt aus, daß A Thlr. die Kosten einer Mauer von 169′ Länge betragen, wenn sie mit einer andern, die 24′ lang ist, gleiche Dicke und gleiche Höhe hat, die aber $64\frac{4}{5}$ Thlr. kostet;

die zweite Proportion sagt: die Kosten einer Mauer von $1\frac{3}{4}$′ Breite sind B Thlr., wenn sie mit einer andern gleiche Höhe und gleiche Länge hat, und A Thlr. kostet;

die dritte Proportion drückt endlich aus, daß die Kosten einer Mauer von 45′ Höhe C Thlr. betragen, wenn sie mit einer andern gleiche Länge und gleiche Dicke hat, die aber nur 18′ hoch ist und deswegen nur B Thaler kostet.

Aus dieser Darstellung sieht man deutlich, daß C Thlr. die gesuchten Kosten sind, welche gewöhnlich mit x bezeichnet werden; es ist aber gewiß sehr gleichgiltig, mit welchem Buchstaben man die unbekannte Zahl bezeichnet, daher habe ich die Buchstaben nach der Ordnung des Abc's genommen. Mit Auslassung der Buchstaben gestalten sich die Proportionen folgender Art:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{rcl} 24 & : & 169 \\ \frac{4}{5} & : & \frac{7}{4} \\ 18 & : & 45 \end{array}\right\} = 64\tfrac{4}{5}\text{ Thlr. : x Thlr.}$$

Anmerk. Die Bedingung, so wie das Bedingte der Aufgabe enthält 4 ungleichartige Größen: 1) die Länge, 2) die Breite oder die Höhe, 3) die Dicke und 4) die Kosten der Mauer; jede derselben kann die unbekannte oder gesuchte Größe sein; daher liefert diese Aufgabe eigentlich 4 verschiedene, je nachdem die Unbekannte gewechselt wird, und dieses ist in Ausübung zu bringen; weil die Verhältnisse in verschiedene Beziehungen zu einander treten.

33. Wenn die Kosten einer Mauer, die 12 Fuß lang, $1\frac{1}{3}$ Fuß breit und 8 Fuß hoch 14 Thlr. 28 Sgr. betragen, wie lang muß eine Mauer, die $1\frac{5}{6}$ Fuß dick und 60 Fuß hoch ist, sein, wenn ihre Aufführung 1155 Thaler kostet?

Wie vielfach die Kosten der einen Mauer von denen der andern sind, eben so vielfach muß der kubische Inhalt jener von dieser sein; da nun die Kosten der Mauer, deren Länge gesucht wird, das $\frac{1155}{14\frac{14}{15}}$fache der Kosten der ersten Mauer, deren kubischer Inhalt $= 12 . \frac{4}{3} . 8$ Kubikfuß ist, so ist der Inhalt jener Mauer $= \frac{1155}{14\frac{14}{15}} . 12 . \frac{4}{3} . 8 = 9900$ Kubikfuß. Da nun der kubische Inhalt eines Körpers das Produkt seiner 3 Dimensionen ist, so wird man die gesuchte erhalten, wenn man seinen Inhalt durch das Produkt seiner beiden gegebenen Dimensionen dividirt. Die beiden gegebenen Dimensionen der andern Mauer sind $1\frac{5}{6}$ Fuß Dicke und 60 Fuß Höhe; daher ist die gesuchte Länge $= 9900 : 1\frac{5}{6} . 60 = 90$ Fuß.

Durch Proportionen: 12′ L., $1\frac{1}{3}$′ D., 8′ H. kosten $14\frac{14}{15}$ Thlr.
? $1\frac{5}{6}$′ D., 60′ H. kosten 1155 Thlr.

$\frac{11}{6}$	:	$\frac{4}{3}$ = 12′ Länge	: A	(Länge für $1\frac{5}{6}$′ D., 8′ H. $14\frac{14}{15}$ ℔ Kosten)
60	:	8 = A	: B	(Länge für $1\frac{5}{6}$′ D., 60′ H. $14\frac{14}{15}$ ℔ Kosten)
$14\frac{14}{15}$	:	1155 = B	: C	(Länge für $1\frac{5}{6}$′ D., 60′ H. 1155 ℔ Kosten)
1	:	15 = 6	: C = 90′.	

34. Wenn eine Mauer, die $25\frac{1}{2}$ Fuß lang, 2 Fuß 3 Zoll dick und 16 Fuß hoch ist, 122 Thlr. 12 Sgr. kostet in die Höhe zu führen, wie dick muß eine Mauer sein, die 178 Fuß lang, 64 Fuß hoch ist, und 3797 Thlr. 10 Sgr. zur Errichtung kostet?

Die Berechnung dieser Aufgabe ist in jeder Beziehung der der vorigen ähnlich und man findet die gesuchte Dicke $= 2\frac{1}{2}$ Fuß.

35. Für das Graben eines Grabens, welcher 108 Ruthen lang, 8 Fuß tief, oben 12 Fuß und unten 6 Fuß breit ist, hat man 18 Thlr. bezahlt; wie viel wird ein Graben, der 250 Ruthen lang, 9 Fuß tief, oben 15 Fuß und unten $7\frac{1}{2}$ Fuß breit ist, auszugraben kosten?

Digitized by Google

Der Querdurchschnitt eines Grabens ist ein Paralleltrapez, welches zwei Dimensionen des Grabens in sich faßt, nämlich die Tiefe und die mittlere Breite, welche stets die halbe Summe der obern und untern Breite des Grabens beträgt; daher ist der kubische Inhalt des Grabens gleich dem Produkte seiner 3 Dimensionen — Länge mal Tiefe mal mittlere Breite —. Hieraus folgt der Inhalt des ersten Grabens $= 108 . 12' . 8' . \frac{12+6}{2} = 108 \times 12 . 8 . 9$ Kubikfuß; der Inhalt des andern Grabens $= 250 . 12 . 9 . \frac{15+7\frac{1}{4}}{2}$ $= 250 . 12 . 9 . 11\frac{1}{4}$ Kubikfuß.

Die Ruthen müssen in Fuß oder umgekehrt die Fuß in Ruthen verwandelt werden; das Erste ist dort geschehen.

Wie vielfach nun der kubische Inhalt des Grabens, dessen Kosten gesucht werden, von dem kubischen Inhalte des Grabens ist, dessen Kosten gegeben sind, eben so vielfach müssen die gesuchten von den gegebenen Kosten sein; daher sind die gesuchten Kosten $= \frac{250 . 12 . 9 . 11\frac{1}{4}}{108 . 12 . 8 . 9} . 18$ Thlr. $=$ 58 Thlr. 17 Sgr. $9\frac{1}{4}$ Pf.

36. Man hat für einen Graben, der 75 Ruthen lang, 6 Fuß tief, oben 10 Fuß, unten $5\frac{1}{2}$ Fuß breit ist, 15 Thlr. bezahlt; wie theuer wird das Graben eines Grabens zu stehen kommen, der 156 Ruthen lang, $8\frac{1}{4}$ Fuß tief, oben 14 Fuß und unten 8 Fuß breit ist, und welche Breite könnte dieser Graben unten haben, wenn seine Breite oben 16 Fuß betragen sollte, bei dem Aufwande von denselben Kosten?

Der erste Theil der Frage wird wie vorher berechnet, und man findet die gesuchten Kosten $= \frac{156 . 12 . 8\frac{1}{4} . 11}{75 . 12 . 6 . 7\frac{1}{4}} . 15$ Thlr. $= \frac{1\,3\,;\,1\,7\,;\,2\,2}{3\,;\,3\,1}$ Thlr. $=$ 52 Thlr. 8 Sgr. $4\frac{20}{31}$ Pf.

Der kubische Inhalt des zweiten Grabens ist $= 156 . 12 . 8\frac{1}{4} . 11$ Kubikfuß; wenn man diesen durch das Produkt seiner beiden gegebenen Dimensionen, $=$ Länge $156 . 12$ Fuß $\times$ Tiefe $8\frac{1}{4}$ Fuß, dividirt, so muß man seine dritte Dimension, nämlich seine mittlere Breite $= 11$ Fuß, erhalten. Da nun die mittlere Breite $=$ der halben Summe seiner obern und untern Breite ist, so ist die Summe dieser Breiten $= 22$ Fuß; weil die obere Breite des neuen Grabens 16 Fuß sein soll, so muß seine untere $= 22 - 16 =$ 6 Fuß sein.

37. Jemand zahlt für eine Tonne Bier 4 Thlr., 2 Quart für Hefen werden abgerechnet, dazu gießt er 20 Quart Wasser, und füllt diese Mischung in Flaschen, die $\frac{1}{2}$ Quart fassen. Wie viele Flaschen kann er damit füllen, und wie theuer wird ihm eine Flasche zu stehen kommen, da die Tonne 100 Quart gesetzlich halten soll?

Digitized by Google

100 Quart Bier und 20 Quart Wasser sind 120 Quart; davon gehen 2 Quart für Hefen ab, also bleiben noch 118 Quart; diese füllen also $2 \cdot 118 = 236$ Flaschen, welche 4 Thlr. $= 120$ Sgr. kosten; daher ist der Werth einer Flasche Bier $= \frac{120}{236}$ Sgr. $= 6\frac{84}{59}$ Pf.

38. Ein Gastwirth zahlt für die Tonne Bier 3 Thlr. 10 Sgr.; dazu gießt er so vieles Wasser, daß jedes Quart des gemischten Bieres nur $\frac{1}{2}$ Quart Bier enthält; dasselbe füllt er in Flaschen, die er für 1 Sgr. verkauft. Wenn nun eine Flasche ein Volumen von $\frac{5}{8}$ Quart hat, und vom Biere 2 Quart für Hefen abgerechnet werden; welchen Gewinn hat er an einer Tonne und wie viele Procente beträgt derselbe?

Das Wasser beträgt $\frac{1}{2}$ des Bieres, daher gießt er zu einer Tonne Bier von 100 Quart 50 Quart Wasser und erhält also dadurch 150 Quart Wasserbier, davon 2 Quart Hefen abgerechnet, bleiben 148 Quart auf Flaschen zu füllen. Da nun eine Flasche $\frac{5}{8}$ Quart hält, so liefern die 148 Quart $\frac{148 \cdot 8}{5} = 236\frac{4}{5}$ Flaschen; und weil er jede Flasche für 1 Sgr. verkauft, so löst er daraus $236\frac{4}{5}$ Sgr. $= 7$ Thlr. $26\frac{4}{5}$ Sgr.; und folglich beträgt der Gewinn an einer Tonne 4 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.; daher giebt dieselbe $\frac{4 \text{ Thlr. } 16\frac{4}{5} \text{ Sgr.}}{3 \text{ Thlr. } 10 \text{ Sgr.}} \cdot 100$
$= \frac{136\frac{4}{5}}{100} \cdot 100 = 136\frac{4}{5}$ % Gewinn.

39. Wenn die Tonne Bier 3 Thlr. 15 Sgr. kostet, die Flasche von $\frac{9}{16}$ Quart für 1 Sgr. verkauft wird, und man 2 Thlr. an einer Tonne gewinnen will; wie viele Quart Wasser muß man hinzugießen, wenn 4 Quart für Hefen abgehen?

Man muß für die Tonne Bier 3 Thlr. 15 Sgr. $+ 2$ Thlr. $= 165$ Sgr. einnehmen, und da jede Flasche 1 Sgr. kostet, so muß man 165 Flaschen haben; und weil 1 Flasche $= \frac{9}{16}$ Quart, so sind 165 Flaschen $= 165 \cdot \frac{9}{16}$
$= 92\frac{13}{16}$ Quart, dazu 4 Quart Hefen $= 96\frac{13}{16}$ Quart; also hat man unter obigen Bedingungen nicht nöthig Wasser hinzuzugießen, um den Gewinn von 2 Thlr. an einer Tonne zu erreichen, sondern man hat noch $3\frac{3}{16}$ Quart oder $5\frac{3}{9}$ Flaschen reines Bier oben ein.

40. Die Tonne Bier kostet 3 Thlr. 15 Sgr.; man gießt Wasser dazu, verkauft die Flasche dieses Wasserbieres für 1 Sgr.; 4 Quart Hefen gehen ab; die Flasche hält $\frac{9}{16}$ Quart, und erlangt dadurch einen Gewinn von 5 Thlr. an einer Tonne; wie viele Quart Wasser hat man hinzugegossen?

Die Einnahme für eine Tonne Bier beträgt 8 Thlr. 15 Sgr. $= 255$ Sgr.; also hat man 255 Flaschen Bier verkauft, diese betragen $\frac{255 \cdot 9}{16} = 143\frac{7}{16}$ Quart, dazu 4 Quart Hefen, das macht $147\frac{7}{16}$ Quart, und da eine Tonne 100 Quart hat, so bleiben für Wasser $47\frac{7}{16}$ Quart.

41. Jemand hat 256 Scheffel Weizen zu 2 Thlr. 25 Sgr. und 464 Scheffel zu 3 Thlr. 2 Sgr.; er schüttet beide Quantitäten zusammen,

Digitized by Google

vermischt sie nach Möglichkeit, und nun ist die Frage, wie theuer ein Scheffel dieser Mischung sei?

256 Scheffel Weizen zu 85 Sgr. = 725 Thlr. 10 Sgr.
464 » » » 92 » = 1422 » 28 »

720 Scheffel der Mischung = 2148 Thlr. 8 Sgr.; daher
1 Scheffel der Mischung = 2 Thlr. 29 Sgr. $6\frac{1}{4}\frac{1}{5}$ Pf.

42. Zu 95 Flaschen Wein à 25 Sgr. hat man wie viele Flaschen Wein à 1 Thlr. 5 Sgr. gegossen, indem man eine Flasche der Mischung für 27 Sgr. verkauft?

Der Preis einer Flasche des schlechten Weines ist um 2 Sgr. zu wenig, der des besten um 8 Sgr. zu viel als der einer Flasche der Mischung; daher muß man die Weine in solchem Verhältnisse mit einander mischen, daß das Zuwenig durch das Zuviel aufgehoben wird; es sind nun 4 Flaschen zu 25 Sgr. um 4 . 2 oder 8 Sgr. weniger als 4 Flaschen der Mischung; also muß man so viele Flaschen des besten Weines zur Mischung genommen haben, als 4 Flaschen in 95 Flaschen enthalten sind, dieses macht $23\frac{3}{4}$ Flaschen.

43. Zu 84 Flaschen Wein à 1 Thlr. 6 Sgr. hat man wie viele Flaschen Wein à 20 Sgr. gegossen, wenn man eine Flasche der Mischung für 1 Thlr. verkauft?

Eine Flasche Wein der besten Sorte kostet 6 Sgr. mehr, eine der schlechtesten Sorte 10 Sgr. weniger als eine Flasche der Mischung. Nun suche man das Verhältniß der Zahlen, mit welchen man den Ueberschuß von 6 Sgr. und das Fehlende von 10 Sgr. multipliciren muß, um gleichen Ueberschuß und gleiches Fehlende zu erhalten; diese stehen im umgekehrten Verhältnisse des Ueberschusses und des Fehlenden; daher muß man auch in demselben Verhältnisse die Zahlen der Flaschen jeder Sorte Wein nehmen; man braucht also immer 5 Flaschen Wein der besten und 3 Flaschen Wein der schlechtesten Sorte, um die verlangte Mischung zu erhalten; daher hat man $\frac{84}{5} \cdot 3 = 50\frac{2}{5}$ Flaschen Wein à 20 Sgr. zu der oben genannten Zahl Flaschen Wein à 1 Thlr. 6 Sgr. gegossen.

44. Jemand hat zweierlei Wein, von dem einen kostet das Quart 2 Thlr. 20 Sgr., von dem andern ein Quart 1 Thlr. 10 Sgr.; er will von beiden Sorten in dem Verhältnisse mit einander mischen, daß er 64 Quart habe, und ein Quart der Mischung für 1 Thlr. 25 Sgr. verkaufen könne. Wie viele Quart von jeder Sorte braucht er zu dieser Mischung?

Ein Quart der besten Sorte kostet 25 Sgr. mehr, ein Quart der schlechtern Sorte 15 Sgr. weniger als ein Quart der Mischung; das Mehr steht also zum Weniger im Verhältnisse von 25 : 15 = 5 : 3, und das umgekehrte Verhältniß ist also 3 : 5; daher muß man von der besten Sorte das 3fache und von der schlechtern das 5fache einer gewissen Quantität, von beiden also das 8fache derselben Quantität nehmen = 64 Quart; daher das

Digitized by Google

Einfache = 8 Quart; folglich nimmt man von der besten Sorte 3 . 8 = 24 Quart und von der schlechtern 5 . 8 = 40 Quart.

Probe. 24 Quart à 80 Sgr. = 64 Thlr.
40 Quart à 40 Sgr. = 53 Thlr. 10 Sgr.

64 Quart der Mischung = 117 Thlr. 10 Sgr., also
1 Quart der Mischung = 1 Thlr. 25 Sgr.

45. Wie viele Quart Wein à 1 Thlr. 25 Sgr. und à 18 Sgr. muß man mischen, um 2 Anker oder 60 Quart à 1 Thlr. zu erhalten?

Das Mehr steht zum Weniger im Verhältnisse von 25 : 12, also müssen die Quantitäten Wein im umgekehrten Verhältnisse 12 : 25 stehen; daher nimmt man von der besten Sorte das 12fache, von der schlechtesten das 25fache, also von beiden das 37fache = 60 Quart, daher das Einfache = $\frac{60}{37}$ Quart; folglich braucht man zur beabsichtigten Mischung $12 . \frac{60}{37} = 19\frac{7}{37}$ Quart der besten und $25 . \frac{60}{37} = 40\frac{23}{37}$ Quart der schlechtesten Sorte.

Anmerk. Diese Art Aufgaben ist schon früher gewesen und wird auch noch später vorkommen; sie gehören zur Alligationsrechnung und verdienen ausführliche Behandlung.

III. Beziehungen zwischen Raumgrößen und der Zeit.

A. Längengrößen und die Zeit auf einander bezogen.

Die Beziehung des Raumes auf die Zeit giebt den Begriff der Bewegung, welche entweder gleichförmig oder ungleichförmig ist. Von beiden Arten der Bewegung wird hier das Wichtigste hervorgehoben werden.

1) Gleichförmige Bewegung.

Derjenige Gegenstand, welcher sich bewegt, d. h. seinen Ort ändert, kann entweder ein lebendes Wesen (ein Mensch, ein Thier), oder ein lebloses Ding (eine Maschine, eine abgeschossene Kugel, Wasser, Wolken ꝛc.), oder selbst nur ein Punkt sein. Denn von Kräften ist in diesen Beziehungen nicht die Rede.

Eine Bewegung ist nun gleichförmig, wenn der sich bewegende Körper in gleichen Abschnitten der Zeit gleiche Räume durchläuft.

Derjenige Zeitabschnitt, nach welchem die übrigen Zeitabschnitte gemessen werden, heißt die Zeiteinheit. Diese ist nun für sehr kleine Zeitabschnitte die Sekunde; für größere die Minute; für noch größere die Stunde, der Tag von 24 Stunden, die Woche von 7 Tagen, der Monat von 30 Tagen, das Jahr von 365,24225 Tagen, Jahrhunderte, Jahrtausende ꝛc.

Der Raum, welchen ein Körper in einer Zeiteinheit zurücklegt, heißt seine Geschwindigkeit. Der durchlaufene Raum kann nun

Digitized by Google

entweder geradlinig oder krummlinig sein. Zuerst wird hier nur von geradliniger Bewegung, dann aber auch von krummliniger Bewegung gehandelt werden.

In jeder Bewegung kann man nun auf dreierlei Rücksicht nehmen, nämlich 1) auf die Zeit; 2) auf die Geschwindigkeit; und 3) auf den durchlaufenen Raum während einer gegebenen Zeit; zwei von diesen drei Stücken bestimmen das dritte; aus der Zeit und der Geschwindigkeit eines Körpers wird man den durchlaufenen Raum, aus der Zeit und dem durchlaufenen Raume wird man die Geschwindigkeit, und aus der Geschwindigkeit eines Körpers und seinem zurückgelegten Wege die dazu erforderliche Zeit finden.

1. Ein Reisender macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen, welchen Weg wird er in 7, 8, 12 ꝛc. Tagen zurückgelegt haben?

Da der Reisende an jedem Tage $4\frac{1}{2}$ Meilen zurücklegt, so macht er in 7 Tagen $7 . 4\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}$ Meilen, in 8 Tagen $8 . 4\frac{1}{2} = 36$ Meilen, in 12 Tagen $12 . 4\frac{1}{2} = 54$ Meilen.

2. Angenommen, daß eine abgeschossene Kanonenkugel in jeder Sekunde 600 Fuß durchlaufe; wie groß wird ihr beschriebener Weg in einer Minute, einer Stunde, einem Tage, einem Jahre von $365{,}_{242255}$ Tagen sein? Diese Wege sollen auf Meilen reducirt werden, deren jede $= 24\,000$ Fuß angenommen werde.

In einer Minute ist der Weg $= 60 . 600 = 36\,000$ Fuß $= 1\frac{1}{2}$ Meilen; in einer Stunde $= 60 . 1\frac{1}{2} = 90$ Meilen; in einem Tage $= 24 . 90 = 2160$ Meilen, und in einem Jahre $= 365{,}_{242255} . 2160 = 788\,923{,}_{2708}$ Meilen.

3. Die in voriger Aufgabe angenommene Kanonenkugel wird mit ihrer gleichförmigen Geschwindigkeit in 26 Jahren welchen Weg durchlaufen?

$26 . 788\,923{,}_{2708} = 20\,512\,005{,}_{0408}$ Meilen.

Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 20 665 838 Meilen; also würde oben gedachte Kanonenkugel etwa in 26 Jahren die Sonne erreichen.

Aus diesen Beispielen ergiebt sich folgender Satz:

Der in einer gewissen Zeit mit gleicher Geschwindigkeit beschriebene Weg eines Körpers ist gleich dem Produkte aus der Zeit und der Geschwindigkeit.

4. Ein Regiment marschirt von einem Orte aus, macht täglich 3 Meilen und ruht am vierten Tage; wie weit wird es in 4 Wochen oder 28 Tagen marschirt sein?

Da das Regiment an jedem von 3 auf einander folgenden Tagen 3 Meilen macht, so legt es in dieser Zeit $3 . 3 = 9$ Meilen zurück; weil es aber am 4ten Tage einen Rasttag hält, so macht es in 4 auf einander folgenden Tagen nur 9 Meilen. Nun sind 28 Tage $= 7 . 4$ Tage, also wird es in 4 Wochen $7 . 9 = 63$ Meilen marschiren.

Digitized by Google

5. Ein Reisender legt den Weg von Danzig bis Berlin, 66 Meilen, in 8 Tagen zurück; wenn er nun täglich gleichviele Meilen machte, wie groß ist seine Geschwindigkeit?

Die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ist der Weg, den er in der Zeiteinheit macht; da hier die Zeit in Tagen angegeben ist, so ist die Zeiteinheit ein Tag; weil nun der Reisende 66 Meilen in 8 Tagen macht, so hat er in einem Tage nur $\frac{1}{8}$ dieses Weges $= \frac{66}{8} = 8\frac{1}{4}$ Meilen gemacht, und dieses ist also seine Geschwindigkeit.

6. Das Dampfboot, die Gazelle, macht den Weg von Königsberg bis Neufahrwasser (bei Danzig), 18 Meilen, in 9 Stunden; wie groß ist ihre Geschwindigkeit in einer Minute und in einer Sekunde, wenn eine Meile $=$ 24 000 Fuß gerechnet wird?

Die Gazelle macht in einer Stunde oder 60 Minuten 2 Meilen $=$ $2 . 24\,000'$, also in 1 Minute $= \frac{2 \cdot 24000}{60} = 800$ Fuß; also ist ihre Geschwindigkeit in 1 Sekunde $= \frac{800}{60} = 13\frac{1}{3}$ Fuß.

Hieraus geht der Satz hervor: die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers ist gleich dem ganzen während einer gegebenen Zeit zurückgelegten Wege dividirt durch die gegebene Zeit.

7. Ein Militär-Kommando geht 3 Tage hinter einander, täglich $3\frac{1}{2}$ Meilen und ruht am vierten; es marschirt von Königsberg nach Berlin; rechnet man nun diesen Weg 78 Meilen, so ist die Frage, in wie vielen Tagen es Berlin erreichen werde?

In 3 Tagen des Marschirens macht das Kommando $3 . 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$ Meilen, und da es am 4ten Tage ruht, so kommt es in 4 Tagen nur $10\frac{1}{2}$ Meilen weit; daher wird es das Vielfache von 4 Tagen zur Zurücklegung der 78 Meilen gebrauchen, welches dieser Weg von $10\frac{1}{2}$ Meilen ist; daher ist die gesuchte Zeit $= \frac{78}{10\frac{1}{2}} . 4 = 29\frac{1}{7}$ Tagen.

8. Ein Dampfwagen legt auf einer Eisenbahn in 4 Stunden 21 Meilen zurück; welche Zeit wird er gebrauchen, um einen Weg von 72 Meilen zu machen?

Da der Wagen in 4 Stunden 21 Meilen macht, so durchfährt er in einer Stunde $\frac{21}{4}$ Meilen, und er wird also so viele Stunden zum Durchrollen des Weges von 72 Meilen brauchen, als dieser Weg ein Vielfaches von $\frac{21}{4}$ Meilen ist; folglich ist die gesuchte Zeit $= 72 : \frac{21}{4} = 13\frac{5}{7}$ Stunden.

Allgemeiner Satz: die Zeit ist gleich dem ganzen gemachten Wege dividirt durch die Geschwindigkeit.

9. Zwei Freunde, A und B, gehen nach einer Verabredung an einem und demselben Tage von Berlin und Tilsit aus, zur freundschaftlichen Unterredung zusammenzutreffen; wenn nun A, der Berliner, täglich 4, B, der Tilsiter, ein Litthauer, täglich 6 Meilen macht, und beide Städte 94 Meilen

Digitized by Google

von einander entfernt sind; an welchem Tage nach ihrem Abgange, und auf welcher Meile von jedem Orte werden sie sich begegnen?

Täglich nähern sich die Freunde um 4 und 6 oder um 10 Meilen; daher vergehen bis zu ihrer Begegnung $\frac{94}{10} = 9\frac{4}{5}$ Tage. A ist in dieser Zeit $4 . 9\frac{4}{5} = 37\frac{3}{5}$ und B in derselben Zeit $6 . 9\frac{4}{5} = 56\frac{2}{5}$ Meilen gegangen; sie treffen sich also am Vormittage des 10ten Tages ihres Ausmarsches, auf der 38sten Meile von Berlin und auf der 57sten Meile von Tilsit.

10. A geht von einem Orte aus und macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen; nach 6 Tagen geht ihm B aus demselben Orte und auf demselben Wege nach und macht täglich 6 Meilen; in wie vielen Tagen nach dem Abgange des B wird dieser den ersten Reisenden eingeholt haben und auf der wie vielsten Meile?

In 6 Tagen hat A einen Weg von $6 . 4\frac{1}{2} = 26$ Meilen zurückgelegt; B macht täglich $6 - 4\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Meilen mehr als A, also nähert er sich diesem mit jedem Tage um $\frac{3}{2}$ Meilen; daher braucht er bis zur Einholung des A so viele Tage, wie vielfach 26 Meilen von $\frac{3}{2}$ Meilen sind; also $26 : \frac{3}{2} = 17\frac{1}{3}$ Tagen; und die Einholung geschieht auf der $17\frac{1}{3} . 6 = 104$ten Meile.

11. Der Umfang eines Kreises mißt 720 Fuß; auf demselben bewegt sich ein Körper, der in jeder Sekunde 15 Fuß durchläuft; in welcher Zeit wird dieser Körper den Umfang des Kreises 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. mal durchlaufen?

Zu einmaliger Durchlaufung des Kreisumfanges braucht der Körper $\frac{720}{15} = 48''$; daher sind die gefragten Zeiten $48''$; $2 . 48'' = 96'' = 1' 36''$; $3 . 48'' = 144'' = 2' 24''$; $4 . 48'' = 192'' = 3' 12''$; $5 . 48'' = 240'' = 4'$, ꝛc.

Anmerk. Stunden werden oft mit dem Anfangsbuchstaben des Wortes hora (die Stunde), Minuten mit einem Striche und Sekunden mit 2 Strichen bezeichnet; daher sind 5 Stunden 48 Minuten 51 Sekunden $= 5^h\ 48'\ 51''$.

12. Der Minutenzeiger einer Uhr durchläuft den Umfang derselben in einer Stunde oder 60′. Da nun jeder Kreisumfang 360 Grade hat, so durchläuft er in einer Minute, in einer Sekunde, in 15 Minuten, 30 Minuten, 50 Minuten wie viele Grade oder welchen Theil des Kreisumfanges?

In einer Minute durchläuft der Minutenzeiger (M.Z.) $\frac{1}{60}$ des Kreisumfanges $= \frac{1}{60} . 360° = 6$ Grad; daher durchläuft er in einer Sekunde $\frac{1}{60} . \frac{1}{60}$ des Kreisumfanges $= \frac{1}{3600}$ desselben $= \frac{1}{60} . 6° = \frac{1}{10}$ Grad $= 6$ Minuten.

Anmerk. Schon früher ist erwähnt worden, daß jeder Kreisumfang in 360 gleiche Theile, Grade genannt, eingetheilt werde; jeder Grad wird wieder in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Sekunden eingetheilt; kleinere Theile als Sekunden werden in Decimaltheile der Sekunden angegeben, und die kurze Bezeichnung derselben ist diese: $3° 18' 54'' = 3$ Grad 18 Minuten 54 Sekunden.

Digitized by Google

Da der M.Z. in $1' \frac{1}{60}$ des Uhrumfanges oder 6° durchläuft, so wird er in 15 Minuten $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ des Umfanges $= 90°$, in $30' \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ des Umfanges $= 180°$, in $50' \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ des Umfanges $= 300°$ durchlaufen.

13. Der Stundenzeiger (St.Z.) einer Uhr durchläuft den Umfang derselben in 12 Stunden; welchen Weg, in Theilen des Umfanges und zwar in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt, durchläuft er in einer Stunde, einer Minute, einer Sekunde, in 15 Minuten, in 48 Minuten ꝛc.? (Fig. 71.)

In einer Stunde durchläuft der St.Z. $\frac{1}{12}$ des Umfanges $= \frac{360°}{12} = 30°$, in 1 Minute $= \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{720}$ des Umfanges $= \frac{1}{60} \cdot 30° = \frac{1}{2}° = 30'$, in 1 Sekunde $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{720} = \frac{1}{43200}$ des Umfanges $= \frac{1}{60} \cdot 30' = \frac{1}{2}' = 30''$.

In 15 Minuten macht der St.Z. $15 \cdot \frac{1}{720} = \frac{1}{48}$ des Umfanges $= 15 \cdot \frac{1}{2}° = 7\frac{1}{2}° = 7°\,30'$; in 48 Minuten $48 \cdot \frac{1}{720} = \frac{1}{15}$ des Umfanges $= 48 \cdot \frac{1}{2}° = 24°$. ꝛc.

14. Wann nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. 12 Uhr werden der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr über einander stehen?

Ist es 1 Uhr, so steht der M.Z. auf 12, der St.Z. auf 1 zeigend, jener also hat die Richtung ma, dieser die mb; und folglich hat der St.Z. vor dem M.Z. $\frac{1}{12}$ des Umfanges als Vorsprung voraus.

Da nun der M.Z. in jeder Minute $\frac{1}{60}$, der St.Z. in derselben Zeit nur $\frac{1}{720}$ des Umfanges durchläuft, so macht der M.Z. in jeder Minute $\frac{1}{60} - \frac{1}{720} = \frac{11}{720}$ des Uhrumfanges mehr als der St.Z. in derselben Zeit; bis zur nächsten Deckung muß aber der M.Z. $\frac{1}{12}$ des Umfanges mehr als der St.Z. in derselben Zeit durchlaufen (denn die Deckung geschehe in der Lage mc, so ist der Weg des M.Z. der Bogen ac, der des St.Z. der Bogen bc, also ist der Weg des M.Z. um den Bogen ab $= \frac{1}{12}$ des Umfanges größer als der Weg des St.Z.); daher sind zur Einholung des St.Z. durch den M.Z. so viele Minuten erforderlich, wie vielfach $\frac{1}{12}$ des Umfanges von $\frac{11}{720}$ desselben ist; daher die Zahl der Minuten $= \frac{1}{12} : \frac{11}{720} = \frac{1}{12} \cdot \frac{720}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ Minuten.

Um 2 Uhr hat der St.Z. vor dem M.Z. einen Vorsprung von $\frac{1}{6}$ des Umfanges, und da der M.Z. in jeder Minute $\frac{11}{720}$ des Umfanges mehr als der St.Z. in derselben Zeit durchläuft, so ist die Zeit bis zur nächsten Deckung $= \frac{1}{6} : \frac{11}{720} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$ Minuten.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man, daß die Zeiger der Uhr über einander stehen nach 3 Uhr $16\frac{4}{11}$ Minuten; nach 4 Uhr $21\frac{9}{11}$ M.; nach 5 Uhr $27\frac{3}{11}$ M.; nach 6 Uhr $32\frac{8}{11}$ M.; nach 7 Uhr $38\frac{2}{11}$ M.; nach 8 Uhr $43\frac{7}{11}$ M.; nach 9 Uhr $49\frac{1}{11}$ M.; nach 10 Uhr $54\frac{6}{11}$ M.; nach 11 Uhr 60 M., oder gerade um 12 Uhr, was allgemein bekannt ist.

Da die Zeiger der Uhr um 12 Uhr gerade über einander stehen, so muß der M.Z. von der Zahl 12 über 1, 2, 3 ꝛc. wieder bis 12 laufen, ohne auf diesem Wege den St.Z. zu treffen; während dieser Zeit ist der

Digitized by Google

St.Z. von 12 bis 1 gerückt; es ist also 1 Uhr, und nach dieser Zeit decken sie sich nach $5\frac{5}{11}$ Minuten; daher verfließt von einer Deckung der Zeiger bis zur nächsten 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minuten.

Diesen letzten Schluß kann man auch so machen: der M.Z. muß von einer Deckung bis zur nächsten den Umfang der Uhr mehr als der St.Z. durchlaufen (denn der M.Z. läuft von der Zahl 12 über 1, 2, 3 ꝛc. bis zur Deckung in die Lage mc, der St.Z. von 12 bis in die Lage mc, also hat der M.Z. den ganzen Umfang in derselben Zeit mehr als der St.Z. gemacht); in jeder Minute macht der M.Z. $\frac{1}{720}$ des Umfanges mehr als der St.Z. in derselben Zeit; daher verfließen von einer Deckung bis zur nächsten so viele Minuten, wie vielfach der ganze Umfang von seinen $\frac{1}{720}$ ist, also $= 1 : \frac{1}{720} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ Minuten $= 1$ St. $5\frac{5}{11}$ M.

15. Während der Zeit von 12 Stunden stehen die Zeiger einer Uhr wie viele Male über einander?

Da von einer Deckung bis zur nächsten $\frac{720}{11}$ Minuten erforderlich sind, so werden in 12 Stunden $= 12 . 60 = 720$ Minuten so viele Deckungen vor sich gehen, wie vielfach 720 M. von $\frac{720}{11}$ M. sind, d. i. $= 720 : \frac{720}{11}$ $= 720 . \frac{11}{720} = 11$; also stehen sie 11 mal über einander.

16. Wann nach 12, 1, 2, 3 ꝛc. Uhr werden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel zunächst bilden? (Fig. 72.)

Ein rechter Winkel am Mittelpunkte eines Kreises faßt zwischen seinen Schenkeln $\frac{1}{4}$ des Kreisumfanges; bilden daher die Zeiger ma, mb einen rechten Winkel, so muß die Spitze des M.Z. von der des St.Z. um $\frac{1}{4}$ des Uhrumfanges abstehen, und um diesen Abstand ist der M.Z. vor dem St.Z. vorausgeeilt; da nun jener in einer Minute stets um $\frac{1}{720}$ des Umfanges rascher als dieser läuft, so sind während dieser Voraueilung so viele Minuten verflossen, wie vielfach $\frac{1}{4}$ des Umfanges von $\frac{1}{720}$ desselben ist, also $\frac{1}{4} : \frac{1}{720} = 16\frac{4}{11}$ Minuten.

Ist es 1 Uhr, so hat der St.Z. vor dem M.Z. einen Vorsprung von $\frac{1}{12}$ des Umfanges, und damit beide Zeiger einen rechten Winkel bilden, so muß der M.Z. noch um $\frac{1}{4}$ des Umfanges vor dem St.Z. voraueilen; daher muß der M.Z. $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ des Umfanges in derselben Zeit mehr als der St.Z. machen; folglich sind hiezu so viele Minuten erforderlich, als wie vielfach $\frac{1}{3}$ des Umfanges von $\frac{1}{720}$ desselben ist, also $\frac{1}{3} . \frac{720}{11} = 21\frac{9}{11}$ M. Daher bilden die Zeiger nach 1 Uhr $21\frac{9}{11}$ M. einen rechten Winkel.

Durch ähnliche Schlüsse findet man, daß die Zeiger der Uhr einen rechten Winkel nach $2^h\ 27\frac{3}{11}'$, nach $3^h\ 32\frac{8}{11}'$, nach $4^h\ 5\frac{5}{11}'$, nach $5^h\ 10\frac{10}{11}'$, nach $6^h\ 16\frac{4}{11}'$ ꝛc. begrenzen.

Ist es 4 Uhr, so bilden die Zeiger einen stumpfen Winkel; denn ihr Abstand von einander ist $= \frac{1}{3}$ des Umfanges $= 120°$; daher hat der M.Z. bis zur nächsten Bildung eines rechten Winkels nur $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ des Umfanges mehr als der St.Z. zu machen; da er nun in jeder Minute $\frac{1}{720}$ des

Digitized by Google

Umfanges mehr als der St. Z. in derselben Zeit macht, so sind in diesem Falle $\frac{1}{12} : \frac{11}{720} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ M. erforderlich.

Von dieser Zeit ab gehen die Schlüsse in derselben Art weiter, und es kann daher die Zeit leicht berechnet werden.

Anmerk. Man kann auch die Frage aufstellen, wann nach einer gegebenen Zeit die Zeiger nach entgegengesetzten Richtungen stehend, eine Gerade, oder einen beliebig gegebenen Winkel, in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt, bilden; doch alle diese Fragen können nach vorstehender Darstellung leicht beantwortet werden, und daher übergehe ich ihre genauere Berechnung.

17. Die Erde dreht sich in 24 Stunden um ihre Axe, und jeder Ort auf ihrer Oberfläche muß also in derselben Zeit einen Kreis, und zwar einen Parallelkreis zum Aequator, beschreiben; welchen Bogen in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt, muß also ein Ort auf der Erdoberfläche in einer Stunde, einer Zeitminute, einer Zeitsekunde beschreiben?

Die Bewegung der Erde ist gleichförmig, also sind die beschriebenen Bogen eines Orts den dazu verwendeten Zeiten proportional; diesem Satze gemäß hat man

24 Stunden : 1 Stunde = 360° : x = 15°.
1 » : 1 Minute = 15° : y = 15′.
1 Minute : 1 Sekunde = 15′ : y = 15″.

Jeder Ort der Erdoberfläche beschreibt also in 1 Stunde 15°, in 1 Zeitminute 15 Bogenminuten, in 1 Zeitsekunde 15 Bogensekunden.

18. Die Erde bewegt sich in $365{,}242254$ Tagen um die Sonne, oder diese uns scheinbar in derselben Zeit um jene; der Mond bewegt sich in $27{,}321586565$ Tagen um die Erde, nämlich von einem Frühlingspunkte bis zu demselben; wie viele Grade durchläuft sowohl die Sonne als auch der Mond an einem Tage?

Hiebei nimmt man an, daß Sonne und Mond Kreise am Himmel durchlaufen. Da nun jeder Kreis 360° hat, so wird man die tägliche Bewegung jedes genannten Himmelskörpers erhalten, wenn man den Kreisumfang durch die Zahl der Tage, in welchen sie einen Kreislauf machen, dividirt; daher ist die tägliche Bewegung der Sonne $= 360° : 365{,}242255 = 0{,}9856471837°$, des Mondes $= 360° : 27{,}321586565 = 13{,}176394392°$.

19. Wenn Sonne, Mond und Erde in einer Geraden stehen, nach wie vielen Tagen wird dieses wieder sich ereignen?

Zur Lösung dieser Aufgabe muß man die Bedingungen der vorigen zu Hilfe nehmen. Man wird die Erde als im Mittelpunkte derjenigen Kreise, in welchen sich Sonne und Mond um die Erde bewegen, ruhend annehmen. Man kann diese Aufgabe sehr passend mit der über die Bewegung der Zeiger einer Uhr vergleichen; die Erde stellt den Mittelpunkt der

Digitized by Google

Uhrscheibe, die langsamere Sonne den Stundenzeiger, der raschere Mond den Minutenzeiger dar.

Da der Mond täglich $13,_{17639\,43920}{}^{\circ}$, die Sonne täglich $0,_{98564\,71840}{}^{\circ}$ durchläuft, so beschreibt der Mond täglich $12,_{19074\,72080}{}^{\circ}$ mehr als die Sonne. Soll nun der Mond wieder mit der Sonne und der Erde in einer Geraden sein, so muß er bis zu dieser Lage den ganzen Umfang eines Kreises oder 360° mehr als die Sonne während derselben Zeit durchlaufen; daher braucht er bis zur Erreichung dieses Standpunktes so viele Tage, wie vielfach 360° von dem Ueberschusse seiner täglichen Bewegung über die der Sonne ist, also $360^{\circ} : 12,_{19074\,72080}{}^{\circ} = 29,_{53059\,26590}$ Tagen = 29 Tagen 12 Stunden 44′ $3,_{20573\,6}{}''$.

Anmerk. 1. Der Umlauf des Mondes kann entweder von einem Fixsterne bis zu demselben, oder von einem Frühlingspunkte bis zu demselben, oder von einem Neumonde bis zum nächsten, oder von einem Knoten bis zu demselben, oder endlich von der Erdnähe bis zu derselben gerechnet werden. Die Punkte, in welchen die Mondsbahn die Sonnenbahn (Erdbahn) oder die Ekliptik durchschneidet, heißen die Knoten. Steigt der Mond aus der südlichen Halbkugel durch die Ekliptik in die nördliche Halbkugel, so heißt dieser Knoten der aufsteigende, daher ist der niedersteigende Knoten derjenige, in welchem der Mond aus der nördlichen Halbkugel durch die Ekliptik in die südliche hinabsteigt. Die Zeit des Umlaufs des Mondes von einem Fixsterne bis zu demselben heißt der siderische Monat (von sidus, der Stern) und ist = 27 Tagen 7 Stunden 43′ 12″; die Zeit des Mondsumlaufs vom Frühlingspunkte bis zu demselben heißt der periodische Monat und ist = 27 Tagen 43′ 5″; die Zeit des Mondsumlaufes von einem Neumonde bis zum nächsten heißt der synodische (von synodos, die Zusammenkunft) Monat und ist = 29 Tagen 12 Stunden 44′ 3″; die Zeit des Umlaufs des Mondes von einem aufsteigenden Knoten bis zu demselben heißt der Knotenmonat = 27 Tagen 5 Stunden 6′ 56″, und endlich heißt die Zeit des Mondsumlaufs von der Erdnähe bis zu derselben der anomalische Monat = 27 Tagen 13 Stunden 18′ 35″.

Anmerk. 2. Wenn der Mond mit der Sonne und Erde sich in einer Geraden befindet, so ist er entweder der neue oder der volle Mond; er ist der neue Mond, wenn er zwischen der Sonne und der Erde steht, und der volle Mond, wenn er und die Sonne auf entgegengesetzten Seiten der Erde sich befinden.

Kennt man nun die Zeit eines Neu- oder Vollmondes, so kann man vermöge der Länge des synodischen Monats leicht die Zeit der darauf folgenden Neu- und Vollmonde berechnen. Z. B. den 24. Mai 10^{h} 33′ Vormittag 1842 war Vollmond, so wird man den nächsten erhalten, wenn man zu jener Zeit 29 Tage 12 Stunden 44′ addirt, dieses giebt den 22. Juni 11^{h} 17′ nach Mittag. Denn vom Jahre 1842 sind bis zum 24. Mai 10^{h} 33′ v. M. verflossen

4 Monate 23 Tage 10^{h} 33′, dazu addirt
29 „ 12^{h} 44′

4 Monate 52 Tage 23^{h} 17′; die 52 Tage muß man nun in Monate verwandeln; man muß dadurch den 5ten Monat erhalten, dieser ist der Mai, welcher 31 Tage hat; 31 Tage von 52 Tagen subtrahirt, läßt 21 Tage, daher reducirt sich jene Zeit auf folgende: 5 Monate 21 Tage 23^{h} 17′ sind völlig verflossen, und daher ist der folgende Vollmond den 22. Juni 11^{h} 17′ nach Mittag. Im Kalender steht: den 22. Juni 10^{h} 15′ n. M. Diese Differenz rührt von dem unregelmäßigen Laufe des Mondes her.

Digitized by Google

2) Ungleichförmige Bewegung.

Die ungleichförmige Bewegung eines Körpers ist diejenige, welche den Körper nöthigt, in gleichen Zeiten ungleiche Räume zu durchlaufen, die zur Bewegung gebrauchten Zeiten sind also den durchlaufenen Räumen nicht proportional. Sie kann nun entweder regelmäßig oder unregelmäßig sein.

Die regelmäßige ungleichförmige Bewegung eines Körpers ist diejenige, in welcher die Geschwindigkeit der Zeit proportional wächst oder abnimmt, d. h. die Geschwindigkeit muß in gleichen, auf einander folgenden, beliebig kleinen Zeittheilchen um gleiche Größen entweder wachsen oder abnehmen. Durch das Wachsen der Geschwindigkeit wird die Bewegung beschleunigt, durch das Abnehmen der Geschwindigkeit wird die Bewegung verzögert. Daher ist die regelmäßige ungleichförmige Bewegung entweder eine beschleunigende oder verzögernde.

Die regelmäßige, ungleichförmige, beschleunigende Bewegung kann man auf folgende Weise erläutern. (Fig. 73.)

Sei anNn′ ein Quadrat, an in beliebig viele gleiche Abschnitte ab = bc = cd ꝛc.; an′ in ebenso viele gleiche Abschnitte ab′ = b′c′ = c′d′ ꝛc. getheilt; durch die Theilungspunkte b, c, d ꝛc. gehen Parallelen zu an′, durch die b′, c′, d′ ꝛc. Parallelen zu an, so werden sich dieselben je zwei in aN in den Punkten B, C, D ꝛc. durchschneiden; es entstehen dadurch neue Quadrate abBb′, acCc′, adDd′, aeEe′, afFf′ ꝛc. Stellen nun die gleichen Abschnitte ab = bc = cd = de ꝛc. gleiche Zeitabschnitte dar, so kann man bB, cC, dD, eE ꝛc. als die zwei Zeitabschnitten zugehörigen Geschwindigkeiten ansehen, und zwar in der Art, während die Zeit von Null in a bis zu der Länge ab währt, hat die Geschwindigkeit von Null in a bis zu der Länge bB zugenommen. Die Zeit rückt darauf von b nach c, die ihr zugehörige Geschwindigkeit wächst von bB bis cC; die Zeit schreitet wieder von c nach d, die ihr entsprechende Geschwindigkeit nimmt wieder von cC bis dD zu; die Zeit rückt ferner von d nach e, die mit ihr wachsende Geschwindigkeit geht aus dD in eE über ꝛc. Und es ist aus dieser Darstellung leicht ersichtlich, daß die Geschwindigkeiten mit jedem neuen Zeitabschnitte von gleicher Länge um gleiche Größen wachsen; denn bB = ab′, cC = ac′, dD = ad′, eE = ae′ ꝛc., und ab′ = b′c′ = c′d′ d′e′ ꝛc., also wachsen auch bB, cC, dD, eE ꝛc. um gleiche Größen.

Dieselben Verhältnisse würden stattfinden, wenn anNn′ nicht ein Quadrat, sondern nur ein Rechteck wäre; in wie viele Abschnitte aber man an heilte, in ebenso viele müßte man auch an′ theilen.

Nimmt man die kleinen Zeitabschnitte ab = bc = cd ꝛc. als Sekunden an und bezeichnet die Geschwindigkeit bB, welche der bewegte Körper nach Verlauf einer Sekunde erreicht hat, mit g, so ist die Geschwindigkeit am Ende der 2ten Sekunde = cC = 2g, am Ende der 3ten Sekunde =

Digitized by Google

dD = 3g, am Ende der 4ten Sekunde = eE = 4g ꝛc., also am Ende der tten Sekunde = t.g.

Früher wurde der Satz von der gleichförmigen Bewegung ausgesprochen: der durchlaufene Raum eines Körpers ist gleich dem Produkte aus der darauf verwandten Zeit und seiner Geschwindigkeit; wendet man nun diesen Satz auf die regelmäßig beschleunigende Bewegung an, so wird man etwas Aehnliches erhalten.

Man nehme beliebig viele Sekunden, etwa 5 = af, so ist die Endgeschwindigkeit, welche zu dieser Zeit gehört, fF, und das Produkt aus af und fF ist das Rechteck afFf', oder da fF = 5g, so ist das Rechteck afFf' = 5.5.g = 25.g, und man kann sich die Sache so vorstellen, als würde der Raum afFf' in der Zeit af mit der Geschwindigkeit fF durchlaufen.

Der bewegte Körper hat aber nicht gleich von Anfang an, nämlich in a, die Geschwindigkeit fF, sondern sie ist in a Null, und wächst mit der Zeit von Null an bis zur Größe bB, cC, dD und fF; und während sie nun von Null bis fF wächst, durchläuft sie in der Zeit af den Raum des Dreiecks afF; daher muß dieser Raum als derjenige angesehen werden, welchen der Körper mit regelmäßig beschleunigter Geschwindigkeit durchlaufen hat. Ebenso ist der durchlaufene Raum des Körpers für die Zeit ab das △ abB, für die Zeit ac das △ acC, für die Zeit ag das △ agG, für die Zeit an das △ anN ꝛc. Jedes Dreieck ist aber die Hälfte von einem Rechtecke auf derselben Grundlinie und von gleicher Höhe; also △ abB = ½ □ abBb', △ acC = ½ □ acCc', △ adD = ½ □ adDd' ꝛc., und die genannten Rechtecke sind gleich 1.g, 2.2g = 4g, 3.3g = 9g, 4.4g = 16g ꝛc.; allgemein für t Sekunden t.tg; also ist der mit regelmäßig beschleunigter Bewegung durchlaufene Raum des Körpers für 1, 2, 3, 4 ꝛc. t Sekunden = ½g, 2g, ½.9g, 8g ꝛc., ½t.t.g. Ferner verhalten sich diese durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten, denn es ist z. B

△ acC : △ aeE = □ acCc' : □ aeEe' = 4 : 16;

△ adD : △ ahH = Quadr. adDd' : Quadr. ahHh' = 9 : 49;

△ agG : △ amM = Quadr. agGg' : Quadr. amMm' = 36 : 121 ꝛc.

Hieraus erhellt der Satz: In der regelmäßig beschleunigten Bewegung verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der dazu verwandten Zeiten.

Auch folgender Satz wird klar sein: In der regelmäßig beschleunigten Bewegung erlangt der bewegte Körper nach einer gewissen Zeit eine solche Endgeschwindigkeit, daß er mit derselben bei gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit einen doppelt so großen Raum als vorher durchlaufen kann.

Die Gesetze, welche von der regelmäßig beschleunigten Bewegung aufgestellt wurden, müssen auch für die regelmäßig verzögerte Bewegung gelten.

Digitized by Google

Es waren ihrer drei, und zur Wiederholung und klaren Auffassung derselben will ich sie noch in Bezug auf die verzögerte Bewegung aussprechen.

1) In der regelmäßig verzögerten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit proportional der Zeit ab.

2) Die durchlaufenen Räume in der regelmäßig verzögerten Bewegung sind den Quadraten der darauf verwandten Zeiten proportional.

3) Die nach einer gewissen Zeit erlangte Endgeschwindigkeit eines Körpers bei regelmäßig verzögerter Bewegung ist so groß, daß er mit derselben in der nämlichen Zeit nur einen halbmal so großen Raum als vorher durchlaufen kann.

Die regelmäßig ungleichförmige Bewegung ist nicht blos in Gedanken, sondern in der Wirklichkeit vorhanden und erstreckt sich durch das ganze Weltall; ihren Gesetzen sind alle Himmelskörper in ihren Bewegungen unterworfen; auf der Erde stellt sie sich im Fallen der Körper dar; daher hat man vom Fallen der Körper folgende 3 Gesetze:

1) Die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers wächst proportional den Zeiten seines Fallens.

2) Die Fallräume zweier Körper sind den Quadraten ihrer Fallzeiten proportional.

3) Die Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers ist so groß, daß er mit derselben bei gleichförmiger Bewegung einen doppelt so großen Raum als den Fallraum durchlaufen kann.

Mit g bezeichnet man allgemein den Fallraum eines Körpers in der Ersten Sekunde; er ist für verschiedene Orte der Erde verschieden und richtet sich nach der Polhöhe oder der Breite eines Orts.

1. Aus der Länge des Sekundenpendels eines Ortes kann man durch folgenden Satz den Fallraum in der ersten Sekunde dieses Orts leicht berechnen: Die halbe Länge des Sekundenpendels verhält sich zum Fallraume (Fallhöhe) in der ersten Sekunde wie das Quadrat des Durchmessers eines Kreises sich zum Quadrate des Kreisumfanges verhält. Das Sekundenpendel ist dasjenige, welches in jeder Sekunde eine Schwingung macht.

Die Länge des Sekundenpendels zu Berlin ist $= 456{,}_{1626}$ Preuß. Linien; welches ist also die Fallhöhe in der ersten Sekunde zu Berlin?

Das Verhältniß des Durchmessers zum Kreisumfange ist gleich $1 : \pi = 1 : 3{,}_{14159}$; daher verhält sich das Quadrat des Durchmessers zum Quadrate des Kreisumfangs $= 1 . 1 : 3{,}_{14159} . 3{,}_{14159} = 1 : 9{,}_{869587721}$; bezeichnet man die Fallhöhe in der ersten Sekunde mit F, so ist $228{,}_{0813} : F = 1 : 9{,}_{869587721}$; daraus ergiebt sich $F = 2251{,}_{0683994890945}3$ Preuß. Linien $= 15{,}_{63242}$ Preuß. Fuß.

Digitized by Google

2. Die Länge des Sekundenpendels wird unter der nördlichen Breite von 45° gleich 440 Pariser Linien angegeben. Wie groß ist die Fallhöhe unter derselben Breite in Preuß. Längenmaßen ausgedrückt, wenn 1 Preuß. Fuß = $139,_{13}$ Pariser Linien ist?

Nach obigem Satze ist:

$220 : F = 1 : 9,_{869587728}$; daher ist

$$F = 2171,_{3093} \text{ Par. Lin.} = \frac{2171,_{3093}}{139,_{13}} = 15,_{6063} \text{ Preuß. Fuß.}$$

3. Gilbert giebt die Länge des Sekundenpendels für die Breite von Paris, 48° 50′ 14″ nördlicher Breite, = $440,_{64}$ Pariser Linien an; wie groß ist also die Fallhöhe in der ersten Sekunde zu Paris, in Preuß. Fuß ausgedrückt?

Nach Satz in Nro. 1. ist

$220,_{32} : F = 1 : 9,_{869587728}$; daraus folgt

$$F = 2174,_{467568}\ldots \text{ Par. Lin.} = \frac{2174,_{467568}}{139,_{13}} = 15,_{62903} \text{ Pr. Fuß.}$$

4. Die Länge des Sekundenpendels wird unter dem Aequator = 439, unter der Breite von 45° = $440,_{35}$, und unter dem Pole = $441,_{59}$ Pariser Linien angegeben; wie groß ist die Fallhöhe in der ersten Sekunde in diesen Gegenden nach Preuß. Fußen berechnet?

$219,_{5} : F = 1 : 9,_{869587728}$ für den Aequator; daher F = $2166,_{37451}$ Par. Linien $= \frac{2166,_{37451}}{139,_{13}} = 15,_{57087}$ Preuß. Fuß.

$220,_{175} : F = 1 : 9,_{869587728}$ für die Breite von 45°, also $F = 2173,_{036478}$ Par. Lin. $= \frac{2173,_{036478}}{139,_{13}} = 15,_{61875}$ Preuß. Fuß.

$220,_{795} : F = 1 : 9,_{869587728}$ für den Pol, also ist

$$F = 2179,_{1556224} \text{ Par. Lin.} = \frac{2179,_{1556224}}{139,_{13}} = 15,_{66273} \text{ Pr. Fuß.}$$

Anmerk. Die Fallhöhe nimmt also mit der Breite eines Ortes zu, doch ist diese Zunahme vom Aequator bis zum Pole nur $0,_{09186}$ Preuß. Fuß = $1,_{10232}$ Preuß. Zoll, also sehr gering, und man kann daher die Fallhöhe in der gemäßigten Gegend überall als gleich annehmen.

5. Die Länge des Sekundenpendels unter der Breite von London ist gleich $39,_{1393}$ Engl. Zoll; das Engl. Normallängenmaß ist das Yard = 36 Engl. Zoll = $405,_{34248}$ Par. Linien. Wie groß ist also die Fallhöhe in der ersten Sekunde zu London in Preuß. Fuß?

$\frac{1}{2} . 39,_{1393} : F = 1 : 9,_{869587728}$; daher ist $F = 193,_{14437748}$ Engl. Zoll $= \frac{193,_{14437748} . 405,_{34248}}{36 . 139,_{13}} = 15,_{63079}$ Preuß. Fuß.

Anmerk. Da die Fallhöhe in der ersten Sekunde zu London kleiner als die zu Berlin ist (s. Aufg. 1.), so muß die Breite von London geringer als die von Berlin sein.

Digitized by Google

Für diejenigen Lehrer, welche mit trigonometrischen Rechnungen vertraut sind, führe ich Formeln zur Berechnung der Länge des Sekundenpendels an; denn Formeln dieser Art findet man nicht überall, und können Liebhabern der Mathematik sehr willkommen sein.

Bezeichnet man die Polhöhe oder Breite eines Ortes mit φ, so ist nach La Place: $L = 440{,}592 \pm 1{,}2494 \cdot \cos\varphi^2$; nach Steinhäuser: $L = 440{,}3505 \pm 1{,}2448 \cos\varphi^2$; nach Muncke: $L = 440{,}3505\,(1 - 0{,}0025945 \cos 2\varphi)$; wo L die Länge des Sekundenpendels bezeichnet. Jede dieser Formeln giebt L in Pariser Linien ausgedrückt.

Die Polhöhe von Königsberg ist $\varphi = 54° 42' 48''$; daher findet man nach der ersten Formel $L = 440{,}808925$ Par. Lin., nach der zweiten $L = 440{,}7658898$ Par. Lin., nach der dritten $L = 440{,}7304921$ Par. Lin., daraus folgt $F = 15{,}635064$, $= 15{,}6335036$, $= 15{,}632244$ Pr. Fuß.

6. Die Fallhöhe in der ersten Sekunde ist zu Königsberg $15{,}6336$ Pr. Fuß; ein Körper ist 2, 3, 4, 5 ꝛc. Sekunden gefallen; aus welcher Höhe geschah dieses?

Nach obigen Gesetzen sind die Fallräume den Quadraten der Zeiten proportional; setzt man also die Fallräume für 2, 3, 4 ꝛc. Sekunden $= A$, B, C ꝛc., so ist $1 : 4 = 15{,}6336 : A = 62{,}5344$; $1 : 9 = 15{,}6336 : B = 140{,}7024$; $1 : 16 = 15{,}6336 : C = 250{,}1376$; $1 : 25 = 15{,}6336 : D = 390{,}64$ Preuß. Fuß.

7. Soll ein Körper durch 15 6336 Fuß fallen, so braucht er zu Königsberg wie viele Sekunden?

Ist die Zahl der gesuchten Sekunden t, so ist der Fallraum zu Königsberg $t \cdot t \cdot 15{,}6336$ Fuß, d. h. ein Vielfaches von dem Quadrate der Zeit beträgt die gegebene Höhe; daher ist das Quadrat der Zeit $= \frac{15\,6336}{15{,}6336}$ $= 10\,000 = t \cdot t$.

Nun muß man untersuchen, welche Zahl zum Quadrate erhoben, die Zahl 10000 giebt. $10 \cdot 10 = 100$; $50 \cdot 50 = 2500$; $90 \cdot 90 = 8100$; noch immer zu klein; $100 \cdot 100 = 10\,000$; also 100 zum Quadrate giebt 10 000; daher muß der Körper 100 Sekunden $= 1$ Minute 40 Sekunden fallen, um aus der gegebenen Höhe zur Erde zu gelangen.

Anmerk. Es lag nicht in meinem Plane, die Ausziehung der Quadratwurzel vorzutragen, weil der Zweck dieses Buches nur die niedere Arithmetik zum Gegenstande haben sollte, und die Wurzelgrößen und überhaupt die Lehre von den Potenzen zur Buchstabenrechnung gehören, welche das Mittel zwischen der niedern Arithmetik und der Algebra hält; sie ist gleichsam die Brücke, über welche man aus dem Felde der niedern Arithmetik in das Feld der Algebra hinübergeht. Die Buchstabenrechnung wird, das Wesen derselben sehr treffend, von Bessel die allgemeine Rechenkunst genannt, denn nicht die Buchstaben sind der Gegenstand dieses Theils der Arithmetik, sondern der allgemeine Begriff der Zahl und die Kombinationen derselben; daher ist es der Natur der Sache angemessen, diesen Theil

Digitized by Google

der Arithmetik besonders und nicht mit der niedern oder Elementar-Arithmetik vermischt zu behandeln; geschieht diese Vermengung fremdartiger Theile mit einander, wie sie man in vielen, besonders neuern Büchern findet, so ist sie nach einer Ansicht behandelt, die nicht die Sache selbst, sondern den vermeintlichen Nutzen im Auge hatte, und paßt ganz zu der allgemeinen Ansicht von der wissenschaftlichen Bildung junger Leute, welche von Allem Etwas wissen sollen, im Grunde aber Nichts gründlich wissen; daher die große Arroganz junger Leute; und nun frage ich, wie man sich darüber wundern und klagen könne, da man sie zu derselben nicht anders als absichtlich herangezogen hat.

8. Man läßt einen Stein in einen tiefen Brunnen fallen und vernimmt nach $4\frac{1}{2}$ Sekunden seinen Schall, der von seiner Berührung des Brunnenwassers herrührt; wie tief ist der Brunnen, wenn man weiß, daß ein Körper in der ersten Sekunde seines Fallens $15{,}_{6336}$ Preuß. Fuß durchläuft?

$1 . 1 : 4\frac{1}{2} . 4\frac{1}{2} = 15{,}_{6336}$: zur gesuchten Tiefe $= \frac{81}{4} . 15{,}_{6336}$ $= 316{,}_{574}$ Preuß. Fuß.

9. Nach den neuesten Forschungen der Astronomen hat das Licht eine solche Geschwindigkeit, daß es mit derselben in 16 Minuten 26 Sekunden den Durchmesser der Erdbahn $=$ 41 316 000 Meilen durchläuft; wie groß ist die Geschwindigkeit des Lichts in einer Sekunde?

Die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ist der Weg, den er in einer Zeiteinheit durchläuft; nun sind $16' 26'' = 16' . 60'' + 26'' = 986''$; wie vielfach nun $986''$ von $1''$ sind, ebenso vielfach müssen 41 316 000 Meilen von der Geschwindigkeit des Lichts sein, daher ist diese $= \frac{41316000}{986}$ $= 41\,902{,}_{6}$ Meilen.

10. Der Schall durchläuft in einer Sekunde 1038 Pariser Fuß; am Abend sieht man das Feuer eines abgeschossenen Gewehrs und vernimmt seinen Knall nach 5 Sekunden; wie weit ist der Schütze von dem Schallhörer in Preuß. Fuß entfernt? 1 Pariser Fuß $=$ 144 Pariser-Linien, 1 Preuß. Fuß $= 139{,}_{13}$ Par. Linien.

Da der Schall in $1''$ $1038'$ durchläuft, so ist er in $5''$ $5 . 1038 =$ 5190 Par. Fuß durchlaufen; dieses sind $\frac{5190 . 144}{139{,}_{13}} = 5371{,}_{6667}$ Pr. Fuß.

11. Artilleristen wollen von ihrem Standpunkte aus die Entfernungen gewisser Anhöhen in ihrer Umgegend ermitteln; zu diesem Zwecke wollen sie die Kenntniß von der Geschwindigkeit des Schalles in Anwendung bringen, und es besteigen daher einige von ihnen diejenigen Anhöhen, deren Entfernung sie zu wissen wünschen. Diejenigen, welche die Anhöhen erstiegen haben, feuern auf solchen Punkten derselben Gewehre ab, deren Abblitzen oder Rauch die Zurückgebliebenen wahrnehmen können. Nach Erblickung des Rauches oder Feuers des abgeschossenen Gewehrs hört man den Knall desselben von der Anhöhe A nach 3, B nach $4\frac{1}{2}$, C nach 5, D nach 7, E nach 10 Sekunden. Wie weit sind die Spitzen dieser Anhöhen von dem erwähnten Standpunkte der Artilleristen entfernt? Der Schall durchläuft in einer Sekunde 1038 Par. Fuß. 1 Par. Fuß $= 1{,}_{035}$ Preuß. Fuß.

Digitized by Google

$A = 3 . 1074{,}33 = 3222{,}99$; $B = 4\frac{1}{2} . 1074{,}33 = 4834{,}485$; $C = 5 . 1074{,}33 = 5371{,}65$; $D = 7 . 1074{,}33 = 7250{,}31$; $E = 10 . 1074{,}33 = 10743{,}3$ Preuß. Fuß.

12. Könnte ein Vogel mit der Geschwindigkeit des Lichts fliegen, welche Zeit würde er gebrauchen, um um die Erde herumzufliegen, da der Umfang der Erde = 5400 Meilen ist? (Siehe Aufg. 9.)

$41\,316\,000 . 5400 = 986'' : A = 0{,}12887$ Sekunden.

13. Das Ohr vermag nur 9 auf einander folgende Töne in einer Sekunde von einander zu unterscheiden; denn folgen sie rascher auf einander, so vernimmt sie das Ohr nur als Einen Ton. Welches ist also die geringste Entfernung zur Wahrnehmung eines Echos oder Wiederhalls?

Die kürzeste Zeit, in welcher man einen Ton von einem andern unterscheiden kann, ist also $\frac{1}{9}$ Sekunde; in dieser Zeit durchläuft der Schall $\frac{1}{9} \times 1038$ Par. $= \frac{1}{9} . 1074{,}33 = 119{,}37$ Preuß. Fuß; dieses ist also der Weg, welchen der ausgesprochene Ton vom Sprecher bis zu der Ebene, von welcher der Ton abprallt, und von derselben zurück bis zum Sprecher oder Hörer macht, also die doppelte Entfernung des Echos; daher ist diese Entfernung $= 59{,}685$, also nahe 60 Preuß. Fuß; ist daher der, den Ton zurückprallende Gegenstand näher als 59,685 Fuß, so ist kein wahrnehmbares Echo möglich, weil der ausgesprochene Ton und der Wiederhall desselben sich in Einen Ton für das Gehör vereinigen.

Wie kommt es aber, daß ein feines Gehör in einem Saale, der nicht 60 Fuß lang ist, oder genauer, dessen keine Dimension 60 Fuß beträgt, dennoch ein Echo vernimmt? Die Ursache ist der mehrfache Wiederhall. Denn stehen z. B. zwei Gebäude parallel mit ihren Wänden einander gegenüber und ist ihre Distanz größer als 60 Fuß, so wird man ein mehrfaches Echo wahrnehmen; dasselbe ereignet sich in einem Saale; der nächste Wiederhall wird nicht, der Kürze der Zeit wegen, sondern erst der zweite vernommen. Hieraus erklärt sich auch der Nachhall der Orgel in einer geräumigen Kirche.

14. Jemand hat durch mehrfache Versuche mit Hilfe einer richtig gehenden Uhr ermittelt, daß sein Puls bei ruhigem Blute 72 Schläge in einer Minute macht. Bei Gelegenheit eines Gewitters nimmt er den Blitz wahr, und hört erst den Donner nach 108 seiner Pulsschläge. Wie weit ist die Gewitterwolke von ihm entfernt?

Da der Schall in einer Sekunde 1074,33 Fuß durchläuft, so muß er in 1 Minute $60 . 1074{,}33$, also während eines Pulsschlages $\frac{60}{72} . 1074{,}33$, und während 108 Pulsschlägen $\frac{108}{72} \cdot \frac{60}{1} . 1074{,}33 = 96\,689{,}7$ Fuß $=$ 4 Meilen 689,7 Fuß, die Meile zu 24 000 Preuß. Fuß gerechnet.

15. Man schleudert einen Körper mit bedeutender Kraft in die Höhe, und beobachtet die Zeit von seinem Aufsteigen bis zu seinem Niederfalle, und

Digitized by Google

hat dieselbe 15 Sekunden gefunden. Welche Höhe erreichte der Körper in seinem Aufsteigen?

Nach welchen Gesetzen ein Körper mit beschleunigter Geschwindigkeit niederfällt, nach denselben steigt er mit verzögerter Geschwindigkeit in die Höhe, d. h. der Körper hat in gleichen Höhen seines Auf- und Niedersteigens gleiche Geschwindigkeit; daher braucht er zum Aufsteigen dieselbe Zeit, welche er zum Niederfallen verwendet; folglich fällt er in der Hälfte der beobachteten Zeit nieder.

Da die beobachtete Zeit 15 Sekunden beträgt, so ist er $7\frac{1}{2}$ Sek. lang in die Höhe gestiegen und eben so lang herabgefallen. Setzt man nun den Fall eines Körpers in der ersten Sekunde $= 15{,}_{63}$ Fuß, so ist die gesuchte Höhe $= 7\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 15{,}_{63} = 879{,}_{18}$ Fuß.

16. Auf dem Gipfel des Aetna haben Reisende bemerkt, daß mancher Stein aus dem Krater desselben mit einer solchen Geschwindigkeit in die Höhe gestiegen sei, daß während seines Aufsteigens und Niederfallens 20 Sekunden und mehr verflossen sind. Welche Höhe erreichte ein solcher Stein?

$10 \cdot 10 \cdot 15{,}_{63} = 1563$ Fuß.

B. Flächenräume und die Zeit auf einander bezogen.

17. Wenn ein Feld von 5 Morgen in 2 Tagen bearbeitet wird, so wird welche Zeit erforderlich sein, um 8 Hufen 14 Morgen zu bestellen? 1 Hufe $= 30$ Morgen.

Welches Vielfache 8 Hufen 14 Morgen $= 254$ Morgen von 5 Morgen sind, dasselbe Vielfache muß die gesuchte Zeit von 2 Tagen sein; daher sind dazu $\frac{254}{5} \cdot 2 = 101\frac{3}{5}$ Tage erforderlich.

18. Ein Wirthschafter weiß aus Erfahrung, daß ein Mann einen Preuß. Morgen in einem Tage umpflügen kann; da er die Verwaltung von Landgütern erhalten kann, welche nach alten und neuen Kulmischen, nach Oletzkoischen, nach Schlesischen Morgen und nach verschiedenen Pommerschen Hufen rechnen, so will er im Voraus die Zeit berechnen, welche ein Arbeiter zum Umpflügen dieser Aecker gebraucht. Es ist nun 1 Preuß. Morgen $= 180$; 1 alter Kulm. Morgen $= 395{,}_{027}$; 1 neuer Kulm. Morgen $= 407{,}_{459}$; 1 Litthauischer Morgen $= 502{,}_{14}$; 1 Oletzkoischer Morgen $= 367{,}_{732}$; 1 Pomm. Hägerhufe $= 27\,709{,}_{8}$; 1 Pomm. Tripelhufe $= 20\,782{,}_{3}$; 1 Pomm. Landhufe $= 13\,854{,}_{9}$; 1 Pomm. Priesterhufe $= 9236{,}_{6}$; 1 Pomm. Hakenhufe $= 6927{,}_{4}$; und 1 Schles. Morgen $= 394{,}_{586}$ Preuß. Quadratruthen. Welche Zeit braucht also ein Mann zum Umpflügen dieser Aecker?

Durch die Schlüsse der vorigen Aufgabe werden die gesuchten Zeiten gefunden.

Zeit zum Umpflügen eines alten Kulm. Morgens $= \frac{395{,}_{027}}{180} = 2{,}_{1946}$ Tagen.

" " " " neuen " " $= \frac{407{,}_{459}}{180} = 2{,}_{26366}$ "

Digitized by Google

Zeit zum Umpflügen eines Oletzkoischen Morgens $= \frac{367,732}{180} = 2_{043}$ Tagen.

" " " einer Pomm. Hägerhufe $= \frac{27\,709,8}{180} = 153,943$ Tg.

" " " " " Tripelhufe $= \frac{20\,782,3}{180} = 115,457$ "

" " " " " Landhufe $= \frac{13\,854,9}{180} = 76,972$ "

" " " " " Priesterhufe $= \frac{9236,6}{180} = 51,314$ "

" " " " " Hakenhufe $= \frac{6927,4}{180} = 38,486$ "

" " " eines Schlesischen Morgens $= \frac{394,586}{180} = 2,192$ "

19. Ein Feld von 138 Ruthen Länge und 95 Ruthen Breite zu bearbeiten, brauchen gewisse Arbeiter 6 Tage; wie viele Tage werden dieselben Arbeiter gebrauchen, um ein Feld von 354 Ruthen Länge und 275 Ruthen Breite zu bestellen?

Durch Schlüsse löst man diese wie die vorige Aufgabe.

138° : 354° = 6 Tage : A (Tage für 354° Länge und 95° Breite)
95° : 275° = A : B (Tage für 354° Länge und 275° Breite)

19 : 165 = 6 Tage : B = $52\frac{2}{19}$ Tagen.

20. Eine Chaussee, 24 Fuß breit, 500 Ruthen weit zu führen, braucht eine gewisse Zahl Arbeiter 4 Wochen; wie weit werden dieselben Arbeiter eine Chaussee von 36 Fuß Breite in einem Vierteljahre oder 13 Wochen führen?

Wie vielfach 13 Wochen von 4 Wochen sind, eben so vielfach muß die gesuchte von der gegebenen Arbeit, also $\frac{13}{4}$. 24. 500. 12 Quadratfuß sein; und diese Fläche durch ihre eine Dimension, nämlich durch die gegebene Breite, dividirt, giebt die andere $= \frac{13}{4} \cdot \frac{24 \cdot 500 \cdot 12}{36} = 13000' = 1083$ Ruthen 4 Fuß.

36′ : 24′ = 500° : A (Länge für 4 Wochen bei 36′ Breite)
4 : 13 = A : B (Länge für 36′ Breite in 13 Wochen)

6 : 13 = 500° : B = $1083\frac{1}{3}$°.

21. Eine gewisse Zahl Arbeiter hat in 6 Wochen, da sie wöchentlich 5 Tage arbeiteten, eine Chaussee, die 27 Fuß breit ist, 684 Ruthen weit geführt; so werden dieselben Arbeiter in einem halben Jahre oder 26 Wochen, wenn sie wöchentlich 6 Tage arbeiten, eine Chaussee, die 32 Fuß breit ist, wie weit führen?

6 Wochen zu 5 Tagen sind 30 Tage; 26 Wochen zu 6 Tagen sind 156 Tage; daher die gesuchte Länge $= \frac{156}{30} \cdot \frac{27 \cdot 684 \cdot 12}{32} = 3601\frac{2}{5}$ Fuß $= 3001$ Ruthen $\frac{3}{5}$ Fuß.

6 W. : 26 W. = 684° : A (Länge für 27′ Breite in 26 W. zu 5 Tagen)
5 Tg. : 6 Tg. = A : B (" " " " " " " " 6 ")
32′ : 27′ = B : C (" " 32′ " " " " " " ")

20 : 351 = 171° : C = $3001\frac{1}{20}$ Ruthen.

Digitized by Google

22. 8 Mann können in 3 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten, eine Wiese von 162 Ruthen Länge und $26\frac{2}{3}$ Ruthen Breite abmähen; in wie vielen Tagen werden sie eine Wiese von 324 Ruthen Länge und 205 Ruthen Breite abmähen, wenn sie täglich 16 Stunden arbeiten?

Welches Vielfache die zweite Arbeit von der ersten ist, dasselbe Vielfache muß die zweite Zeit von der ersten sein. Die zweite Arbeit $324 . 205$ Quadratruthen, die erste $162 . 26\frac{2}{3}$ □Ruthen und die erste Zeit ist $3 . 12$ Stunden; daher ist die gesuchte Zeit $= \frac{324 . 205 . 3 . 12}{162 . 26\frac{2}{3}}$ Stunden, und diese durch 16 Stunden dividirt, giebt die Zahl der Tage $= \frac{324.205.3.12.3}{162.80.16}$ $= 34\frac{19}{32}$.

23. An einer Chaussee, die 42 Fuß breit und 1500 Ruthen lang ist, haben 36 Mann 16 Wochen, wöchentlich 5 Tage, und täglich 12 Stunden gearbeitet; dieselben Arbeiter sollen eine Chaussee von 36 Fuß Breite in 9 Wochen zu Stande bringen, und daher arbeiten sie wöchentlich 6 Tage, täglich 16 Stunden. Wie lang war die Chaussee?

Welches Vielfache die zweite Zeit von der ersten ist, dasselbe Vielfache muß die zweite Arbeit von der ersten sein.

Die zweite Zeit ist $9 . 6 . 16$ Stunden, die erste $16 . 5 . 12$ Stunden, und die dazu gehörige Arbeit $42 . 1500 . 12$ □Fuß; also ist die gesuchte Arbeit $= \frac{9 . 6 . 16}{16 . 5 . 12} . 42 . 1500 . 12$ □Fuß; diese durch die gegebene Breite $= 36$ Fuß dividirt, giebt die gesuchte Länge $= \frac{9 : 6 : 16}{16 . 5 . 12 . 36} . 42 . 1500 . 12 =$ 18 900 Fuß $= 1575$ Ruthen.

Anmerk. Vorstehende Aufgabe enthält 10 Stücke, nämlich die Bedingung enthält 5, Wochen, Tage, Stunden, Breite und Länge der Chaussee, das Bedingte enthält eben so viele Stücke, deren eins, hier die Länge, gesucht wurde. Da nun jedes dieser Stücke gesucht werden kann, wenn die übrigen gegeben sind, so kann man aus derselben im Ganzen 10 Aufgaben bilden. Man wird den Zusammenhang derselben desto leichter übersehen, wenn man sie hier, wie folgt, zusammenstellt:

Bedingung: Chaussee 42′ breit, 1500° lang, Zeit 16 W. zu 5 Tg. zu 12 St.
Bedingtes: „ 36′ „ 1575° „ „ — „ 6 „ „ 16 „

Der Strich zeigt das Gesuchte, also hier die Wochen an.

42′	: 36′	= 16 W.	: A	(Wochen für 36′ B., 1500° L., die W. zu 5 T. zu 12 St.)
1500°	: 1575°	= A	: B	(Wochen zu 5 T. zu 12 St. für 36′ Br. 1775° L.)
6	: 5	= B	: C	(„ „ 6 „ „ „ „ „ „ „ „ „
16	: 12	= C	: D	(„ „ „ „ „ 16 „ „ „ „
1	: 9	= 1	: D	= 9 Wochen.

Die übrigen Kombinationen wird Jeder machen können.

C. Körperräume und die Zeit auf einander bezogen.

24. Gewisse Arbeiter haben 6 Wochen, wöchentlich 4 Tage und täglich 10 Stunden an einem Graben, der 120 Ruthen lang, 6 Fuß tief, oben 9 Fuß und unten 4 Fuß breit ist, gearbeitet: so werden dieselben Arbeiter in 15 Wochen, wenn sie wöchentlich 6 Tage und täglich 14 Stunden arbeiten, einen

Digitized by Google

Graben, der 8 Fuß tief, oben 14 Fuß und unten 8 Fuß breit sein soll, wie viele Ruthen weit führen?

Welches Vielfache die zweite Zeit von der ersten ist, dasselbe Vielfache muß die dazugehörige Arbeit von der ersten sein. Nun ist die zweite Angabe der Zeit $= 15 . 6 . 14$ Stunden, die erste $= 6 . 4 . 10$ Stunden; die erste Arbeit $= 120 . 12 . 6 . \frac{13}{2}$ Kubikfuß; daher ist die gesuchte Arbeit $= \frac{15 . 6 . 14}{6 . 4 . 10} . 120 . 12 . 6 . \frac{13}{2}$ Kubikfuß.

Da der kubische Inhalt eines Körpers gleich dem Produkte seiner 3 Dimensionen ist, so wird man die eine Dimension desselben erhalten, wenn man seinen Inhalt durch das Produkt seiner beiden andern Dimensionen dividirt. Der Querdurchschnitt des zweiten Grabens ist $8 . \frac{14+8}{2} = 8 . 11$ □Fuß; folglich ist die gesuchte Länge $= \frac{15 . 6 . 14 . 120 . 12 . 6 . 13}{6 . 4 . 10 . \quad 8 . 11 . 2} = 3350\frac{5}{11}$ Fuß $= 279$ Ruthen $2\frac{5}{11}$ Fuß.

25. Die erste Bedingung ist die der vorigen Aufgabe. Wie lange werden dieselben Arbeiter an einem Graben zu thun haben, der 280 Ruthen lang, 8 Fuß tief, oben 12 Fuß und unten 6 Fuß breit, wenn sie wöchentlich 6 Tage und täglich 13 Stunden arbeiten?

Durch Schlüsse wird die Aufgabe wie die vorige gelöst.

Zeit: 6 W. zu 4 T. zu 10 St. Graben: 120° lang, 6′ tief, $\frac{13}{2}$′ mittl. Breite,
» — » 6 » » 13 » » 280° » 8′ » 9′ » »

6 Tg. : 4 Tg. = 6 W. : A (Wochen zu 6 T. zu 10 St. für 120° L. 6′ T. $\frac{13}{2}$′ m. B.)
13 St : 10 St = A : B (» » » » 13 » » » » » »)
120° : 280° = B : C (» » » » » » 280° » » »)
6′ : 8′ = C : D (» » » » » » » 8′ » »)
$\frac{13}{2}$′ : 9′ = D : E (» » » » » » » » 9′ »)

169 : 1120 = 2 : E $= 13\frac{43}{169}$ Wochen = 13 Wochen 1 Tag 6 Stunden $5\frac{10}{13}$ Minuten.

26. Ein Gefäß hat zwei Röhren; durch die eine Röhre kann das mit Wasser vollgefüllte Gefäß in 2 Stunden, durch die andere in 6 Stunden geleert werden; in welcher Zeit werden beide Röhren, wenn sie gleichzeitig fließen, das Gefäß leeren?

Durch die erste Röhre fließt in einer Stunde $\frac{1}{2}$, durch die andere in derselben Zeit $\frac{1}{6}$ des Gefäßes Wasser heraus; fließen also beide gleichzeitig, so wird in einer Stunde $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ des Gefäßes geleert. Wie vielfach nun das ganze Gefäß von seinen $\frac{2}{3}$ ist, eben so viele Stunden sind zum Leeren desselben erforderlich; also $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ Stunden.

27. Eine Cisterne wird durch eine Röhre in 4 Stunden 30 Minuten, durch eine andere in 5 Stunden 20 Minuten und durch eine dritte in 6 Stunden 40 Minuten gefüllt; welche Zeit werden die 3 Röhren, wenn sie gleichzeitig fließen, gebrauchen, um die leere Cisterne zu füllen? (Cisterna ein unterirdisches Behältniß für Regenwasser.)

Digitized by Google

4 St. 30′ = $4\frac{1}{2}$ St., 5 St. 20′ = $5\frac{1}{3}$ St., 6 St. 40′ = $6\frac{2}{3}$ St. In einer Stunde wird durch die erste Röhre $\frac{1}{4\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$, durch die zweite Röhre $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, und durch die dritte Röhre $\frac{1}{6\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}$ der Cisterne gefüllt; fließen also die 3 Röhren gleichzeitig, so wird in einer Stunde $\frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{20} = \frac{403}{720}$ der Cisterne gefüllt; damit sie also voll werde, sind dazu $1 : \frac{403}{720} = \frac{720}{403} = 1$ St. 47′ $11\frac{307}{403}$″ erforderlich.

28. Ein Bassin hat zwei Röhren; die eine Röhre kann dasselbe in 8 Tagen (zu 24 Stunden) 15 Stunden 45 Minuten, die andere dasselbe in 6 Tagen 18 Stunden 48 Minuten leeren; durch die erste Röhre ist das Wasser bereits 2 Tage 6 Stunden geflossen, als die zweite Röhre geöffnet wird; in welcher Zeit, seit der Oeffnung der ersten Röhre, wird das Bassin leer sein?

8 Tage zu 24 Stunden sind 8 . 24 = 192 Stunden, dazu noch $15\frac{3}{4}$ Stunden = $207\frac{3}{4}$ Stunden; daher leert die erste Röhre in einer Stunde $\frac{1}{207\frac{3}{4}} = \frac{4}{831}$ des Bassins, also in 2 Tagen 6 St. oder 54 Stunden $\frac{54 \cdot 4}{831} = \frac{72}{277}$ desselben; daher bleiben noch $\frac{205}{277}$ des Bassins zum Leeren übrig.

Die zweite Röhre leert das ganze Bassin in 6 Tagen 18 Stunden 48′ = $162\frac{4}{5}$ Stunden; also in 1 Stunde $\frac{1}{162\frac{4}{5}} = \frac{5}{814}$ desselben; fließen also beide Röhren gleichzeitig, so leeren sie in jeder Stunde $\frac{4}{831} + \frac{5}{814} = \frac{7411}{831 \cdot 814}$; daher gebrauchen sie noch $\frac{205}{277} : \frac{7411}{831 \cdot 814} = \frac{205}{277} \cdot \frac{831 \cdot 814}{7411} = \frac{205 \cdot 3 \cdot 814}{7411}$ Stunden = 67 Stunden 32′ $58\frac{842}{7411}$″.

29. Ein Wasserbehälter von Gestalt eines Cylinders hat zum innern Durchmesser eine Länge = 12 Fuß, zur Höhe 8 Fuß, und zwei Röhren, deren eine in jeder Minute 25 Kubikfuß Wasser zuführt, und deren andere in derselben Zeit 18 Kubikfuß ableitet.

1) Welche Zeit wird die erste Röhre brauchen, den Behälter zu füllen?

2) Welche Zeit braucht die zweite Röhre, den vollen Behälter zu leeren?

3) In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn beide Röhren gleichzeitig thätig sind?

4) Wenn die erste Röhre bereits 10 Minuten geflossen hat, ehe die zweite geöffnet wird, in welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein?

Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Höhe und Grundfläche; seine Grundfläche ist ein Kreis, dessen Inhalt gleich dem Produkte aus dem Quadrate seines Halbmessers und der Zahl $\pi = 3{,}14159$ ist; sein Durchmesser = 12, also sein Halbmesser = 6, also ist dieser Kreis = 6 . 6 . 3,14159; daher der Inhalt des Cylinders = 8 . 6 . 6 . 3,14159 = 904,77792 Kubikfuß.

1) Da nun die erste Röhre in jeder Minute 25 Kubikfuß Wasser liefert, so braucht sie $\frac{904{,}77792}{25} = 36{,}191117' = 36'\ 11{,}47''$.

Digitized by Google

2) Die zweite Röhre leert den vollen Behälter in $\frac{904,_{77792}}{18} = 50,_{26544}' = 50'\ 15,_{9264}''$.

3) Fließen beide Röhren gleichzeitig, so bringt die erste Röhre in jeder Minute 25, die zweite führt in derselben Zeit 18 Kubikfuß Wasser hinweg, also bleiben während einer Minute nur 7 Kubikfuß Wasser im Behälter, daher wird er in $\frac{904,_{77792}}{7} = 129,_{25399}' = 2$ St. $9'\ 15,_{2394}''$ gefüllt.

4) In 10 Minuten hat die erste Röhre $10 . 25 = 250$ Kubikfuß Wasser in den Behälter hineingebracht, und daher fehlen dem Behälter noch bis zu seiner Vollfüllung $654,_{77792}$ Kubikfuß; also müssen seit dieser Zeit beide Röhren gleichzeitig noch $\frac{654,_{77792}}{7} = 93,_{5397}' = 1$ Stunden $33'\ 32,_{382}''$ fließen, bis der Behälter voll ist.

30. Ein Gefäß hat zwei Röhren, aus welchen das Wasser mit ungleicher Geschwindigkeit fließt. Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie 5 zu 6, die Größen ihrer Oeffnungen wie 8 zu 9; während 10 Minuten sind aus der einen Röhre 98 Kubikfuß Wasser mehr als aus der andern herausgeflossen; beide Röhren füllen das Gefäß in 36 Minuten bei gleichzeitiger Thätigkeit. 1) Wie viel Wasser liefert jede Röhre in 10 Minuten? 2) Wie viele Kubikfuß faßt der Behälter? 3) In welcher Zeit kann jede Röhre allein den Behälter füllen?

Da sich die Geschwindigkeiten der Wasserströme wie 5 zu 6 verhalten, so heißt dieses: während durch einen Raumtheil der einen Röhre 5 Theile Wasser herausfließen, fließen in derselben Zeit durch einen eben so großen Raumtheil der andern Röhre 6 eben so großer Wassertheile heraus. Da sich nun die Oeffnungen der Röhren wie 8 zu 9 verhalten: so hat die Oeffnung der einen Röhre 8 und die der andern 9 eben so großer Raumtheile; daher fließen aus der ersten Röhre $8 . 5$ oder 40 und aus der andern während derselben Zeit $9 . 6$ oder 54 Wassertheile von gleicher Größe heraus; folglich verhalten sich die in gleichen Zeiten aus den Röhren herausgeflossenen Wassermassen wie $40 : 54 = 20 : 27$; daher hat die Wassermasse der ersten Röhre das 20- und die der andern das 27fache einer gewissen Quantität, die zweite Röhre liefert also in 10 Minuten das 7fache dieser Quantität $=$ 98 Kubikfuß Wasser mehr als die erste; daher das Einfache $= 14$ Kubikfuß.

1) Die erste Röhre liefert also in 10 Minuten das 20fache $= 20 . 14 = 280$, und die zweite in derselben Zeit $= 27 . 14 = 378$ Kubikfuß Wasser.

2) Da beide Röhren gleichzeitig fließend in $10'\ 280 + 378 = 658$ Kubikfuß Wasser geben, und sie den Behälter in $36'$, also in $3,_6 . 10'$ füllen, so enthält er $3,_6 . 658 = 2368,_8$ Kubikfuß.

Digitized by Google

3) Da die erste Röhre in 10′ 280 Kubikfuß giebt, und das Gefäß 2368,8 Kubikfuß in sich aufnimmt, so braucht sie $\frac{2368,8}{280} \cdot 10' = 84\frac{3}{5}$ Minuten zur Füllung des Behälters.

Die zweite Röhre liefert in 10 Minuten 378 Kubikfuß, also wird sie den Behälter in $\frac{2368,8}{378} \cdot 10' = 62\frac{2}{3}$ Minuten füllen.

31. Zwei Sackträger A, B tragen von einem Speicher Weizen in ein zu befrachtendes Schiff. 8 Säcke des A sind gleich 9 Säcken des B, A macht in 10 Minuten 3, B in 10 Minuten 5 Gänge; A hat schon 12 Gänge gemacht, als B zu tragen anfängt.

1) Wie viele Gänge muß B machen, bis er eben so vielen Weizen als A in das Schiff gebracht hat, und in welcher Zeit geschieht dieses?

2) Wenn ein Sack des A 4 Scheffel hält; wie viele Scheffel hat jeder in einer Stunde getragen?

1) Da 8 Säcke des A = 9 Säcken des B sind, so ist 1 Sack des A $= \frac{9}{8}$ Säcken des B, also trägt A mit 3 Gängen $3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$ Säcke des B; in derselben Zeit macht B 5 Gänge; daher trägt er in dieser Zeit 5 seiner Säcke, also $5 - \frac{27}{8} = \frac{13}{8}$ seiner Säcke mehr als A in derselben Zeit. Nun hat A während der Zeit, daß er allein trug, 12 Gänge gemacht, und folglich $12 \cdot \frac{9}{8} = 13\frac{1}{2}$ Säcke des B weggeschafft; will B diese Masse nachholen, so muß er also $13\frac{1}{2} : \frac{13}{8} = 8\frac{4}{13}$ mal 5 Gänge $= 41\frac{7}{13}$ Gänge machen, bis er so viel als A weggetragen hat; und zwar in $8\frac{4}{13} \cdot 10 = 83\frac{1}{13}$ Min.

Probe. Während B 5 Gänge macht, thut A 3; da nun B $41\frac{7}{13}$ Gänge gemacht hat, so muß A in derselben Zeit $\frac{3}{5} \cdot 41\frac{7}{13} = 24\frac{13}{13}$ Gänge gemacht haben, und weil A mit jedem Gange $\frac{9}{8}$ Säcke des B wegschafft, so hat er in dieser Zeit $\frac{9}{8} \cdot 24\frac{13}{13} = 28\frac{1}{16}$ Säcke des B getragen. Rechnet man nun noch die 12 seiner Gänge, welche er vor B trug, und die $12 \cdot \frac{9}{8} = 13\frac{1}{2}$ Säcke des B sind, hinzu, so ist die ganze Masse, welche A hinweggetragen hat $= 28\frac{1}{16} + 13\frac{1}{2} = 41\frac{7}{13}$ Säcke des B; also haben beide gleichviel getragen.

2) Da ein Sack des A 4 Scheffel halten soll, so hat er in 10 Minuten $3 \cdot 4 = 12$ Scheffel und in einer Stunde $6 \cdot 12 = 72$ Schffl. getragen.

Ein Sack des $B = \frac{8}{9}$ des A, also 1 Sack des $B = \frac{8}{9} \cdot 4$ Scheffel; also 5 Säcke des $B = 5 \cdot \frac{8}{9} \cdot 4$ Scheffel, welche er in 10 Minuten fortschafft; daher trägt er in einer Stunde $6 \cdot 5 \cdot \frac{8}{9} \cdot 4 = 106\frac{2}{3}$ Scheffel.

Anmerk. Vorstehende Aufgabe kann man auch so auflösen.

Die Größen der Lasten von A und B stehen im Verhältnisse von 9 : 8,
ihre Geschwindigkeiten • • • 3 : 5;

also stehen die Massen, welche sie in gleichen Zeiten fortschaffen, im Verhältnisse von 27 : 40; A trägt also in der Zeit das 27fache einer gewissen Quantität, in welcher B das 40fache derselben Quantität wegbringt, dieser also das 13fache mehr als jener; und weil A 12 seiner Säcke oder $12 \cdot \frac{9}{8}$ Säcke des B vor diesem getra-

Digitized by Google

gen hat, so muß das 13fache $= 12 . \frac{9}{8}$, also das Einfache $= \frac{108}{13 . 8} = \frac{27}{26}$ sein; daher das 40fache $= \frac{40 . 27}{26} = 41\frac{7}{13}$ Säcke des B, und eben so viele Gänge hat er also auch zu machen, bis er so viel als A getragen hat. Dieser trägt aber in eben der Zeit $27 . \frac{27}{26}$ Säcke des B oder $27 . \frac{27}{26} . \frac{8}{9}$ seiner Säcke $= 24\frac{12}{13}$ seiner Säcke ꝛc.

32. Zwei Spazirgänger unterhalten sich über die Wege, welche sie gemacht haben und A sagt zu B: wie kommt es, daß Du mir um 4500 Fuß vorgeeilt bist, ungeachtet ich doppelt so große Schritte als Du machte? Das räume ich ein, erwiedert B, doch ich machte 8 Schritte, während Du nur 3 machtest. Wenn nun jeder Spazirgänger eine Stunde auf seinem Wege zubrachte; welchen Weg machte jeder während dieser Zeit, und in welcher Zeit wird jeder eine Meile von 24 000 Fuß zurücklegen? Ferner: wie groß war der Schritt jedes, wenn A 2700 Schritte machte?

Das Verhältniß der Größen ihrer Schritte $= 2 : 1$;

» » » ihrer Geschwindigkeiten $= 3 : 8$; daher das Verhältniß ihrer Wege $3 : 4$; da nun B 4500′ mehr als A gemacht hat, so ist der Weg des A $= 3 . 4500 = 13\,500'$; der Weg des B $= 4 . 4500 = 18\,000'$.

Zum Gehen einer Meile braucht also A $\frac{24000}{13500} . 1$ Stunde $= 1\frac{7}{9}$ Stunden $= 1$ St. 46′ 40″, B $\frac{24000}{18000} . 1$ St. $= 1$ St. 20′.

Ein Schritt des A $= 5'$, einer des B $= 2\frac{1}{2}$ Fuß, und A brauchte zu jedem Schritte $1\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{2}$ Sekunde.

33. Zwei Maurer arbeiten an verschiedenen Mauern, A an einer, die $1\frac{1}{2}$ Fuß dick, B an einer, die 1 Fuß dick sein soll; während A seine Mauer 2 Fuß in die Höhe und 3 Fuß in die Länge führt, hat B seine Mauer 3 Fuß in die Höhe und 5 Fuß in die Länge geführt; braucht jeder zu seiner Arbeit 1 Stunde; wann wird B 300 Kubikfuß mehr als A aufgeführt haben?

A macht in der Zeit $1\frac{1}{2} . 2 . 3 = 9$ Kubikfuß, während B $1 . 3 . 5 = 15$ Kubikfuß macht; daher macht B in jeder Stunde 6 Kubikfuß mehr als A, folglich wird er in $\frac{300}{6} = 50$ Stunden das Gefragte geleistet haben.

34. Ein Wasserbehälter hat 2 Röhren; während die eine 2 und die andere 3 Stunden floß, gaben sie zusammen 420 Kubikfuß Wasser. Zu einer andern Zeit floß die erste 5 und die andere 4 Stunden, und beide lieferten zusammen 770 Kubikfuß Wasser. Wie viele Kubikfuß lieferte jede Röhre in einer Stunde? (Fig. 74.)

Sei Aa das, was die erste Röhre in einer Stunde liefert, und Ba $=$ aA, so ist AB das, was die erste Röhre in 2 Stunden giebt.

Bb sei die Quantität, welche die zweite Röhre in einer Stunde bringt, und Cc $=$ cb $=$ bB, so ist BC das, was die zweite Röhre in 3 Stunden giebt; daher AC $= 420$ Kubikfuß.

Mache DE $=$ dem 5fachen von Aa, so ist DE der Zufluß durch die erste Röhre in 5 Stunden, und EF $=$ dem 4fachen von Bb, so ist EF

Digitized by Google

der Zufluß durch die zweite Röhre in vier Stunden; also DF = 770 Kubikfuß.

I. Sei nun GH das 5fache von AB, und HI das 5fache von BC, so ist GI = dem 5fachen von AC = 5 . 420 = 2100 Kubikfuß Wasser.

Mache KL = dem 2fachen von DE und LM = dem 2fachen von EF; so ist KL = dem 2fachen von DF = 2 . 770 = 1540 Kubikfuß Wasser.

Da GH = dem 5fachen von AB, und AB = dem 2fachen von Aa ist: so ist GH = 5 . 2 = 10 mal Aa.

KL = dem 2fachen von DE, DE = dem 5fachen von Aa, also KL = 2 . 5 = 10 mal Aa; folglich ist GH = KL.

Da HI = dem 5fachen von BC und BC = dem 3fachen von Bb, so ist HI = dem 5 . 3 = dem 15fachen von Bb.

Ferner ist LM = dem 2fachen von EF, EF = dem 4fachen von Bb; so ist LM = 2 . 4 = dem 8fachen von Bb; daher ist HI um das 15 — 8- oder um das 7fache von Bb größer als LM. Weil nun GH = KL, so ist GI um das größer als KM, um was HI größer als LM ist; aber GI um 2100 — 1540 oder um 560 größer als KM, und HI um das 7fache von Bb größer als LM; daher ist das 7fache von Bb = 560, also Bb = 80 Kubikfuß Wasser.

Hieraus folgt, daß BC = 3 . 80 = 240; daher AB = 420 weniger 240 = 180 = dem 2fachen von Aa; also Aa = 90 Kubikfuß Wasser.

Die erste Röhre gab also in einer Stunde 90, die zweite in derselben Zeit 80 Kubikfuß Wasser.

II. Man nehme $\frac{1}{2}$ von AB = Aa, und $\frac{1}{2}$ von BC = $1\frac{1}{2}$ Bb, so hat man $\frac{1}{2}$ von AC = 210.

Nun nehme man $\frac{1}{5}$ von DE = Aa, und $\frac{1}{5}$ von EF = $\frac{4}{5}$ Bb; also hat man $\frac{1}{5}$ von DF = 154.

Es ist nun $\frac{1}{2}$ von AC um 210 — 154 = 56 größer als $\frac{1}{5}$ von DF; und $1\frac{1}{2}$ Bo um $1\frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$ Bb größer als $\frac{4}{5}$ Bb: daher sind $\frac{7}{10}$ Bb = 56; also Bb = 80. Folglich Aa = 210 — $1\frac{1}{2}$. 80 = 90. Die erste Röhre giebt daher 90, die zweite 80 Kubikfuß Wasser in einer Stunde.

35. Zwei Träger A, B tragen Getreide auf einen Speicher; während A 3 Stunden und B 4 Stunden trug, hatten sie beide zusammen 132 Schffl. getragen; am andern Tage trug A 5 Stunden und B 7 Stunden, und in dieser Zeit brachten beide zusammen 225 Scheffel auf den Speicher. Wie viele Scheffel trug jeder in einer Stunde? (Fig. 75.)

Sei Aa das, was A in einer Stunde trägt, und AB = 3 Aa, B trage in einer Stunde eine Masse = Bb, und BC = 4 Bb, so ist BC das, was B in 4 Stunden trägt; daher AC = 132 Scheffeln. Mache DE = 5 Aa, EF = 7 Bb, so ist DE das, was A in 5 und EF das, was B in 7 Stunden auf den Speicher bringt; also ist DF = 225 Scheffeln.

Digitized by Google

Es ist nun AB : DE = 3 : 5; mache GH = DE, und nimm HI so, daß BC : HI = 3 : 5 sei, so ist AC : GI = 3 : 5. Nun ist AC = 132, also 132 : GI = 3 : 5, daher GI = $\frac{5}{3}$. 132 = 220; daher GI um 5 kleiner als DF.

Weil BC : HI = 3 : 5, und BC = 4Bb, so ist 4Bb : HI = 3 : 5, also HI : $\frac{4}{3}$. 4Bb = 6$\frac{2}{3}$Bb; daher HI um $\frac{1}{3}$Bb kleiner als EF; also ist $\frac{1}{3}$Bb = 5; folglich Bb = 3 . 5 = 15. Da nun Bb = 15, so ist BC = 4 . 15 = 60; folglich ist AB = 132 − 60 = 72 = 3Aa, also Aa = 24.

Es hat also A 24 und B 15 Scheffel in einer Stunde getragen.

Anmerk. Aehnliche Aufgaben wird man auf ähnliche Weise lösen können. Vorzüglich empfehle ich aber die letzte Auflösung zur Uebung: denn diese verlangt nur eine Hilfsgröße GI und stellt den Satz auf: wenn jede zweier Größen AB, BC, in demselben Verhältnisse (3 : 5) wächst, so ist ihre Summe, AC, in demselben Verhältnisse (3 : 5) gewachsen (AC : GI = 3 : 5).

IV. Beziehungen zwischen dem Gewichte und dem Gelde.

Die Gewichte sind Maße der Schwere der Körper, und da die Schwere eine Kraft ist, so können auch die Gewichte als Maße der Kräfte dienen. Die Kräfte aber, welche in Ausübung treten, sind entweder die lebloser oder lebender Dinge; die leblosen Dinge, welche Kräfte ausüben, sind allerlei Maschinen, die lebenden Wesen aber sind entweder Thiere oder Menschen. Werden die Gewichte nur als Maße der Schwere betrachtet, so dienen sie zur Bestimmung der Größe einer Waare; sie werden aber auch zur Bestimmung der Größe der Münzen gebraucht, und daher gewähren sie auch ein Mittel zur Bestimmung des Werthes der Münzen.

Das Geld aber kann hier entweder selbst als Waare oder als das Maß des Werthes der Dinge betrachtet werden.

1. Wenn ein Pfund Zucker 6$\frac{2}{3}$ Sgr. kostet, wie theuer ist ein Loth, ein Centner von diesem Zucker?

1 Loth = $\frac{1}{32}$ ℔ = $\frac{1}{32}$. 6$\frac{2}{3}$ = $\frac{5}{24}$ Sgr. = 2$\frac{1}{2}$ ℔.

1 Centn. = 110 ℔ = 110 . 6$\frac{2}{3}$ Sgr. = 110 . $\frac{1}{6}$ ℛ + 73$\frac{1}{3}$ Sgr. = 24 ℛ 13 Sgr. 4 ℔.

2. Ein Pfund Zucker kostet 6 Sgr., wie viel erhält man für 1 Sgr., 15 Sgr, 3 Thlr. 8 Sgr.?

1 Sgr. = $\frac{1}{6}$ von 6 Sgr.; also muß man für 1 Sgr. $\frac{1}{6}$ ℔ = $\frac{32}{6}$ Lth. = 5$\frac{1}{3}$ Loth = 5 Loth 1$\frac{1}{3}$ Quentchen erhalten.

Für 15 Sgr. erhält man also $\frac{15}{6}$ ℔ = 2 ℔ 16 Loth.

Für 1 ℛ muß man $\frac{30}{6}$ ℔ = 5 ℔; daher für 3 ℛ 8 Sgr. 3 . 5 ℔ und $\frac{8}{6}$ ℔ = 16 ℔ 10$\frac{2}{3}$ Loth erhalten.

Anmerk. Krämer haben keine kleinern Gewichte als Quentchen, folglich können auch keine Brüche von Quentchen abgewogen werden, und daher wird jeder Käufer

Digitized by Google

sich selbst den Nachtheil zuzuschreiben haben, wenn er ein geringeres Gewicht der Waare erhält, als es nach dem Geldwerthe sein sollte, indem er für Geld ein Gewicht verlangt, das nicht abgewogen werden kann. In den wenigsten Fällen wird ein Krämer Quentchen zum Wägen gebrauchen, schon Lothe verursachen viele Mühe; daher kann man in allen Fällen, selbst bei sehr genau gewogenen Waaren, nur ganze Lothe rechnen.

3. Kostet ein Pfund Zucker 6 Sgr. und erhält man für 1 Sgr. 5 Loth Zucker; wie viele Procente Verlust hat man dabei?

Für 1 Sgr. muß man $5\frac{1}{3}$ Loth erhalten, und da man nur 5 Lth. erhält, so hat man einen Verlust von $\frac{1}{3}$ Lth.

Nun ist die Frage, ob man die Proc. von $5\frac{1}{3}$ oder von 5 Lth. rechne? An 5 Lth. leidet man nicht, wohl aber an $5\frac{1}{3}$ Lth., weil man anstatt dessen nur 5 Lth. erhält; daher müssen die Proc. von $5\frac{1}{3}$ Lth. gerechnet werden; da nun $\frac{1}{3}$ Lth. $= \frac{\frac{1}{3}}{5\frac{1}{3}} = \frac{1}{16}$ ist, so betragen die Proc. $\frac{1}{16} . 100 = 6\frac{1}{4}\,\%$.

Würde man die % von 5 Lth. gerechnet haben, so würde der Verlust $\frac{1}{15} . 100 = 6\frac{2}{3}\,\%$ sein.

Es ist nothwendig, bei Berechnungen der Procente des Gewinnes und Verlustes genau zu wissen, von welcher Quantität man die % zu suchen habe, daher betrachte ich die Sache hier etwas genauer.

Es ist klar, daß die Waare, welche man erhalten soll, gleich der Waare sein muß, welche man wirklich erhält, nebst dem Verluste. Hat also die zu erhaltende Waare 100 Theile, so muß die wirklich erhaltene Waare und der Verlust zusammen auch 100 Theile haben; daher muß der Verlust von der Waare gerechnet werden, welche man von Rechtswegen erhalten soll.

Machen wir diesem Satze gemäß die Probe obiger Rechnung, so geben 5 Lth. $= \frac{5}{5\frac{1}{3}} = \frac{15}{16}$ Lth. $= \frac{15}{16} . 100 = 93\frac{3}{4}\,\%$, und dazu der Verlust $= 6\frac{1}{4}\,\%$, macht zusammen 100 % oder den ganzen Betrag der von Rechtswegen zu erhaltenden Waare.

Hieraus können wir nun umgekehrt schließen: hat man an einer Waare $6\frac{1}{4}$ % Verlust, so wird man anstatt der zu erhaltenden 100 nur $100 - 6\frac{1}{4} = 93\frac{3}{4}$ erhalten. Beispiele zur Rechnung werden sich in der Folge darbieten, im bürgerlichen Verkehre treten sie sehr häufig hervor; ich aber werde mich auf das oben Gesagte beziehen.

4. Jemand hat den Centner einer Waare mit 69 Thlr. 20 Sgr. bezahlt; durch den Transport hat sie aber so sehr gelitten, daß er dieselbe mit einem Verluste von $6\frac{15}{16}$ Procent verkaufen muß. Wie theuer verkauft er das Pfund der Waaren?

Digitized by Google

Man kann nun entweder zuerst den Verkaufspreis eines Centners und dann den eines Pfundes, oder zuerst den Einkaufspreis eines Pfundes und dann den Verkaufspreis desselben berechnen.

1 ℔ $= \frac{1}{110}$ von 1 Centn. $= \frac{1}{110}$ von 69 Thlr. 20 Sgr. $= \frac{1}{110} \times 2090$ Sgr. $= 19$ Sgr., Einkaufspreis eines Pfundes.

Da nun der Verlust $15\frac{1}{19}$ % beträgt, so erhält er für jede 100, die er gegeben hat, nur $100 - 15\frac{1}{19} = 84\frac{4}{19}$.

Es ist nun 1 % von 19 Sgr. $\frac{19}{100}$; also $84\frac{4}{19}$ % $= \frac{19 \cdot 84\frac{4}{19}}{100} = \frac{1600}{100} = 16$, also verkauft er 1 ℔ für 16 Sgr.

5. Das Pfd. Zucker kostet 6 Sgr., kauft man aber im Großen, so kommt ein Pfund billiger zu stehen. Jemand kauft 3 Hut Zucker, der eine wiegt 23 Pfd. 8 Lth., der andere 24 Pfd. 4 Lth. und der dritte 23 Pfd. 26 Loth. Er zahlt dafür 13 Thlr. 13 Sgr. $4\frac{3}{4}$ Pf. Wie theuer hat er ein Pfund bezahlt und wie viele Procente Gewinn hat er durch den Einkauf im Großen?

Die 3 Hut Zucker wiegen zusammen 71 ℔ 6 Lth. $= 71\frac{3}{16}$ ℔, welche 13 Thlr. 13 Sgr. $4\frac{3}{4}$ Pf. kosten, folglich kostet 1 ℔ $= \frac{1}{71\frac{3}{16}}$ von der genannten Summe $= \frac{16}{1139} \times (403$ Sgr. $4\frac{3}{4}$ Pf.). $\frac{16}{1139} \cdot 403$ Sgr. $= 5$ Sgr. $+ 7\frac{1093}{1139}$ Pf.; $\frac{16}{1139} \cdot 4\frac{3}{4}$ Pf. $= \frac{76}{1139}$ Pf.; das macht zusammen 5 Sgr. 8 Pf.

Der Gewinn beträgt also an einem Pfunde 4 Pf. $= \frac{1}{3}$ Sgr. Will man nun die % des Gewinnes berechnen, so muß dieser in Bezug auf den Preis eines Pfundes $= 6$ Sgr. genommen werden. Es ist nun $\frac{1}{3}$ Sgr. $= \frac{1}{6}$ von 6 Sgr., also beträgt der Gewinn $\frac{1}{6} \cdot 100 = 5\frac{5}{9}$ %.

6. Ein Kaufmann hat den Centner einer Waare mit 102 Thlr. 20 Sgr. bezahlt; das Pfund derselben verkauft er mit 25 % Gewinn; wie viel nimmt er also für ein Pfund?

Der Einkaufspreis eines Pfundes $= \frac{1}{110}$ von 102 ℳ 20 Sgr. $= \frac{1}{110} \cdot 3080$ Sgr. $= 28$ Sgr.

Weil nun der Gewinn 25 % beträgt, so muß er an jede 100, die er gegeben hat, 25 gewinnen, also 125 erhalten; daher nimmt er für jedes Pfd. $\frac{125}{100} \cdot 28 = \frac{5}{4} \cdot 28 = 35$ Sgr. $= 1$ ℳ 5 Sgr.

7. Berlin rechnet Netto-Tara 10 Proc. bei Kaffee, Rüböl, Talg, Rosinen, Bordeauxer und Engl. Syrup und Schwefel in Kisten. Ein Kaufmann bedingt den Centner Nettogewicht von Kaffee mit 24 Thlr., von Rüböl mit 9 Thlr. 5 Sgr., von Talg mit 10 Thlr., von Rosinen mit 8 Thlr., von Syrup mit 6 Thlr., vom Schwefel mit 25 Thlr. Ein Sack Kaffee wiegt 4 Centner 56 Pfd., eine Tonne Rüböl 840 Pfd., ein Faß Talg 850 Pfd., ein Faß Rosinen 170 Pfd., ein Faß Syrup 185 Pfd. und eine Kiste Schwefel 328 Pfd. Brutto. Wie viel hat er für jede dieser Waaren zu zahlen?

Digitized by Google

Zuerst wird man das Nettogewicht jeder Waare zu suchen haben. Netto-Tara heißt die Tara vom Nettogewicht gerechnet; beträgt also das Nettogewicht 100, so ist der Tara 10, daher das Bruttogewicht = 100 + 10 = 110. Daher hat man folgende Proportionen:

110 : 100 = 496 ℔ Kaffee : $450\frac{10}{11}$ ℔, 1 Centner zu 24 ₰.
110 : 100 = 840 ℔ Rüböl : $793\frac{7}{11}$ ℔, 1 » » 9 » 5 Sgr.
110 : 100 = 850 ℔ Talg : $772\frac{8}{11}$ ℔, 1 » » 10 »
110 : 100 = 170 ℔ Rosinen : $154\frac{6}{11}$ ℔, 1 » » 8 »
110 : 100 = 185 ℔ Syrup : $168\frac{2}{11}$ ℔, 1 » » 6 »
110 : 100 = 328 ℔ Schwefel : $298\frac{2}{11}$ ℔, 1 » » 25 »

Zur Berechnung des Werthes hat man folgende Proportionen:

100 : $450\frac{10}{11}$ = 24 ₰ : ₰ 98,380164.
110 : $763\frac{7}{11}$ = $9\frac{1}{6}$ » : » 63,636364.
110 : $772\frac{8}{11}$ = 10 » : » 70,247934.
110 : $154\frac{6}{11}$ = 8 » : » 11,239669.
110 : $168\frac{2}{11}$ = 6 » : » 9,173553.
110 : $298\frac{2}{11}$ = 25 » : » 67,768595.

₰ 320,446280.

Den Decimalbruch multiplicire man mit 30, um die Sgr. zu erhalten, und den dann sich noch darstellenden Decimalbruch multiplicire man mit 12, so erhält man auch die Pfennige, und daher hat der Kaufmann im Ganzen 320 ₰ 13 Sgr. 4,66 ₰ zu bezahlen.

In allen vorkommenden Fällen dieser Art verfährt man am kürzesten und sichersten, wenn man den Bruch der Thaler in einen Decimalbruch, wie hier geschehen, verwandelt.

8. Nelkenbrecher: »Baumwolle verkauft man nach dem Cantaro zu $43\frac{3}{4}$ Oken ($52\frac{7}{8}$ Kilogr.), Kaffee (Mokka) und Pfeffer zu 37 ($47\frac{7}{8}$ Kilogr.), Gummi und Weihrauch zu $43\frac{1}{3}$, Lein (Flachs) zu 44, Saffran zu $39\frac{1}{2}$, Wolle und Blei zu 78, Zucker zu $37\frac{1}{2}$, Arsenik zu 54, Eisen zu 82, Stahl zu 44, Zinn zu $36\frac{1}{2}$ Oken in Alexandrien.«

a) Eine Oka = 18 690 Engl. Grän = 1,2109 Kilogr. = 2,5903 Berliner Pfund.

Nach Muncke, welcher die Bestimmungen durch Chelius und Hauschild als die besten hält, ist 1 Engl. Troy-Pfd. = 373,243 und das Avoirdupoids-Pfund = 453,594 Grammen. 1 Engl. Troy-Pfund = 5760 Grains, 1 Avoirdupoids-Pfund = 7000 Engl. Grains. 1 Preuß. Pfd. = 467,711 Grammen.

Jeder oben genannte Cantaro wiegt wie viele Kilogramme nach Nelkenbrecher und nach Muncke?

Nach Nelkenbrecher:

1 Cantaro zu $43\frac{3}{4}$ Oken = $43\frac{3}{4}$. 1,2109 = 52,8760 Kilogr.
1 » » 37 » = 37 . 1,2109 = 44,8033 »

Digitized by Google

1 Cantaro zu $43\frac{1}{3}$ Oken = $43\frac{1}{3} . 1,_{2109} = 52,_{4723}$ Kilogr.
1 » » 44 » = 44 . $1,_{2109} = 53,_{2796}$ »
1 » » $39\frac{1}{2}$ » = $39\frac{1}{2} . 1,_{2109} = 47,_{83055}$ »
1 » » 78 » = 78 . $1,_{2109} = 94,_{4502}$ »
1 » » $37\frac{1}{2}$ » = $37\frac{1}{2} . 1,_{2109} = 45,_{40875}$ »
1 » » 54 » = 54 . $1,_{2109} = 65,_{3886}$ »
1 » » 82 » = 82 . $1,_{2109} = 99,_{2938}$ »
1 » » $36\frac{1}{2}$ » = $36\frac{1}{2} . 1,_{2109} = 44,_{19785}$ »

Nach Muncke, wenn 1 Oka = $18,_{690}$ Engl. Grains:

7000 : 18690 = $453,_{594}$ Grammen : $1,_{21109598}$ Kilogr.
5760 : 18690 = $373,_{243}$ » : $1,_{21109577 6}$ »

Die Angabe einer Oka in Engl. Grains wird wahrscheinlich richtig sein, weil sie ihre Bestimmung den Engländern zu verdanken hat, daher ist die Angabe derselben in Kilogr. nach Nelkenbrecher unrichtig; setzen wir nun 1 Oka = $1,_{2111}$ Kilogr., so betragen jene Cantaro wieviel?

$43\frac{1}{3} . 1,_{2111} = 52,_{8847}$ Kilogr. 78 . $1,_{2111} = 94,_{4658}$ Kilogr.
37 . $1,_{2111} = 44,_{8107}$ » $37\frac{1}{2} . 1,_{2111} = 45,_{4162}$ »
$43\frac{1}{3} . 1,_{2111} = 52,_{4810}$ » 54 . $1,_{2111} = 65,_{3994}$ »
44 . $1,_{2111} = 53,_{2884}$ » 82 . $1,_{2111} = 99,_{3102}$ »
$39\frac{1}{2} . 1,_{2111} = 47,_{8384}$ » $36\frac{1}{2} . 1,_{2111} = 44,_{2051}$ »

b) Jeder Cantaro nach der letzten Berechnung wiegt wie viele Preuß. ℔?

467,$_{711}$: 1211,$_{1}$ = 1 ℔ : 1 Oka = $2,_{58942}$ Preuß. ℔.

$43\frac{3}{4} . 2,_{58942} = 113,_{07134}$ Pr. ℔. 78 . $2,_{58942} = 201,_{97476}$ Pr. ℔.
37 . $2,_{58942} = 95,_{80854}$ » » $37\frac{1}{2} . 2,_{58942} = 97,_{10325}$ » »
$43\frac{1}{3} . 2,_{58942} = 112,_{20820}$ » » 54 . $2,_{58942} = 139,_{82868}$ » »
44 . $2,_{58942} = 113,_{93448}$ » » 82 . $2,_{58942} = 212,_{33244}$ » »
$39\frac{1}{2} . 2,_{58942} = 102,_{28209}$ » » $36\frac{1}{2} . 2,_{58942} = 94,_{51383}$ » »

c) Wenn nun 1 ℔ Mokkaer Kaffee 10 Sgr. kostet, der Preis des Kaffees in Cairo in Spanischen Thalern bestimmt wird, die Transportkosten von Cairo bis Alexandrien 10 %, die Verschiffungskosten 4 %, die Transportkosten bis in einen Preuß. Hafen der Ostsee $12\frac{1}{2}$ %, die Ausladungskosten 4 %, Steuer 4 % betragen, $9\frac{2}{3}$ % Span. Thaler = 1 Köln. Mark fein Silber = 14 Thlr. Preuß. Conr.; wie theuer ist 1 Cantaro dieses Kaffees in Cairo?

Man nehme an, daß ein Cantaro in Cairo das 100fache irgend einer Quantität der Span. Thaler koste, und berechne nun nach und nach den Werth mit den Unkosten.

1 Cantaro kostet	100
Kosten von Cairo bis Alexandrien	10
Verschiffungskosten	4
Transportkosten	$12,_{5}$
Ausladungskosten	4
Steuer	4
Summa . . .	$134,_{5}$

Digitized by Google

Da 1 Cantaro = 97,10325 Pr. ℔ à 10 Sgr., also 1 Cantaro = 971,0325 Sgr. = dem 134,5fachen, also ist das 100fache = 360,98 Sgr. Diese sind nun in Span. Thalern zu verwandeln. $360{,}98$ Sgr. $= \frac{360{,}98 . 9\frac{2}{3}}{30 . 14}$ = 8,315 Span. Thaler kostet also nach den Annahmen ein Cantaro in Cairo.

9. Nelkenbrecher bemerkt bei Calcutta Folgendes: »Die Sicca-Rupie wird hier seit 1819 zu 175,923 Engl. Grän fein Silber und 15,993 Grän Zusatz ausgeprägt. — Vom Handelsgewicht hat man den Bazar-Maund (Maon) und den Engl. Faktorei-Maund. Ersteres ist $10\frac{0}{0}$ schwerer als letzteres. Der Faktorei-Maund wiegt $74\frac{2}{3}$ ℔ Engl. av. d. p. oder 72,439 Berl. ℔. Der Bazar-Maund wiegt 82,135 Pfd. Engl. av. d. p. oder 79,684 Berl. ℔.

Frachten von schweren Gütern, als Salpeter, Reis und Zucker, werden per Engl. Tonne von 20 Centnern zu 8 Liversterling mehr oder weniger, und für leichtes Gut, als Baumwolle, per Tonne von 50 Kubikfuß zu 10 Liversterling geschlossen.

Baumwolle verkauft man per Bazar-Maund zu 10—36 Sicca-Rupien; Benareszucker gilt circa 9 — 10 Sicca-Rupien per Faktorei-Maund. Salpeter gilt 3 — 5 Sicca-Rupien per Faktorei-Maund; von Indigo sind die Preise nach Beschaffenheit der Qualität 120 — 270 Sicca-Rupien per Faktorei-Maund.«

a) Welchen Werth hat eine Sicca-Rupie in Preuß. Courant, wenn 14 Thlr. = 1 Mark fein Silber; 1 Mark = 233,855 Grammen. 1 Engl. Troy-Pfund = 5760 Engl. Grains = 378,243 Grammen? Und von welcher Feinheit ist das Silber der Rupien?

Man kann diese Aufgabe durch Schlüsse, durch Proportionen und durch den Kettensatz berechnen.

	— 1 Sicca-Rupie	
1	— 175,923 Engl. Gr. f. S.	
5760	— 373,243 Grammen	
233,855	— 14 Thlr. Preuß. Courant	
74833,6	|	51070,466447 | 0,68245 Thlr. Preuß. Cour.

Wenn man den Bruch mit 30 multiplicirt, so erhält man den Werth einer Rupie in Sgr. = 20,4735 Sgr. Nelkenbrecher hat 1 Sicca-Rupie = $20\frac{1}{2}$ Sgr. Feingehalt $= \frac{175{,}923}{191{,}916} = \frac{11}{12} = 14\frac{2}{3}$löthig.

b) Wie viele $\frac{0}{0}$ ist der Bazar-Maund schwerer als der Faktorei-Maund, wenn jener 82,135 und dieser $74\frac{2}{3}$ Pfund Engl. Avoirdupoids wiegt? $\frac{82{,}135}{74\frac{2}{3}} . 100 = 110{,}002232$, davon 100 subtrahirt, giebt $10{,}002232\frac{0}{0}$ schwerer als ein Faktorei-Maund.

c) Wie theuer ist nach obigen Angaben ein Preuß. Centner Baumwolle, wenn 1 Preuß. Pfund = 467,711 und 1 Pfd. Engl. av. d. p. 453,594 = Grammen? Wie viele Preuß. Pfd. wiegt ein Bazar-Maund?

Digitized by Google

— 1 Preuß. Centner
1 — 110 Pfund
1 — 467,711 Grammen
453,594 — 1 Pfd. Engl. Avdp.
82,135 — 1 Bazar Maund
1 — 10 Sicca-Rupien
1 — 0,68245 Pr. Thlr.

3725,594319 | 35 110,830145 | 9,42422 Thlr. bis 33,927192 Thlr. Pr. Cour.

Durch den Kettensatz darf man den Werth eines Preuß. Pfundes nur für 10 Sicca-Rupien berechnen; aus demselben kann man dann leicht den für 36 Sicca-Rupien finden, weil $36 = 3{,}6 \cdot 10$ ist.

Diese Berechnungsart giebt auch ebenso leicht den Werth eines Preuß. Centners Benareszuckers, der also 8,481798 — 9,42422 ℔ Pr. Cour. beträgt.

d) Wie theuer ist ein Preuß. Centner Salpeter und Indigo?

Man berechne zuerst das Gewicht eines Faktorei-Maunds in Preuß. Gewicht.

— 1 Faktorei-Maund
1 — 74⅔ Engl. Avdp.-Pfd.
1 — 453,594 Grammen
467,711 — 1 Preuß. Pfd.

467,711 | 33 868,352 | 72,412990 Pfund Preuß.

Man berechne nun den Werth eines Preuß. Centners, wenn ein Faktorei-Maund nur 1 Sicca-Rupie kostet, so wird man für die übrigen Preise den gesuchten Werth leicht finden können.

72,413 : 110 = 1 Sicca-Rupie : A, oder wenn man den berechneten Werth einer Sicca-Rupie = 0,68245 Thlr. Preuß. Cour. setzt:

73,413 : 110 = 0,68245 : A = 1,036685 Thlr. Preuß. Cour.

Daher ist der Werth eines Preuß. Centners Salpeter 3,110055 bis 5,183425 Thlr. Pr. Cour.

Der Werth eines Preuß. Centners Indigo beträgt (120 bis 270) mal 1,036685 oder 124,4022 bis 279,90495 Thlr. Preuß. Cour.

e) Nach obigen Angaben wird die Fracht einer Preuß. Schiffslast von 4000 Preuß. Pfunden in Preuß. Cour. wie hoch zu stehen kommen, wenn 1 Engl. Ton = 20 Hundredweight (Centn.) und 1 Hundredweight (C. wt.) = 108,61984 Preuß. Pfunden (nach obigen Angaben berechnet); wenn man ferner 1 Liversterling = 6,9 Thlr. Pr. Cour. rechnet?

— 1 Preuß. Schiffslast
1 — 4000 Pfd. Preuß.
108,61984 — 1 Engl. C. wt.
20 — 1 Engl. Ton
1 — 8 Liversterling
1 — 6,9 Thlr. Pr. Crt.

In nebenstehender Rechnung ist 1 Engl. C.wt. = 108,62 Pfd. Preuß. gesetzt, denn diesem Gewichte kommt der Engl. Centner sehr nahe.

101,6388 Thlr. Pr. Cour.

Anmerk. Das Gewicht der Münzen mit Berücksichtigung des Feingehalts derselben dient vorzüglich zur Berechnung des Pari derselben. Par heißt gleich; das Pari der Münzen ist die Gleichheit des edlen Metalls, welches sie in sich begreifen.

Digitized by Google

z. B. 14 Thlr. Preuß. sind = 1 Kölnischen Mark fein Silber; 20 Gulden Oesterreichisch sind auch = 1 Köln Mark fein Silber; daher enthalten 14 Preuß. Thaler eben so vieles feines Silber als 20 Oestr. Gulden, und es stehen daher 20 Oestr. Gulden mit 14 Preuß. Thalern pari. $30{,}_{419}$ Engl. Guineen betragen eine Kölnische Mark feines Gold; $38\frac{1}{18}$ Friedrichsd'or enthalten auch eine Köln. Mark feines Gold; daher sind $30{,}_{419}$ Engl. Guineen mit $38\frac{1}{18}$ Frd'or. pari. In diesen beiden Fällen ist das Pari der Silber- und Goldmünzen nur nach den Münzgesetzen bestimmt; diese geben aber keine Genauigkeit, wie strenge sie auch in dieser Hinsicht eine richtige Einhaltung den Vorschriften gemäß gebieten mögen; denn wenn auch kein absichtlicher Betrug bei Ausprägung der Münzen obwaltet, so gestatten doch unsere Sinne und Instrumente keine absolute Genauigkeit; nur durch Einschmelzen der Münzen kann man ihren wahren Feingehalt erforschen; da aber ein solches Geschäft nicht Jeder auszuführen vermag und im gewöhnlichen Verkehre nur auf den gesetzlichen Werth der Münzen Rücksicht genommen wird, so kann auch die Berechnung des Pari der Münzen nach dem gesetzlichen Werthe derselben genügen.

10. Ein Franz. 5 Frankenstück wiegt 25 Grammen und der Feingehalt ist $0{,}_{9}$. Nach den Preuß. Münzgesetzen werden $10\frac{1}{2}$ Thlr. aus einer Mark $= 233{,}_{855}$ Grammen geprägt; ihr Feingehalt ist $\frac{3}{4}$.

a) Wie viele Franken und Preuß. Thlr. gehen auf die bezeichnete Mark feines Silber?

Da $10\frac{1}{2}$ Thlr. $= \frac{3}{4}$ Mark f. S., so ist $\frac{1}{4}$ Mark f. S. $= \frac{7}{2}$ Thlr; also die ganze Mark f. S. $= 4 \cdot \frac{7}{2} = 14$ Thlr.

Ein 5 Frankenstück enthält $25 \cdot 0{,}_{9} = 22{,}_{5}$ Grammen f. S., wie vielfach also $233{,}_{855}$ Gramm. f. S. von $22{,}_{5}$ Gramm. f. S. sind, ebenso viele 5 Frankenstücke wird eine Mark f. S. enthalten; also gehen auf 1 Mark f. S. $\frac{233{,}_{855}}{22{,}_{5}} = 10{,}_{393555\ldots}$ 5 Frankenstücke.

Hieraus folgt, daß eine Mark f. S. das 5fache von einem Franken enthält, also 1 Mark f. S. $= 51{,}_{967777\ldots}$ Franken.

b) Welches ist das Pari eines 5 Frankenstücks nach Preuß. Cour.?

Da $10{,}_{394}$ 5 Frankenstücke $= 14$ Thlr., so ist ein 5 Frankenstück $= \frac{14}{10{,}_{394}} = 1{,}_{347}$ Thlr.

11. Früher wurden aus einem Pfunde Münzsilber 62 Schillinge in England geprägt, seit 1816 prägt man 66 Schillinge (β.) aus dem halben Pfunde Münzsilber; das Münzsilber $\frac{37}{40}$ fein, und dieses Pfund ist das Troy-Pfund $= 373{,}_{243}$ Grammen.

a) Wie viele Schillinge gehen auf eine Mark f. S. $= 233{,}_{855}$ Grammen?

Es sind also 66 β. $= \frac{37}{40} \cdot 373{,}_{243}$ Grammen f. S.; daher ist 1 Mrk. f. S. $= \frac{233{,}_{855}}{\frac{37}{40} \cdot 373{,}_{243}} \cdot 66 = 44{,}_{705124}$ Engl. Schillingen.

Da eine Engl. Krone 5 β. hat und von derselben Feinheit der Schillinge ist, so sind $8{,}_{941}\ldots$ Kronen $= 1$ Mark f. S.

Digitized by Google

b) Welches ist daß Pari der Engl. Schillinge und Kronen in Pr. Cour.?

$44{,}_{705}\ ß = 14\ ℳ$; also $1\ ß = \frac{14}{44{,}_{705}} = 0{,}_{3131640}$ Pr. ℳ $= 9{,}_{39492}$ Sgr.; daher 1 Krone $= 46{,}_{9746}$ Sgr.

Anmerk. Nelkenbrecher hat 1 m℔ f. S. $= 44{,}_{69}$ Schill., 1 Schill. $= 9$ Sgr. $4{,}_{7}$ Pf. 1 Köln. m℔ f. S. $= 51{,}_{9414}$ Franken, 1 Frank $= 8\frac{1}{8}$ Sgr.

12. Nach dem Münzgesetze vom 25. Juni 1830 prägt Schweden künftighin ganze, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ Species zu $\frac{3}{4}$ fein. Aus dem Victualienpfunde werden $12\frac{1}{2}$ Species rauh oder $16\frac{2}{3}$ fein herausgebracht. Nach Muncke ist ein Victualienpfund oder Schaalpfund (Skalpund) $= 425{,}_{0104}$ Grammen. Wie viele Speciesthaler (zu 48 ß Species) gehen auf eine Mark $= 233{,}_{855}$ Grammen und welches ist das Pari in Preuß. Cour.?

Da der Feingehalt der Speciesthlr. $\frac{3}{4}$ ist, und $12\frac{1}{2}$ Speciesthlr. $= 1$ ℔, so sind $12\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ Speciesthlr. $= 1$ ℔ $= 425{,}_{0104}$ Grammen f. S.; also ist eine Mark f. S. $= \frac{233{,}_{855}}{425{,}_{0104}} \cdot \frac{50}{3} = 9{,}_{17056}$ Speciesthaler. Daher 1 Speciesthlr. $= 14 : 9{,}_{17056} = 1{,}_{5266}$ ℳ Pr. Cour. $= 1$ ℳ $15{,}_{798}$ Sgr.

Anmerk. Nelkenbrecher hat 1 Köln. m℔ f. S. $= 9{,}_{162}$ Speciesthaler, 1 Speciesthaler $= 1$ ℳ 15 Sgr. $10{,}_{1}$ Pf. Diese Abweichung rührt daher, daß daselbst die Köln. m℔ kleiner als die Preuß. angenommen ist. Muncke setzt die Köln. m℔ gleich $233{,}_{75}$ Grammen.

13. Seit 1810 ist als Hauptmaßstab für alle Russischen Silbermünzen festgesetzt, daß 100 Rubel $5\frac{1}{16}$ ℔ Silber zu $83\frac{1}{3}$ Solotnik fein wiegen müssen. Das Russ. ℔ von 32 Lth. zu 3 Solotnik ist nach Muncke $= 409{,}_{2713}$ Gramm.

Welches ist der Feingehalt der Rubel, wie viele Rubel machen eine feine Mark $= 233{,}_{855}$ Grammen, und welches das Pari der Rubel in Pr. Cour.?

Der Feingehalt $= \frac{83\frac{1}{3}}{96} = \frac{250}{288} = \frac{125}{144} \cdot 16 = \frac{125}{9} = 13\frac{8}{9}$löthig.

$\frac{144}{125} \cdot 100$ Rubel $= 5\frac{1}{16}$ ℔, oder 1024 Rubel $= 45$ ℔ $= 45 \cdot 409{,}_{2713}$ Grammen; daher 1 m℔ f. S. $= \frac{233{,}_{855}}{45 \cdot 409{,}_{2713}} \cdot 1024 = 13{,}_{002108}$ Rubel. 1 Rubel $= \frac{14}{13{,}_{00211}} = 1{,}_{076748}$ ℳ $= 1$ ℳ $2{,}_{30244}$ Sgr.

14. Nach Nelkenbr. soll ein 20 Frankenstück $6{,}_{45161}$ Grammen wiegen und daher $155 = 1$ Kilogramme sein; der Feingehalt sowohl der Silber- als auch der Goldmünzen ist $\frac{9}{10}$. Aus einer m℔ $= 233{,}_{855}$ Grammen werden 35 Frd'or geprägt, deren Feinheit 21 Karat 8 Grän ist.

a) Wie viele Frd'or und wie viele 20 Frankenstücke gehen auf eine m℔ fein Gold?

21 Karat 8 Grän $= 21\frac{2}{3}$ Karat, daher ist der Feingehalt der Frd'or $= \frac{21\frac{2}{3}}{24} = \frac{65}{72}$; folglich gehen $\frac{72}{65} \cdot 35 = 38\frac{10}{13}$ Frd'or auf eine Mark f. Gold.

Ein Kilogramme $= \frac{1000}{6{,}_{45161}} = 155{,}_{0002246}$ Zwanzigfrankenstücke,

Digitized by Google

also kann man in runder Zahl 155 Zwanzigfrankenstücke gleich einem Kilogramme als richtig annehmen.

1 m℔ $= \frac{233,855}{1000} . 155 = 36,247525$ Zwanzigfrankenstücke; dieses mit $\frac{10}{9}$ multiplicirt, giebt die Zahl der Stücke, welche auf eine Mark f. Gold gehen, 1 m℔ f. G. $= 40,2750277777 \ldots$ Zwanzigfrankenstücke.

b) Welches ist das Pari der 20 Frankenstücke in Frd'or?

1 Zwanzigfrankenstück $= \frac{38\frac{10}{13}}{40,275} = 0,962612$ Frd'or, oder den Frd'or zu 5 ℛ gerechnet, giebt ein 20 Frankenstück $= 4,81306$ ℛ Frd'or.

15. Früher wurden $44\frac{1}{2}$ Guineen aus einem Engl. Pfunde Münzgold geprägt, seit 1816 werden Sovereigns geprägt, und es sind 21 Sovereigns $= 20$ Guineen. Das Münzgold ist $\frac{11}{12}$ fein, und das Troy-Pfund $= 373,243$ Grammen.

Wie viele Guineen und Sovereigns gehen auf eine rauhe und feine m℔ $= 233,855$ Grammen und welches ist ihr Pari in Frd'or?

1 rauhe m℔ $= \frac{233,855}{373,243} . 44\frac{1}{2} = 27,881427$ Guineen.

1 m℔ f. G. $= \frac{12}{11} . \frac{233,855}{373,243} . 44\frac{1}{2} = 30,4161023$ Guineen.

1 rauhe m℔ $= \frac{21}{20} . \frac{233,855}{373,243} . 44\frac{1}{2} = 29,27549885$ Sovereigns.

1 m℔ f. G. $= \frac{12}{11} . \frac{21}{20} . \frac{233,855}{373,243} . 44\frac{1}{2} = 31,9369078$ Sovereigns.

1 Guinee $= \frac{38\frac{10}{13}}{30,4161} = 1,2746284$ Frd'or $= 6,373142$ ℛ Frd'or.

1 Sovereign $= \frac{38\frac{10}{13}}{31,93691} = 1,21393$ Frd'or $= 6,06965$ ℛ Frd'or.

16. Nelkenbrecher hat im Anhange folgende Aufgaben:

«In Berlin werden aus einer rauhen Mark $10\frac{1}{2}$ ℛ zu 12 Loth fein geprägt, und in Hamburg gilt die Mark fein Silber 27 m℔ 10 Schill. Bco. Man hat zur Absicht, eine Summe in Thalerstücken nach Hamburg zu senden, und auf den Betrag zu trassiren; wenn indessen die Preuß. Thalerstücke beim Einschmelzen nur 11 Loth 16 Grän fein liefern, wie hoch kommen hier dann 300 m℔ Bco., als die feste Valuta auf Hamburg zu stehen, ohne die Kosten zu berücksichtigen, und wie viel erhält man für eine Mark fein Silber, wenn der Kurs auf Hamburg $153\frac{1}{2}$ ℛ ist?»

1 Preuß. Mark $= 233,8555$ Grammen. Die Hamburger Mark $= 3609$ Engl. Grains. Nach Muncke 1 Engl. Troy-Pfund $= 373,243$ Grammen $= 5760$ Engl. Grains. Nach Nelkenbr. 15te Aufl. Vorrede S. IX.: «Zufolge der im Jahre 1826 von einer Kommission angestellten Revision, ist die Preuß.-Kölnische Mark $= 233,8555$ Grammen und, zufolge der in Paris und London vorgenommenen Vergleichung des neuen Franz. Gewichts mit

Digitized by Google

dem Engl., kommt dieselbe mit $3609,_{278}$ Engl. Troy-Grains überein.« Seite 281: »Das Troy-Pfund hält 12 Unzen, 240 Penny-weights, 5760 Grains ($373,_{243}$ genaue oder $373,_{206}$ tolerirte Grammen nach Chelius).«

a) Wie viele Engl. Grains enthält eine Preuß. Mark nach den genauen und tolerirten Grammen?

$$1 \text{ Preuß. Mark} = \frac{233,_{8555}}{373,_{243}} . 5760 = 3608,_{9295} \text{ Engl. Grains.}$$

$$1 \text{ Preuß. Mark} = \frac{233,_{8555}}{373,_{206}} . 5760 = 3609,_{2873} \text{ Engl. Grains.}$$

Keins dieser Resultate stimmt mit der Angabe in der Vorrede zum Nelkenbrecher überein, und das arithmetische Mittel giebt nur $3609,_{1084}$ Engl. Grains. Man kann aber sicher die Angabe 1 Preuß. Mark $= 3609,_{278}$ Engl. Troy-Grains als richtig annehmen, weil das Preuß. Gewicht bei der Temperatur von 15° R., das Englische in der Temperatur von 62° F. $= 13\frac{1}{3}$° R. regulirt worden ist.

b) Wie hoch kommen in Berlin 300 *m*ℳ Bco. zu stehen, wenn eine feine Hamb. Mark 27 *m*ℳ 10 Schill., und wie viel erhält man für eine Preuß. Mark fein Silber, wenn der Kurs auf Hamburg $153\frac{1}{2}$ ℔ ist?

1 Preuß. Mark $= 3609,_{278}$, 1 Hamb. Mark $= 3609$ Engl. Grains.

	—	300 *m*ℳ Bco.
$27\frac{5}{8}$	—	1 Hamb. *m*ℳ f. S.
1	—	3609 Engl. Grains
$3609,_{278}$	—	1 Preuß. *m*ℳ
$\frac{3}{4}$	—	1 *m*ℳ rauh
1	—	$10\frac{1}{2}$ ℔

$398\,825,_{219} \mid 60\,631\,200 \mid 152,_{0248}$ ℔ Preuß. Courant.

In vorstehender Rechnung ist die Feinheit des Preuß. Münzsilbers $\frac{3}{4}$ angenommen; da es aber in Hamb. nur $11\frac{5}{6}$ Loth $= \frac{11\frac{5}{6}}{16} = \frac{107}{144}$ ist, so giebt diese Rechnung zu wenig; berücksichtiget man den letzten Gehalt, so erhält man $153,_{445}$ ℔.

Preuß. Cour.	=	300 *m*ℳ Bco.
	—	1 Preuß. *m*ℳ f. S.
1	—	$3609,_{278}$ Engl. Grains
3609	—	1 Hamb. *m*ℳ
1	—	$27\frac{5}{8}$ *m*ℳ Bco.
300	—	$153,_{5}$ ℔ Pr. Cour.

$173\,232 \mid 2\,448\,786,_{84466} \mid 14,_{13588}$ ℔ Pr Cour.

Da die Preuß. Mark nahe der Hamb. Mark gleich ist, so könnte man der Kürze wegen 1 Preuß. Mark $=$ 1 Hamb. Mark setzen, und dann erhält man 1 Preuß. Mark f. S. $= 14,_{13479}$ ℔ Preuß. Cour.

17. »In Hamburg gilt der Dukaten al marco 101 ß Bco. und 67 Dukaten zu $23\frac{1}{2}$ Karat fein rechnet man auf eine Köln. Mark. In Berlin werden aus einer rauhen Mark Gold 35 Frd'or zu 5 ℔ und zu 21 Karat

Digitized by Google

8 Grän fein geprägt, die aber nach der Hamb. Probe nur 21 Karat 6 Gr. fein befunden werden. Nun hat man zur Absicht, Gold in Barren à $21\frac{1}{2}$ Karat fein nach Hamburg zu senden; a) wie hoch stellt sich hier also der Kurs von 300 m⅄ Bco. in Frd'or zu 5 ℛ; und b) wie hoch kommt eine Preuß. Mark fein Gold in Frd'or zu stehen, wenn der Kurs auf Hamburg $152\frac{2}{3}$ und Frd'or 170 Sgr. gelten?

a)

	—	300 m⅄ Bco.
1	—	16 ß Bco.
101	—	1 Dukaten
67	—	$23\frac{1}{2}$ Karat f. G.
24	—	1 Köln. m⅄
1	—	$233{,}_{75}$ Grammen
$233{,}_{8555}$	—	1 Preuß. m⅄
1	—	24 Karat f. G.
$21\frac{1}{2}$	—	35 Frd'or
1	—	5 ℛ

12 754 951,$_{1551}$ | 1 845 690 000 | 144,$_{703}$ ℛ Frd'or.

Nach Muncke ist die Köln. Mark = 233,$_{75}$ Grammen.

300 m⅄ Bco. kommen also 144,$_{703}$ ℛ Frd'or zu stehen.

b)

	—	1 Preuß. m⅄ f. G.
1	—	$233{,}_{8555}$ Grammen
$233{,}_{75}$	—	1 Köln. m⅄
1	—	24 Karat f. G.
$23\frac{1}{2}$	—	67 Dukaten
1	—	101 ß Bco.
16	—	1 m⅄ Bco.
300	—	152 ℛ Preuß.
1	—	30 Sgr.
170	—	5 ℛ Frd'or

149 413 | 28 864 803,$_{07344}$ | 193,$_{188}$ ℛ Frd'or.

Wird die Preuß. Mark der Kölnischen gleich gerechnet, so sind die Rechnungen einfacher, wie auch die Kettensätze, und man erhält:

a)

—	300 m⅄ Bco.	
1	—	16 ß Bco.
101	—	1 Dukaten
67	—	$23\frac{1}{2}$ Karat f. G.
$21\frac{1}{2}$	—	35 Frd'or
1	—	5 ℛ Frd'or

290 981 | 39 480 000 | 135,$_{6789}$ ℛ Frd'or.

b)

—	1 Köln. m⅄ f. G.	
1	—	24 Karat f. G.
$23\frac{1}{2}$	—	67 Dukaten
1	—	101 ß Bco.
16	—	1 m⅄ Bco.
300	—	152 ℛ Preuß. Cour.
1	—	30 Sgr.
170	—	5 ℛ Frd'or

3995 | 771 438 | 193,$_{351}$ ℛ Frd'or.

Die Preuß. Mark f. G. = $38\frac{10}{13}$ Frd'or zu 5 ℛ = 193,$_{84615}$ ℛ Friedrichsd'or.

Digitized by Google

V. Beziehungen zwischen Gewichten und der Zeit.

Werden Gewichte und Zeit auf einander bezogen, so muß man die ersten als Kräfte betrachten, die in einer gewissen Zeit etwas leisten; da hier aber von keinen andern ungleichartigen Größen, als nur den genannten, gehandelt werden soll, so muß selbst das durch Kräfte Bewirkte eine durch Gewichte meßbare Größe sein. Dieser Ansicht zufolge stellen sich in gegenwärtiger Rubrik zwei Aufgaben heraus, nämlich aus dem gegebenen Verhältnisse der Gewichte das Verhältniß der Zeiten zu finden, oder umgekehrt, aus dem gegebenen Verhältnisse der Zeiten das Verhältniß der Gewichte zu berechnen. Jede von diesen Aufgaben kann aber doppelter Art sein, indem man die Gewichte theils als wirkliche Gewichte, theils als Kräfte betrachten kann. Nennt man die wirkenden Kräfte die Ursachen, das durch sie Bewirkte die Wirkung, so hat man folgende Kombinationen zur Bildung von Aufgaben:

1) aus den gegebenen Verhältnissen der Ursachen und Zeiten das Verhältniß der Wirkungen,

2) aus den gegebenen Verhältnissen der Ursachen und Wirkungen das Verhältniß der Zeiten,

3) aus den gegebenen Verhältnissen der Wirkungen und Zeiten das Verhältniß der Ursachen zu berechnen.

In diesen Aufgaben kann man die Ursachen gleich- oder ungleichzeitig wirken lassen, und dadurch werden die Aufgaben theils an Mannigfaltigkeit, theils an Interesse gewinnen, in manchen Fällen aber auch dadurch gewisse Schwierigkeiten in Auflösung derselben herbeiführen, die jedoch alle durch die Kenntnisse der Elementararithmetik beseitigt werden können. Zur Vereinfachung gedachter 3 Arten von Aufgaben wird man anfangs eines der erwähnten Verhältnisse gleich dem von Eins zu Eins setzen, durch welche Annahme nur zwei Verhältnisse in der Rechnung erscheinen und folglich nur eine Proportion bedingt wird.

1. Acht Arbeiter haben in 6 Tagen eine gewisse Arbeit zu Stande gebracht, in welcher Zeit würden 12 Arbeiter dasselbe geleistet haben?

In allen diesen Aufgaben wird angenommen, daß gleiche Ursachen (Kräfte) gleiche Wirkungen in gleichen Zeiten hervorbringen. Daher haben nach den Bedingungen der Aufgabe 8 Arbeiter in 1 Tage $\frac{1}{6}$ der Arbeit, und 1 Arbeiter in 1 Tage den 8ten vom 6ten oder $\frac{1}{8.6} = \frac{1}{48}$ der Arbeit gemacht. Folglich werden 12 Arbeiter in 1 Tage das 12fache der Arbeit eines Arbeiters in 1 Tage, also $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ der Arbeit machen; daher brauchen sie zur Vollendung der ganzen Arbeit das Vielfache von einem Tage, welches die ganze Arbeit von einem ihrer Viertel ist, d. h. 4 Tage.

Der Lehrer hat seinen Schülern besonders Folgendes in Erinnerung und zur klaren Anschauung durch viele Fragen zu bringen:

Digitized by Google

I. Wenn das Verhältniß der Kräfte der Arbeiter nicht gegeben ist, so wird stets vorausgesetzt, daß jeder Arbeiter in der Zeiteinheit eine gleiche Arbeit macht; oder während gleicher Zeiten sind die Arbeiten der Zahl der Arbeiter proportional. Z. B. Die Arbeit von 3 Arbeitern während einer gewissen Zeit verhält sich zu der Arbeit von 5 Arbeitern in derselben Zeit wie 3 zu 5. Diesen Satz kann man auch so aussprechen: die Ursachen und ihre Wirkungen während gleicher Zeiten stehen in gleichen geraden Verhältnissen.

II. Die Wirkungen gleicher Ursachen sind den Zeiten proportional. Z. B. Die Arbeit gewisser Arbeiter während 4 Tage verhält sich zur Arbeit derselben Arbeiter während 7 Tagen wie 4 zu 7.

III. Bringen Ursachen in verschiedenen Zeiten gleiche Wirkungen hervor: so stehen die Ursachen im umgekehrten Verhältnisse der Zeiten; oder: wenn Arbeiter von verschiedenen Anzahlen in verschiedenen Zeiten Gleiches leisten: so stehen die Anzahlen der Arbeiter im umgekehrten Verhältnisse der Zeiten.

Z. B. Wenn 5 Arbeiter in 30 Tagen Etwas machen; so müssen 2, 3, 6, 10 ꝛc. Arbeiter dasselbe machen in 2 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tagen : 75 Tagen; 3 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tage : 50 Tagen; 6 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tage : 25 Tagen; 10 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tage : 15 Tagen; 15 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tage : 10 Tagen; 30 Arbeiter : 5 Arbeitern = 30 Tage : 5 Tagen; ꝛc.

2. Zwölf Träger haben in 8 Stunden 768 Centner fortgeschafft; a) so haben 12 Träger in einer Stunde, b) so hat ein Träger in 8 Stunden, c) so hat ein Träger in einer Stunde wie viel hinweggetragen?

a) Wenn 12 Arbeiter in 8 Stunden 768 Ctnr. hinwegtragen, so werden dieselben Arbeiter in 1 St. nur $\frac{1}{8}$ des Gewichts, also $\frac{1}{8} . 768 = 96$ Ctnr. fortbringen.

b) Da 12 Träger in 8 St. 768 Ctnr. tragen, so wird 1 Träger in derselben Zeit nur $\frac{1}{12}$ der ganzen Last, also $\frac{1}{12} . 768 = 64$ Ctr. fortschaffen.

c) Weil 12 Träger in 8 Stunden 768 Ctnr. tragen, so hat 1 Arbeiter in 1 St. nur $\frac{1}{12}$ von $\frac{1}{8}$ des Gewichts oder $\frac{1}{12} . \frac{1}{8} . 768 = 8$ Centner getragen.

3. Ein Arbeiter kann in einem Tage 3 Lasten von einem gewissen Orte nach einem andern hinschaffen; a) so werden 7 Arbeiter in einem Tage, b) so wird 1 Träger in 6 Tagen, c) so werden 9 Träger in 5 Tagen wie viele Lasten von dem einen nach dem andern Orte hinbringen?

a) Da 1 Arbeiter in einem Tage 3 Lasten trägt, so werden 7 Arbeiter in derselben Zeit 7 . 3 oder 21 Lasten fortbringen. Denn 2, 3, 4 ꝛc. Träger tragen 2, 3, 4 ꝛc. mal so viel als ein Träger in derselben Zeit.

b) Weil 1 Träger in einem Tage 3 Lasten fortschafft, so wird er in

Digitized by Google

6 Tagen 6 . 3 oder 18 Laſten wegbringen. Denn er wird in 3, 4, 5 ꝛc. Tagen das 3=, 4=, 5fache ꝛc. von dem tragen, was er in einem Tage trägt.

c) 9 Arbeiter machen in 1 Tage das 9fache von dem, was 1 Arbeiter in 1 Tage leiſtet, alſo werden 9 Arbeiter in 1 Tage 9 . 3 oder 27 Laſten tragen, weil 1 Arbeiter in 1 Tage 3 Laſten trägt. In 5 Tagen thun Arbeiter das 5fache von dem, was ſie in 1 Tage zu Stande bringen, und weil die 9 Arbeiter in 1 Tage 27 Laſten tragen, ſo werden dieſelben in 5 Tagen 5 . 27 = 135 Laſten fortſchaffen.

Anmerk. Folgen die drei vorſtehenden Aufgaben wohl in natürlicher Ordnung, d. h. vom Leichtern zum Schwerern oder vom Einfachen zum Zuſammengeſetzten? Nein! Gerade in umgekehrter Ordnung müſſen ſie gegeben werden. Abſichtlich aber habe ich dieſe Ordnung gewählt, um bemerken zu laſſen, daß es nicht einerlei iſt, in welcher Ordnung man Aufgaben auf einander folgen läßt; ihre natürliche Folge iſt vielmehr dieſe:

1) Die Einheit der Kraft bewirkt in der Zeiteinheit Etwas; a) ſo wird die vielfache Kraft in der Zeiteinheit wie viel, b) ſo wird die Krafteinheit in dem Vielfachen der Zeiteinheit wie viel, c) ſo wird das Vielfache der Kraft in dem Vielfachen der Zeit wie viel bewirken?

2) Ein Vielfaches der Kraft bewirkt in der Zeiteinheit Etwas; a) ſo wird die einfache Kraft in der Zeiteinheit, b) ſo wird die einfache Kraft in einem Vielfachen der Zeit, c) ſo wird ein anderes Vielfache der Kraft in der Zeiteinheit, d) ſo wird ein anderes Vielfache der Kraft in einem Vielfachen der Zeit wie viel leiſten?

3) Die Einheit der Kraft leiſtet in einem Vielfachen der Zeit Etwas; a) ſo wird die einfache Kraft in der einfachen Zeit, b) ſo wird ein Vielfaches der Kraft in der einfachen Zeit, c) ſo wird die einfache Kraft in einem andern Vielfachen der Zeit, d) ſo wird die vielfache Kraft in einem andern Vielfachen der Zeit was vollenden?

4) Die vielfache Kraft bringt in der vielfachen Zeit Etwas zu Stande; a) ſo wird die einfache Kraft in derſelben vielfachen Zeit, b) ſo wird dieſelbe vielfache Kraft in der einfachen Zeit, c) ſo wird die einfache Kraft in der einfachen Zeit, d) ſo wird ein anderes Vielfache der Kraft in derſelben vielfachen Zeit, e) ſo wird dieſelbe vielfache Kraft in einem andern Vielfachen der Zeit, f) ſo wird ein anderes Vielfache der Kraft in einem andern Vielfachen der Zeit wie viel ſchaffen?

Dieſes iſt im Allgemeinen der Gang in Behandlung der erſten Aufgabe, nämlich derjenigen, in welcher aus den gegebenen Verhältniſſen der Urſachen und Zeiten das Verhältniß der Wirkungen berechnet wird. Dieſe Bemerkungen waren hier nothwendig, um mich in Behandlung dieſes Gegenſtandes auf eine geringe Zahl Beiſpiele beſchränken zu können, und ihnen gemäß will ich nun Aufgaben folgen laſſen.

Es verſteht ſich aber wohl von ſelbſt, daß die Wirkung nicht immer ein Gewicht, wenn gleich etwas Wägbares ſein müſſe, ſondern ſie kann überhaupt eine Arbeit ſein, die aber keine Berechnung ihres Rauminhaltes bedarf.

1. Ein Feuerwerker macht Patronen, und verbraucht in einer Stunde 4 ℔ Pulver; a) ſo werden 3 Feuerwerker in einer Stunde, b) ſo wird ein Feuerwerker in 6 Stunden, c) ſo werden 8 Feuerwerker in 9 Stunden wie viele Pfunde Pulver verbrauchen?

a) Wenn 1 Feuerwerker in 1 St. 4 ℔ Pulver verbraucht, ſo werden 3 Feuerw. in 1 St. 3 . 4 oder 12 ℔ verarbeiten. Denn welches Vielfache

Digitized by Google

die Kraft von der einfachen Kraft ist, dasselbe Vielfache muß ihre Wirkung von der einfachen Wirkung in derselben Zeit sein.

b) Da 1 Feuerw. in 1 St. 4 ℔ braucht, so wird er in 6 Stunden 6 . 4 oder 24 ℔ verbrauchen. Denn dieselbe Kraft bringt in einem Vielfachen der Zeiteinheit dasselbe Vielfache der Wirkung in der einfachen Zeit hervor.

c) Weil 1 Feuerw. in 1 St. 4 ℔ verarbeitet, so wird er in 9 Stunden 9 . 4 oder 36 ℔, und 8 Feuerw. werden daher in derselben Zeit 8 . 36 oder 288 ℔ verbrauchen.

Anmerk. Im Anfange hat man darauf zu halten, daß die Schüler die allgemeinen Sätze, welche jedem Schlusse zum Grunde liegen, auch allgemein aussprechen, wie es in a) und b) geschehen ist; c) umfaßt die Schlüsse von a) und b), daher kann der allgemeine Schluß wegbleiben.

Der allgemeine Ausdruck eines Gesetzes setzt ein höheres Denkvermögen als die Anwendung desselben in einem besondern Falle voraus; daher sind Kinder geneigt, einen besondern Fall zum allgemeinen zu erheben; dieses thun aber nicht allein Kinder, sondern auch Erwachsene, daß sie aus einigen wenigen Fällen eine allgemeine Regel ableiten. Daher die weite Verbreitung des Aberglaubens und der Vorurtheile; denn der rohe Verstand schließt: weil mit diesem Umstande dieser andere Umstand zusammentraf, so muß immer, wenn der erste Umstand eintritt, auch der andere folgen; z. B. weil in dem Jahre, in welchem der große Komet erschien, Krieg entstand, so zeigt die Erscheinung eines Kometen einen Krieg an; und unzählige andere ähnliche grundlose Schlüsse, die Jedem bekannt sein werden. Vorurtheile herrschen besonders unter den sogenannten höhern Ständen, und sie schließen: da die Vorfahren so und so lebten, handelten, dachten ꝛc.: so müssen auch ihre Nachkommen eben so leben, handeln, denken ꝛc.; z. B. weil das einzige Geschäft des Adels in alten Zeiten der Krieg war, so muß auch das Geschäft des Adels in neuesten Zeiten der Krieg sein; oder weil die meisten Menschen einzig und allein nach Reichthum streben, so muß jeder Mensch nach demselben Ziele jagen; oder alle Vornehmen haben prächtige Kleidungen, also ist derjenige vornehm, der prachtvolle Kleidungen besitzt; oder die meisten Leute von höherer Bildung tragen schöne Kleider, also ist der ohne Bildung, welcher einen schlechten Rock auf seinem Leibe trägt. Wem sind solche Schlüsse unbekannt? Und sind diese Schlüsse nicht die der Kinder, also kindisch, und verrathen sie nicht einen rohen, ungebildeten Verstand? Denkt sich der Ungebildete den König nicht als den glücklichsten Menschen? Und man kann beinahe umgekehrt schließen: je höher der Stand, je höher der Zwang, bedingt durch die vielen Ceremonien als Folge der Vorurtheile.

Damit also der jugendliche, ungebildete Verstand sich vom Besondern zum Allgemeinen erhebe, lasse man den Schüler im Einzelnen erkannte Gesetze allgemein aussprechen.

2. In einem Tage haben 12 Arbeiter eine Wiese von 30 Morgen abgemäht; a) so wird 1 Arbeiter in einem Tage, b) so wird 1 Arbeiter in 3 Tagen, c) so werden 9 Arbeiter in einem Tage, d) so werden 8 Arbeiter in 6 Tagen wie viele Morgen abmähen?

a) Da 12 Mäher in einem Tage 30 Morgen abhauen, so wird ein Mäher in derselben Zeit nur $\frac{1}{12}$ von 30 oder $2\frac{1}{2}$ Morgen abmähen. Denn

Digitized by Google

welcher Theil die einfache Kraft von der vielfachen Kraft ist, derselbe Theil muß ihre Wirkung von der jener in derselben Zeit sein.

b) Weil 1 Arbeiter in einem Tage $2\frac{1}{2}$ Morgen abschneidet (a), so wird er in 3 Tagen $3 . 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ Morgen abmähen. Denn welches Vielfache die Zeit von der Zeiteinheit ist, dasselbe Vielfache muß die in ihr, durch dieselbe Kraft, gemachte Arbeit von der, in der Zeiteinheit, hervorgebrachten Arbeit sein.

c) Da 1 Mäher in einem Tage $2\frac{1}{2}$ Morgen bestellt, so werden 9 Mäher in derselben Zeit $9 . 2\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$ Morgen abschneiden. Denn welches Vielfache die Kraft von der Krafteinheit ist, dasselbe Vielfache muß ihre Wirkung von der Wirkung der Krafteinheit in derselben Zeit sein.

d) Ein Arbeiter hat in einem Tage $2\frac{1}{2}$ Morgen abgemäht, so wird er in 6 Tagen $6 . 2\frac{1}{2} = 15$ Morgen, und daher müssen 8 Arbeiter in dieser Zeit $8 . 15 = 120$ Morgen abschneiden.

3) Ein Weber hat in 3 Wochen 54 Ellen von einem Zeuge verfertigt; a) so hat er in einer Woche, b) so werden 9 Weber in einer Woche, c) so wird ein Weber in 13 Wochen, d) so werden 7 Weber in 12 Wochen wie viele Ellen Zeug derselben Art liefern?

a) Wenn ein Weber in 3 Wochen 54 Ellen macht, so macht er in einer Woche $\frac{1}{3}$ von 54 oder 18 Ellen. Denn welcher Theil die Zeiteinheit von der Zahl der Zeiteinheiten ist, derselbe Theil muß ihre, durch dieselbe Kraft erzeugte, Wirkung von derjenigen sein, welche in der vielfachen Zeit geschafft wurde.

b) 9 Weber werden in einer Woche $9 . 18$ oder 162 Ellen weben; weil ein Weber in einer Woche 18 Ellen verfertigt. Denn die Wirkungen sind den Kräften in gleichen Zeiten proportional.

c) Weil ein Weber in einer Woche 18 Ellen macht, so wird er in 13 Wochen $13 . 18$ oder 234 Ellen schaffen. Denn gleiche Kräfte erzeugen Wirkungen, die im Verhältnisse ihrer Zeiten stehen.

d) Da 1 Weber in 1 Woche 18 Ellen liefert, so werden 7 Weber in einer Woche $7 . 18$, und in 12 Wochen $12 . 7 . 18 = 1512$ Ellen zu Stande bringen.

4. In 4 Wochen haben 6 Maurer 864 Kubikfuß einer Mauer aufgeführt, a) so hat ein Maurer in derselben Zeit, b) so haben dieselben 6 Maurer in einer Woche, c) so hat ein Maurer in einer Woche, d) so werden 18 Maurer in 4 Wochen, e) so werden dieselben 6 Maurer in 7 Wochen, f) so werden 15 Maurer in 9 Wochen wie viele Kubikfuß zu Stande bringen?

a) Ein Maurer ist der 6te Theil von 6 Maurern, also wird auch ein Maurer in derselben Zeit den 6ten Theil von dem leisten, was 6 Maurer vollführen. Da nun 6 Maurer in gedachter Zeit 864 Kubikfuß gemacht haben, so hat einer in derselben Zeit $\frac{1}{6}$ von $864 = 144$ Kubikfuß verfertigt.

Digitized by Google

b) Weil eine Woche $\frac{1}{4}$ von 4 Wochen ist, so haben die erwähnten Maurer auch $\frac{1}{4}$ von der Arbeit gemacht, welche sie in 4 Wochen geschaffen haben; da sie nun in 4 Wochen 864 Kubikfuß aufgeführt haben, so machten sie in einer Woche $\frac{1}{4} . 864 = 216$ Kubikfuß.

c) Ein Maurer macht $\frac{1}{6}$ von dem, was 6 Maurer in derselben Zeit thun, und in einer Woche $\frac{1}{4}$ von dem, was er in 4 Wochen schafft; daher hat ein Maurer in einer Woche $\frac{1}{6}$ mal $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{24}$ von dem gemacht, was 6 Maurer in 4 Wochen thun; diese haben aber in gedachter Zeit 864 Kubikfuß gefertigt; also hat ein Maurer in einer Woche $\frac{1}{24} . 864 = 36$ Kubikfuß gemacht.

d) 18 Maurer sind das 3fache von 6 Maurern, daher werden auch 18 Maurer in der Zeit das 3fache von dem leisten, in welcher 6 Maurer ein Gewisses machen; nun haben 6 Maurer in 4 Wochen 864 Kubikfuß gemacht; daher verfertigen 18 Maurer in 4 Wochen $3 . 864 = 2592$ Kubikfuß.

e) 7 Wochen sind $1\frac{3}{4}$ mal 4 Wochen; folglich müssen dieselben Arbeiter in 7 Wochen $1\frac{3}{4}$ mal das machen, was sie in 4 Wochen zu Stande brachten, und da dieses 864 Kubikfuß ist, so machen sie in 7 Wochen $1\frac{3}{4} . 864 = 1712$ Kubikfuß.

f) 15 Maurer sind $\frac{15}{6}$ oder $\frac{5}{2}$ von 6 Maurern, und 9 Wochen sind $\frac{9}{4}$ von 4 Wochen; folglich machen 15 Maurer in 9 Wochen $\frac{5}{2}$ mal $\frac{9}{4}$ von dem, was 6 Maurer in 4 Wochen thun; diese haben nun in genannter Zeit 864 Kubikfuß aufgeführt; daher verfertigen 15 Maurer in 9 Wochen $\frac{5}{2} . \frac{9}{4} . 864 = 4860$ Kubikfuß.

Aus diesen Beispielen geht der allgemeine Satz hervor:

Das Verhältniß der Wirkungen ist zusammengesetzt aus den beiden geraden Verhältnissen der Kräfte und der Zeiten.

6 Maurer : 15 Maurer = 864 Kubikfuß : A (Arbeit der 15 Maurer in 4 Woch.)
4 Wochen : 9 Wochen = A : B (Arbeit der 15 Maurer in 9 Woch.)

$6 . 4 : 15 . 9 = 864$ Kubikfuß : B und

$B = \frac{15 . 9}{6 . 4} . 864 = 4860$ Kubikfuß.

Anmerk. In den vorstehenden Beispielen, deren Zahl Jeder nach Belieben wird vermehren können, da ihre Bildung im Allgemeinen in obiger Anmerkung angezeigt ist, wurde die Wirkung oder vielmehr das Verhältniß der Wirkungen gesucht; nun bleibt noch das Verhältniß der Kräfte und der Zeiten zu suchen übrig. Es ist gleichgiltig, welcher dieser beiden Aufgaben man den Vortritt gewähren will; ich lasse diejenige folgen, welche das Verhältniß der Zeiten zur Berechnung vorlegt. Das Specielle derselben ist Folgendes:

1) Die einfache Kraft wirkt das Einfache in der Zeiteinheit; a) so wird dieselbe Kraft ein Vielfaches der Wirkung, b) so wird die vielfache Kraft das Einfache der Wirkung, c) so wird die vielfache Kraft ein Vielfaches der Wirkung in welcher Zeit hervorbringen?

2) Ein Vielfaches der Kraft erzeugt eine Wirkung in der Zeiteinheit; a) so wird dieselbe vielfache Kraft ein Vielfaches der Wirkung, b) so wird die einfache Kraft dieselbe Wirkung, c) so wird die einfache Kraft ein Vielfaches der Wirkung,

Digitized by Google

d) so wird ein anderes Vielfache der Kraft ein Vielfaches der Wirkung in welcher Zeit erzeugen?

3) Die einfache Kraft leistet Etwas in einem Vielfachen der Zeiteinheit; a) so wird dieselbe Kraft ein Vielfaches der Wirkung, b) so wird ein Vielfaches der Kraft dasselbe Etwas, c) so wird die vielfache Kraft ein Vielfaches der Wirkung in welcher Zeit erschaffen?

4) Die vielfache Kraft bewirkt Etwas in der vielfachen Zeiteinheit; a) so wird dieselbe Kraft ein Vielfaches der Wirkung, b) so wird die einfache Kraft dasselbe Etwas, c) so wird die einfache Kraft ein Vielfaches der Wirkung, d) so wird ein anderes Vielfache der Kraft dasselbe Etwas, e) so wird ein anderes Vielfache ein Vielfaches der Wirkung in welcher Zeit hervorbringen?

1. Ein Mann verzehrt täglich $\frac{3}{4}$ ℔ Brot; a) so wird er in wie vielen Tagen 1 Centner, b) so werden 125 Mann in wie vielen Tagen 12 Ctnr. 36 ℔ verzehrt haben?

a) Da ein Mann $\frac{3}{4}$ ℔ in einem Tage verzehrt, so wird er das Vielfache von $\frac{3}{4}$ ℔ verzehren, wie viele Tage er Brot genießt, oder seine Verzehrung ist das Vielfache von $\frac{3}{4}$ ℔, welches die Zeit seiner Speisung von einem Tage ist. Nun ist ein Centner oder 110 ℔ $= 110 . \frac{4}{3}$ von $\frac{3}{4}$ ℔; daher reicht er mit einem Ctr. Brot $110 . \frac{4}{3}$ mal einen Tag oder $146\frac{2}{3}$ Tage.

b) Da 1 Mann in einem Tage $\frac{3}{4}$ ℔ Brot verbraucht, so werden 125 Mann in einem Tage $125 . \frac{3}{4}$ ℔ verbrauchen, und im Ganzen muß daher ihr Verbrauch das Vielfache von $125 . \frac{3}{4}$ ℔ sein, welches die Zeit während ihrer Zehrung von einem Tage ist. Nun ist ihr ganzer Verbrauch $=$ 12 Ctr. 36 ℔ $= 1356$ ℔ das $\frac{1356}{125 . \frac{3}{4}}$fache von $125 . \frac{3}{4}$ ℔; daher ist auch die gesuchte Zeit $\frac{1356}{125 . \frac{3}{4}}$ mal 1 Tag $= 14\frac{56}{125}$ Tagen.

2. Ein Pferd hat in einem Monat 4 Scheffel Hafer verzehrt; a) so wird es eine Last von 60 Scheffeln, b) so werden 6 Pferde die 4 Scheffel, c) so werden 3 Pferde eine Last von 2 Wispeln oder 48 Scheffeln in welcher Zeit verzehren?

a) Da das Pferd in einem Monat 4 Scheffel auffrißt, so wird es mit 60 Scheffeln so viele Monate reichen, wie vielfach 60 Scheffel von 4 Scheffeln sind. Da nun 60 Scheffel das 15fache von 4 Scheffeln sind, so kann man das Pferd mit 60 Scheffeln 15 Monate lang unterhalten. Hier gilt also der Satz: die Wirkungen gleicher Kräfte sind den Zeiten proportional.

b) 6 Pferde sind das 6fache von einem Pferde, also ist auch das Futter der 6 Pferde in einem Monate das 6fache des Futters eines Pferdes in einem Monate; weil die Wirkungen den Ursachen in gleichen Zeiten proportional sind. Nun soll aber das Futter der 6 Pferde nur 4 Scheffel betragen, daher hat jedes Pferd nur $\frac{4}{6}$ Scheffel erhalten; welcher Bruch nun $\frac{4}{6}$ Scheffel von 4 Scheffeln sind, derselbe Bruch muß die gesuchte Zeit von einem Monate sein; weil die Wirkungen gleicher Ursachen ihren Zeiten proportional sind. $\frac{4}{6}$ sind nun $\frac{1}{6}$ von 4 Scheffeln; daher ist die gesuchte Zeit

Digitized by Google

$\frac{1}{6}$ von einem Monate; also kann man 6 Pferde mit dem Futter, mit welchem man ein Pferd einen Monat unterhält, nur $\frac{1}{6}$ Monat füttern.

Kürzer hätte man diese Aufgabe so lösen können. Weil 6 Pferde 4 Scheffel verzehren, so wird in derselben Zeit jedes Pferd nur $\frac{1}{6}$ von 4 Scheffeln erhalten dürfen. Da nun aber die Wirkungen gleicher Ursachen mit ihren Zeiten proportionirt sind, und 1 Pferd mit 4 Scheffeln einen Monat reicht, so wird es mit $\frac{1}{6}$ von 4 Scheffeln auch nur $\frac{1}{6}$ von einem Monate auskommen; daher werden 6 Pferde 4 Scheffel in $\frac{1}{6}$ Monat verzehren.

Hieraus folgt der Satz: Zur Erzeugung gleicher Wirkungen braucht die vielfache Kraft denjenigen Theil der zur einfachen Kraft gegebenen Zeit, welcher die einfache Kraft von der vielfachen Kraft ist.

c) Da 1 Pferd monatlich 4 Scheffel verzehrt, so werden 3 Pferde monatlich 3 . 4 oder 12 Scheffel verbrauchen. Wie vielfach nun 48 Scheffel von 12 Scheffeln sind, eben dasselbe Vielfache muß die gesuchte Zeit von einem Monate sein; weil gleiche Ursachen Wirkungen erzeugen, die im Verhältnisse der Zeiten stehen. Es sind aber 48 Scheffel das 4fache von 12 Scheffeln; daher kann man 3 Pferde mit 48 Scheffeln 4 Monate unterhalten.

3. Eine Familie von 8 Personen braucht zu ihrem jährlichen Unterhalte 600 ℳ; a) so wird dieselbe Familie 1000 ℳ, b) so wird ein Mitglied derselben die Summe von 600 ℳ, c) so werden 6 dieser Mitglieder 900 ℳ in welcher Zeit verbrauchen?

a) Welches Vielfache 1000 ℳ von 600 ℳ sind, dasselbe Vielfache muß die gesuchte Zeit von einem Jahre sein. Nun sind 1000 ℳ $\frac{5}{3}$ von 600 ℳ, also wird gedachte Familie $\frac{5}{3}$ Jahre oder 1 Jahr 8 Monate unter den gegebenen Bedingungen reichen.

b) Da 8 Personen in einem Jahre 600 ℳ brauchen, so dient jährlich jeder Person zum Unterhalte $\frac{1}{8}$ gedachter Summe; und weil sie in einem Jahre nur $\frac{1}{8}$ der Summe verbraucht, so wird sie mit der ganzen Summe 8 Jahre reichen; weil die Zeiten den Wirkungen gleicher Ursachen proportional sind.

Allgemeiner Satz: Zur Erzeugung gleicher Wirkungen braucht die einfache Kraft dasjenige Vielfache der zur vielfachen Kraft gehörigen Zeit, welches die vielfache Kraft von der einfachen ist.

c) Ein Mitglied der Familie braucht $\frac{1}{8}$ des ganzen Unterhalts, also werden 6 Mitglieder derselben $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ desselben verbrauchen. 900 ℳ sind aber $\frac{900}{600} = \frac{3}{2}$ mal 600 ℳ; daher werden 6 Mitglieder mit 900 ℳ das Vielfache von einem Jahre auskommen, welches $\frac{3}{2}$ von $\frac{3}{4}$ desselben sind; es ist aber $\frac{3}{2}$ von $\frac{3}{4}$ das Doppelte; daher reichen 6 Mitglieder 2 Jahre mit 900 ℳ.

Digitized by Google

Es ist, obige Sätze in Proportionen dargestellt:

1 Person : 8 Personen = 1 Jahr : A (Zeit für 1 Pers. mit 600 ℔ Unterhalt)
6 Personen : 1 Person = A : B (» » 6 » » 600 » »)
600 ℔ : 900 ℔ = B : C (» » 6 » » 900 » » .)
6 . 600 : 8 . 900 = 1 Jahr : C Jahren = 2 Jahren.

Die erste Proportion drückt das in dieser Aufgabe bei b), die zweite das in der vorigen Aufgabe unter b) ausgesprochene Gesetz aus, und die dritte ein schon früher oft erwähntes Gesetz. Die 3 Proportionen sind also richtig und aus ihnen kann man folgendes Gesetz ableiten: Wenn verschiedene Kräfte verschiedene Wirkungen erzeugen: so ist das Verhältniß ihrer Zeiten zusammengesetzt aus dem umgekehrten der Kräfte und dem geraden der Wirkungen. Haben also 30 Ochsen in 6 Monaten 56 Centner Heu verzehrt, so werden 24 Ochsen 84 Centner in $\left.\begin{matrix}24:30\\56:48\end{matrix}\right\} = 6$ M. : x) $11\frac{1}{4}$ Monat verzehrt haben.

4. 1200 Mann haben 5400 Scheffel Mehl à 75 ℔ zu Brot und sind damit auf 9 Monate versorgt; a) so wird dieselbe Mannschaft mit 6000 Scheffeln Mehl von demselben Gewichte, b) so wird ein Mann mit jenen 5400 Scheffeln Mehl, c) so wird ein Mann mit einem Scheffel Mehl, d) so werden 840 Mann mit jenen 5400 Scheffeln Mehl, e) so werden 900 Mann mit 3000 Scheffeln Mehl wie lange reichen?

a) 6000 Scheffel sind $\frac{6000}{5400} = \frac{10}{9}$ von 5400 Scheffeln, also wird dieselbe Mannschaft auch $\frac{10}{9}$- von 9 Monaten = 10 Monaten mit 6000 Scheffeln reichen; weil gleiche Ursachen Wirkungen erzeugen, die den Zeiten proportional sind.

b) Ein Mann ist $\frac{1}{1200}$ von 1200 Mann, also wird er denselben Vorrath von Brot in dem 1200fachen der Zeit, in welcher die Mannschaft den ganzen Vorrath verbraucht, also 1200 . 9 Monate, das sind 900 Jahre, verbrauchen. (3. b.)

c) Da 1200 Mann 5400 Scheffel Mehl verbrauchen, so verzehrt jeder Mann in den 9 Monaten $\frac{9}{2}$ Scheffel, und er wird daher mit einem Scheffel Mehl nur $1 : \frac{9}{2} = \frac{2}{9} . 9$ oder 2 Monate reichen.

d) 840 Mann sind $\frac{840}{1200} = \frac{7}{10}$ von 1200 Mann, und daher langen sie mit dem Vorrathe $\frac{10}{7} . 9 = 12\frac{6}{7}$ Monate.

e) 900 Mann sind $\frac{900}{1200} = \frac{3}{4}$ von 1200 Mann, und 3000 Scheffel sind $\frac{3000}{5400} = \frac{5}{9}$ von 5400 Scheffeln, also sind diese auf $\frac{4}{3} . \frac{5}{9} . 9 = 6\frac{2}{3}$ Monaten mit Brot versorgt.

Anmerk. Endlich ist noch diejenige Aufgabe übrig, in welcher das Verhältniß der Kräfte gesucht wird; die speciellen Fälle derselben sind folgende:

1) In der Zeiteinheit wird eine Wirkung von der Einheit der Kraft erzeugt; a) in der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung, b) in einem Vielfachen der Zeiteinheit wird die einfache Wirkung, c) in einem Vielfachen der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung durch welche Kraft hervorgebracht?

Digitized by Google

2) In der Zeiteinheit wird eine Wirkung durch eine vielfache Kraft erzeugt; a) in der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung, b) in einem Vielfachen der Zeiteinheit wird die einfache Wirkung, c) in einem Vielfachen der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung durch welche Kraft dargestellt?

3) In einem Vielfachen der Zeiteinheit wird eine Wirkung durch eine vielfache Kraft hervorgebracht; a) in der Zeiteinheit wird dieselbe Wirkung, b) in demselben Vielfachen der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung, c) in einem andern Vielfachen wird die einfache Wirkung, d) in einem andern Vielfachen der Zeiteinheit wird ein Vielfaches der Wirkung durch welche Kraft ausgeführt?

1. In einem Tage hat ein Pflug 4 Morgen Land umgepflügt; a) so werden in einem Tage 6 Hufen 24 Morgen, b) so werden in 6 Tagen 9 Hufen 18 Morgen wie viele Pflüge beackern?

a) 6 Hufen zu 30 Morgen und 24 Morgen sind zusammen 204 Morgen; da nun in gleichen Zeiten die Wirkungen den Kräften proportional sind, und 204 Morgen das $\frac{204}{4}$ oder das 51fache von 4 Morgen sind, so ist zu dieser Arbeit auch das 51fache der Wirkung, also die Zahl von 51 Pflügen erforderlich.

b) In 6 Tagen wird ein Pflug $6 . 4$ oder 24 Morgen bestellen, und da 9 Hufen 18 Morgen oder 288 Morgen das 12fache von 24 Morgen sind, so braucht man das 12fache von einem Pfluge oder 12 Pflüge zur Bearbeitung der 9 Hufen 18 Morgen in 6 Tagen.

2. In 9 Wochen oder 54 Tagen haben 12 Arbeiter 1296 □Ruthen einer Chaussee gebrückt; a) so werden in einer Woche 2400 □Ruthen, b) so werden in 12 Wochen jene 1296 □Ruthen, c) so werden in 13 Wochen 3240 □Ruthen welche Zahl Arbeiter zu Stande bringen?

a) 2400 □R. sind $\frac{2400}{1296} = \frac{50}{27}$ von 1296 □R., daher sind zur verlangten Leistung $\frac{50}{27} . 12$ Arbeiter erforderlich, wenn sie 9 Wochen arbeiten dürften; da sie aber diese Arbeit in einer Woche vollenden sollen, so muß man bei derselben das 9fache derselben, also $9 . \frac{50}{27} . 12 = 200$ Arbeiter anstellen.

b) Weil 12 Wochen $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ von 9 Wochen sind, so braucht man zu derselben Arbeit $\frac{4}{3}$ von 12 oder 9 Arbeiter.

c) 13 Wochen sind $\frac{13}{9}$ von 9 Wochen und 3240 □R. $\frac{5}{2}$ von 1296 □R., daher sind zur gegebenen Leistung $\frac{9}{13} . \frac{5}{2} . 12 = 20\frac{10}{13}$ Arbeiter erforderlich.

Anmerk. Man wird bemerkt haben, daß die Schlüsse zur Berechnung des Verhältnisses der Arbeiter denen ganz ähnlich sind, welche zur Berechnung des Verhältnisses der Zeiten dienen; daher habe ich die letzte Gattung Aufgaben kurz behandelt. Nun mögen noch einige vermischte Aufgaben mit einigen andern Bedingungen folgen.

1. 1490 Mann haben auf 8 Monate Lebensmittel; wenn jeder $\frac{1}{4}$ Pfd. Brot täglich erhält, wie lange werden mit demselben Vorrathe von Lebensmitteln 2890 Mann reichen, wenn jeder dieselbe Portion täglich erhält?

Digitized by Google

Nach den vorigen Auflösungen erfährt man die Zeit auf folgende Weise sehr leicht. Es ist nämlich bekannt, daß die Ursachen und Zeiten bei gleichen Wirkungen in umgekehrten Verhältnissen zu einander stehen müssen; da nun 2890 Mann das $\frac{17}{7}$fache von 1190 Mann sind, so muß die gesuchte Zeit das $\frac{7}{17}$fache von 8 Monaten oder $3\frac{5}{17}$ Monate sein.

Eine andere Auflösung ist folgende. 1190 Mann haben 1190 monatliche Portionen eines Mannes, so besteht ihr ganzer Vorrath aus 1190 . 8 monatlichen Portionen eines Mannes. Nun verbrauchen 2890 Mann monatlich 2890 monatliche Portionen eines Mannes, daher reichen sie mit jenem Vorrathe so viele Monate, wie vielfach derselbe von den 2890 monatlichen Portionen eines Mannes ist, also $\frac{1190 \cdot 8}{2890} = 3\frac{5}{17}$ Monaten.

2. 1500 Mann haben auf 9 Monate Lebensmittel; nach $1\frac{1}{2}$ Monaten gehen 300 Mann ab; wie lange werden noch die Zurückbleibenden mit dem Reste der Lebensmittel bei unveränderter Portion reichen?

Nach $1\frac{1}{2}$ Monaten bleiben noch Lebensmittel auf $7\frac{1}{2}$ Monate für 1500 Mann übrig, und da 300 Mann abmarschirt sind, so bleiben noch 1200 Mann; diese sind $\frac{4}{5}$ der ersten Mannschaft, also reichen sie mit dem Reste der Lebensmittel $\frac{4}{5} \cdot 7\frac{1}{2} = 9\frac{3}{8}$ Monaten.

Oder: 1500 Mann haben für $7\frac{1}{2}$ Monate 1500 . $7\frac{1}{2}$ monatliche Portionen eines Mannes. 1200 Mann verzehren monatlich 1200 monatliche Portionen eines Mannes, also können sie mit jenem Vorrathe noch $\frac{1500 \cdot 7\frac{1}{2}}{1200}$ $= 9\frac{3}{8}$ Monaten reichen.

3. 1250 Mann haben auf 13 Monate Lebensmittel, nach 2 Monaten kommen noch 128 dazu; wie lange können sie noch bei unveränderter Portion reichen?

1250 Mann haben nach 2 Monaten nur noch auf 11 Monate Lebensmittel, und da jetzt $1250 + 128 = 1378$ Mann sind, so können sie nur noch $\frac{1250}{1378} \cdot 11 = 9\frac{674}{689}$ Monaten reichen.

4. 1440 Mann haben auf $8\frac{1}{2}$ Monat Lebensmittel, nach einem Monate kommen 60 Mann dazu, und da die Portionen groß sind, so werden sie auf $\frac{4}{5}$ herabgesetzt; wie lange werden noch diese Mann damit reichen?

Nach 1 Monat haben noch die 1440 Mann auf $7\frac{1}{2}$ Monate Lebensmittel, wenn jeder die frühere ganze Portion erhält. Nun ist aber die Mannschaft durch den Zumarsch auf 1500 Mann angewachsen, und jeder soll nur $\frac{4}{5}$ der frühern Portion erhalten; daher reichen sie $\frac{1440}{1500} \cdot \frac{5}{4} \cdot 7\frac{1}{2}$ $= 9$ Monate.

Anmerk. Wenn man das Vorhergehende gut begriffen hat, so wird man ähnliche Aufgaben, wie vorstehende, und wenn sie auch noch zusammengesetzter werden, leicht lösen können, daher verweile ich bei denselben nicht länger, und will nur noch eine andere Gattung anführen, die vielleicht interessanter ist.

5. 8 Mann können einen Acker in 6 Tagen, 9 andere Arbeiter können denselben Acker in 4 Tagen bestellen; nun stellt der Gutsherr 6 Arbeiter der

Digitized by Google

ersten und ebenso viele der andern Art bei derselben Arbeit an; in wie vielen Tagen werden sie den Acker bearbeitet haben?

Ein Arbeiter der ersten Art bearbeitet in einem Tage $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$ und einer der zweiten Art in einem Tage $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$ des Ackers; daher werden 6 Mann der ersten und 6 Mann der zweiten Art $\frac{6}{48} + \frac{6}{36} = \frac{7}{24}$ des Ackers bestellen; und sie vollenden daher die Arbeit in $\frac{24}{7}$ oder $3\frac{3}{7}$ Tagen.

6. 6 Arbeiter der Art A bearbeiten 12 Morgen in 5 Tagen, 9 Arbeiter der Art B haben 16 Morgen in 3 Tagen bearbeitet. a) In welchem Verhältnisse stehen die Kräfte dieser Arbeiter? Die Kraft eines Arbeiters A verhält sich zur Kraft eines Arbeiters B $= \frac{12}{6.5} : \frac{16}{9.3} = 81 : 80$.

b) 8 A Arbeiter und 12 B Arbeiter werden in wie vielen Tagen 8 Hufen 18 Morgen bestellen?

Ein Arbeiter A bearbeitet in 1 Tage $\frac{12}{6.5} = \frac{2}{5}$, also 8 A Arbeiter $\frac{8 \cdot 2}{5} = \frac{16}{5}$ Morgen in einem Tage.

Ein Arbeiter B beschickt $\frac{16}{9.3}$, also 12 Arbeiter B beschicken in einem Tage $\frac{12 \cdot 16}{9 \cdot 3} = \frac{64}{9}$ Morgen. Beide Mannschaften bestellen also in einem Tage zusammen $\frac{16}{5} + \frac{64}{9} = \frac{536}{45}$ Morgen, und sie gebrauchen daher zur Leistung des Verlangten $(8 \cdot 30 + 18) : \frac{536}{45} = 21\frac{178}{536}$ Tage.

c) Nachdem 15 Arbeiter A bereits 4 Tage an einem Felde von 19 Hufen 6 Morgen gearbeitet haben, miethet der Gutsherr noch 6 Arbeiter B zu dieser Arbeit; in welcher Zeit werden die 21 Arbeiter das ganze Feld bearbeitet haben?

15 Arbeiter A haben in 4 Tagen $15 \cdot 4 \cdot \frac{2}{5} = 36$ Morgen $= 1$ Hufe 6 Morgen bestellt, also bleiben noch zur Bearbeitung für die 21 Arbeiter 18 Hufen.

Da nun 15 A Arbeiter täglich $15 \cdot \frac{2}{5}$ oder 9, und 6 B Arbeiter täglich $\frac{32}{9}$ Morgen bestellen, so bearbeiten täglich die 21 Mann $12\frac{5}{9}$ Morgen, und sie haben daher ihre Arbeit in $(18.30 : 12\frac{5}{9})$ $43\frac{1}{113}$ Tagen beendigt.

VI. Beziehungen zwischen dem Gelde und der Zeit.

In den Beziehungen des Geldes und der Zeit auf einander tritt jenes als eine Ursache oder Kraft auf, und ihr Erzeugniß ist wieder Geld. Weil die hierin obwaltenden Beziehungen gewisse Namen und gesetzliche Bestimmungen mit sich führen, so wird es nicht undienlich sein, dieselben etwas genauer zu zergliedern. D habe Gelegenheit, ein vortheilhaftes Geschäft zu machen, wenn er darin baares Geld in Anwendung bringen kann; sein Geldvorrath ist dazu nicht hinreichend, daher ersucht er den C, welcher Geld vorräthig liegen hat, eine gewisse Summe K ihm auf eine gewisse Zeit T, gegen eine Vergütigung Z für die Benutzung der Summe K, zu leihen. C möge nun unter diesen Bedingungen das Gesuch des D erfüllen, so wird dadurch D der Schuldner (Debitor, debere, Etwas schuldig sein) des C,

Digitized by Google

und C der Gläubiger (Creditor, credere, trauen, glauben) des D, denn C glaubt, daß D ihm die geliehene Summe K bezahlen werde. Das Geld Z, welches D dem C für die Benutzung des Geliehenen giebt, heißt der Zins, welches Wort von dem Lateinischen Census herkommen soll. (Censere, dafür halten, meinen, schätzen; census war das Verzeichniß der Römischen Bürger nach ihrem Namen und Vermögen, und bezeichnet auch das Vermögen selbst.) Die geliehene Summe K heißt das Kapital (Caput, der Kopf, das Haupt, das Hauptstück; capitalis, Alles, was das Haupt, daher das Leben betrifft, also jede Sache von der höchsten Wichtigkeit). Die Zeit, nach welcher das geliehene Kapital zurückgezahlt werden soll, heißt der Termin, die Frist, das Ziel (Terminus, die Grenze jedes Dinges, daher Ziel, Ende einer Sache). Der Zins wird für jede 100 des Kapitals bestimmt, und zwar, wenn keine nähere Bestimmung der Zeit angegeben ist, für die Zeit eines Jahres. Der Zins für 100 wird die Procente genannt (Centum hundert, pro für, anstatt, in Ansehung, nach Beschaffenheit, also pro centum für 100), nämlich: sind die Procente 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc., so hat man das Vielfache von 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. als Zins zu geben, welches das Kapital von 100 ist; ist das Kapital in Thlr., Gulden, Frd'or, Sgr. ausgedrückt, so sind auch die Procente Thlr., Gulden, Frd'or, Sgr., und zwar immer während der Zeit eines Jahres, wenn nicht ausdrücklich die Zeit in Monaten, Tagen ꝛc. angegeben ist. Die Größe der Procente ist nicht willkürlich, sondern sie wird durch Gesetze jedes Staates bestimmt, im Preuß. Staate sind die üblichen Landesprocente 5, im Handel können sie bis 10 steigen, und es giebt hierin auch Ausnahmen von höhern als 10 Procenten. Die gesetzliche Bestimmung der Grenzen von den Procenten ist eine nothwendige Sache, denn es giebt eine gewisse, arbeitsscheue Klasse von Menschen, die vom Wucher nicht nur allein lebt, sondern große Reichthümer anhäuft, die nichts als nur Geld achtet und ehrt, die durch Nichts, als nur durch harte, d. h. durch Geldstrafe von verbrecherischem Wucher abgehalten werden kann.

Die Zinsen heißen auch Interessen (Interesse dazwischen sein, interest es ist daran gelegen, dienlich, nützlich); die Berechnung der Zinsen heißt die Zinsrechnung, auch Usurenrechnung (Usura die Nutzung, der Gebrauch einer Sache, das Geld, welches man für die Benutzung eines geborgten Kapitals giebt.

In der Zinsrechnung kommen also folgende Stücke vor: 1) das Kapital, 2) die Procente, 3) die Zeit, der Termin, 4) der Zins; sind 3 von diesen Stücken gegeben, so kann man das vierte berechnen; daher stellen sich folgende vier Aufgaben dar:

1) aus dem gegebenen Kapitale, den gegebenen Procenten und der gegebenen Zeit — die Zinsen zu berechnen;

2) aus dem gegebenen Kapitale, den gegebenen Procenten und dem gegebenen Zinse — die Zeit zu finden;

Digitized by Google

3) aus dem gegebenen Kapitale, der gegebenen Zeit und dem gegebenen Zinse — die Procente;

4) aus den gegebenen Procenten, der gegebenen Zeit und dem gegebenen Zinse — das Kapital zu berechnen.

Die Procente werden auch mit pCt., $\frac{0}{0}$, bezeichnet, und heißen auch der Zinsfuß (Z. F.).

Zur Zinsrechnung gehört auch die Diskonto- und Rabattrechnung. Disconto heißt der Abzug, die Abrechnung, ein Italienisches Wort; discontire, abziehen, abrechnen, nämlich vom Werthe eines Wechsels; Rabatt, Rabatto, gleichfalls ein Italienisches Wort, und bedeutet Abzug, Nachlaß, Erlaß vom festgesetzten Waarenpreise; beide Wörter, Diskonto und Rabatt, kommen in der Kaufmannssprache vor, und werden später mit ihrem Gebrauche in der Rechnung genauer erörtert werden.

A. Zinsrechnung.

1. D hat von C 2450 Thlr. zu $4\frac{1}{2}\ \frac{0}{0}$ auf 1 Jahr 8 Monate geliehen; wie viel betragen die Zinsen während dieser Zeit?

Man kann alle diese Aufgaben sowohl durch Schlüsse als auch durch Proportionen, wie durch den Kettensatz berechnen. Ein Proc. ist $\frac{1}{100}$ der Summe, so ist $1\ \frac{0}{0}$ von $2450 = \frac{2450}{100}$, daher sind $4\frac{1}{2}$ derselben $= \frac{4\frac{1}{2} \cdot 2450}{100}$. Dieses ist der einjährige Zins; man sucht aber den Zins von 1 Jahre 8 Monaten; folglich ist dieser $1\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot \frac{2450}{100} = 183\frac{3}{4}$ Thlr.

Proportionen. $100 : 2450 = 4\frac{1}{2} : z$ (1 Jahr)

$1 : 1\frac{2}{3} = z : Z\ (1\frac{2}{3}$ Jahr)

$4 : 245 = 3 : Z = 183\frac{3}{4}$.

2. Wenn 4860 Thlr., zu $4\frac{1}{3}\ \frac{0}{0}$ verliehen, in einer gewissen Zeit 526 Thlr. 15 Sgr. an Zinsen getragen haben; wie lang stand es auf Zinsen?

$4\frac{1}{3}\ \frac{0}{0}$ in einem Jahre betragen $\frac{1}{3} \cdot \frac{4860}{100}$; daher stand es $526\frac{1}{2} : \frac{1}{3} \times \frac{486}{10} = \frac{1053}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10}{13 \cdot 486} = 2\frac{1}{2}$ Jahren.

Proportionen. $100 : 4860 = 4\frac{1}{3} : z$ (1 Jahr)

$1 : J = z : 526\frac{1}{2}$ (J Jahre)

$5 : 2J = 1 : 1$; also $J = 2\frac{1}{2}$ Jahren.

3. In $12\frac{1}{2}$ Jahren haben 13 840 Thlr. Pupillengelder 4325 Thlr. Zinsen von der Berliner Bank eingetragen; zu wie vielen Procenten standen sie verzinset?

Da in einem Jahre $1\ \frac{0}{0}$ von 13 840 Thlr. $\frac{13840}{100}$ beträgt, so ist $1\ \frac{0}{0}$ in $12\frac{1}{2}$ Jahren $= \frac{25}{2} \cdot \frac{13840}{100} = \frac{13840}{8} = 1730$ Thlr.; daher sind die Proc. $= 4325 : 1730 = 2\frac{1}{2}$.

Proportionen. $100 : 13\,840 = p : z$ (1 Jahr)

$1 : 12\frac{1}{2} = z : 4325\ (12\frac{1}{2}$ Jahre)

$1 : 346 = p : 865$; $p = 2\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

4. Ein Partikulier geht auf Reisen ins Ausland; um das dazu erforderliche Reisegeld nicht stets mit sich zu führen, sondern dasselbe in allen Hauptstädten von Banken oder Handlungshäusern beziehen zu können, giebt er sein Vermögen an die General-Direction der Seehandlungs-Societät in Berlin, welche $3\frac{1}{3}$ % jährlicher Zinsen zahlt. Während der 7 Jahre 8 Monate, die er auf seinen Reisen im Auslande zubrachte, hat er an Zinsen 39 100 Thlr. empfangen. Wie groß war sein Vermögen, das er auf Zinsen gab?

Da der Zins von 7 Jahren 8 Monaten oder $7\frac{2}{3}$ Jahren 39 100 Thlr. beträgt, so ist der jährliche Zins $= \frac{39\,100}{7\frac{2}{3}} = 5100$ Thlr.

Welches Vielfache nun 100 von den $3\frac{1}{3}$ Proc. ist, dasselbe Vielfache muß das Kapital von seinen jährlichen Zinsen sein; daher ist das Vermögen $= \frac{100}{3\frac{1}{3}} . 5100 = 153\,000$ Thlr.

Proportionen. $100 : K = 3\frac{1}{3} : z$ (1 Jahr)
$1 : 7\frac{2}{3} = z : 39\,100$ ($7\frac{2}{3}$ Jahre)
$900 : K = 1 : 170$; also $K = 153\,000$.

Anmerk. Da das Kapital als Ursache oder Kraft, die Zinsen als die Wirkung desselben betrachtet werden können, so haben diese Aufgaben mit denen der vorigen Nummer große Aehnlichkeit, und ich habe sie daher auch nur kurz behandelt.

Nun werde ich noch einige andere hierher gehörige Aufgaben folgen lassen, in welchen entweder die Summe oder Differenz oder das Verhältniß des Kapitals und der Zinsen vorkommen; und auch in ihnen kann eines der 4 Stücke: Kapital, Procente, Jahre, Zins gesucht werden.

5. Ein Kapital stand zu $4\frac{2}{3}$ % $2\frac{1}{4}$ Jahre lang auf Zinsen, und nach dieser Zeit zahlte man an Kapital und Zinsen 928 Thlr. 6 Sgr. zurück. Welches war das verliehene Kapital und wie viel betrugen die Zinsen während der genannten Zeit?

Da der einjährige Zins von 100 Thlr. $4\frac{2}{3}$ Thlr. beträgt; so ist der Zins von 100 Thlr. in $2\frac{1}{4}$ Jahren $4\frac{2}{3} . 2\frac{1}{4} = 10\frac{1}{2}$ Thlr., daher ist das Kapital sammt den Zinsen während der genannten Zeit $110\frac{1}{2}$ Thlr. Welches Vielfache nun das gegebene Kapital nebst den Zinsen $= 928{,}2$ Thlr. von $110\frac{1}{2}$ Thlr. ist, dasselbe Vielfache muß das gesuchte Kapital von 100 Thlr. sein, daher ist es $= \frac{928{,}2}{110{,}5} . 100 = 840$ Thlr. Folglich sind die Zinsen $= 928$ Thlr. 6 Sgr. $- 840$ Thlr. $= 88$ Thlr. 6 Sgr.

6. Auf wie viele Jahre müssen 360 Thlr. zu 4 % verliehen werden, wenn das Kapital sammt den Zinsen in der gesuchten Zeit 1000 Thlr. betragen sollen, die ein Kassen-Rendant als Kaution zu stellen hat?

Der Zins während der gesuchten Zeit beträgt $1000 - 360 = 640$ Thlr.; der einjährige Zins von 360 Thlr. zu 4 % ist $\frac{360}{100} . 4 = 14{,}4$ Thlr.; daher ist die gesuchte Zeit $= \frac{640}{14{,}4} = 44\frac{4}{9}$ Jahren.

Digitized by Google

7. Jemand hat die ziemlich sichere Aussicht, nach 8 Jahren eine Anstellung mit einem bedeutenden Gehalte zu erlangen, wenn er dann vermögend ist, 3000 Thlr. Kaution zu stellen; daher will er gegenwärtig seine Bedürfnisse möglichst beschränken, um die Zinsen seines Vermögens von 2084 Thlr. 15 Sgr. nach Verlauf gedachter Zeit zum Kapital geschlagen, die erwähnte Kaution leisten zu können. Zu welchen Procenten muß er sein Vermögen auf Zinsen unterzubringen suchen?

Die 8jährigen Zinsen seines Kapitals müssen also $3000 - 2084{,}_5$ Thlr. $= 915{,}_5$ Thlr. betragen; daher sind die einjährigen $= \frac{915{,}_5}{8} = 114{,}_{4375}$ Thlr. Welches Vielfache nun sein Vermögen von den einjährigen Zinsen desselben ist, dasselbe Vielfache muß 100 von den Procenten sein; oder umgekehrt: die Procente sind der Bruch von 100, welcher der einjährige Zins von dem Kapitale ist; folglich sind die gesuchten Proc. $= \frac{114{,}_{4375}}{2084{,}_5} . 100$ $= 5{,}_{48992}$; daher wird er seinen Zweck erreichen, wenn es ihm gelingt, sein Vermögen zu $5\frac{1}{2}$ % unterzubringen.

8. Ein Kapital, welches zu $3\frac{3}{4}$ % auf $5\frac{1}{2}$ Jahre verliehen, übertrifft die Zinsen während dieser Zeit um 11 620 Thlr. 15 Sgr. Wie groß ist dieses Kapital?

Die Zinsen in $5\frac{1}{2}$ Jahren zu $3\frac{3}{4}$ % von 100 Thlr. betragen $\frac{100 . 15 . 11}{100 . 4 . 2}$ $= \frac{165}{8}$ Thlr. $= 20\frac{5}{8}$ Thlr., und daher ist das Kapital 100 Thlr. um $79\frac{3}{8}$ Thlr. größer, als die genannten Zinsen desselben. Welches Vielfache nun der gegebene Ueberschuß $11\,620{,}_5$ Thlr. des gesuchten Kapitals über seine Zinsen von dem Ueberschusse $79\frac{3}{8}$ Thlr. des Kapitals 100 Thlr. über seine Zinsen ist, dasselbe Vielfache muß das gesuchte Kapital von dem Kapital 100 Thlr. sein; daher ist das gesuchte Kapital $= \frac{11\,620{,}_5}{79\frac{3}{8}} . 100$ $= 14\,640$ Thlr.

9. Wie lange muß ein Kapital zu $2\frac{2}{3}$ Procent auf Zinsen stehen, wenn es zu den Zinsen das Verhältniß von 5 zu 4 haben soll?

Die Zinsen des Kapitals 100 Thlr. betragen in einem Jahre $2\frac{2}{3}$ oder $\frac{8}{3}$ Thlr.; soll das Kapital nun zu seinen Zinsen das Verhältniß von 5 : 4 haben, so müssen die Zinsen in der gesuchten Zeit (5 : 4 = 100 : 80) 80 Thlr. betragen; daher ist die gesuchte Zeit $= 80 : \frac{8}{3} = 30$ Jahren.

10. Jemand hat, von jetzt an gerechnet, nach 4 Jahren 500 Thlr. zu 5 und nach 6 Jahren 800 Thlr. zu 4 Procent zu zahlen; der Gläubiger und Schuldner vereinigen sich dahin, daß dieser die Summe von 1300 Thlr. auf einmal zahle; nach wie vielen Jahren muß dieses geschehen, wenn beide Theile Nichts darunter leiden sollen?

Die Zinsen von 500 Thlr. zu 5 % in 4 Jahren betragen $\frac{500 . 5 . 4}{100} =$ 100 Thlr., und die von 800 Thlr. zu 4 % in 6 Jahren $\frac{800}{100} . 4 . 6 =$

192 Thlr.; daher belaufen sich die Zinsen beider Kapitale zu den gegebenen Proc. in den gegebenen Zeiten zusammen auf 292 Thlr.; sollen also beide Theile nichts verlieren, so müssen die Zinsen des Kapitals 1300 Thlr. in der gesuchten Zeit 292 Thlr. betragen. Weil nun die jährlichen Zinsen von 500 Thlr. zu $5\frac{0}{0}$ 25 Thlr., und von 800 Thlr. zu $4\frac{0}{0}$ 32 Thlr., also zusammen 57 Thlr. betragen, so ist die Zahlung nach $\frac{292}{57} = 5\frac{7}{57}$ Jahren zu leisten. Probe: 500 Thlr. zu $5\frac{0}{0}$ tragen in $5\frac{7}{57}$ Jahren $128\frac{4}{57}$ Thlr., 800 Thlr. zu $4\frac{0}{0}$ bringen in $5\frac{7}{57}$ Jahren $163\frac{13}{57}$ Thlr. Zinsen; dieses macht zusammen 292 Thlr.

Anmerk. In solchen Fällen, wie vorstehende Aufgabe einen darbietet, rechnet man die Aufgabe folgender Weise.

Zuerst berechnet man den mittlern Zinsfuß; dieser wird nun so gefunden: man berechnet den Zins von jedem Kapitale zu den gegebenen Procenten für die Zeit eines Jahres; daher 500 ℳ zu $5\frac{0}{0}$ geben in einem Jahre $\frac{5}{100} \cdot 5 = 25$ ℳ; 800 ℳ zu $4\frac{0}{0}$ geben in einem Jahre $\frac{4}{100} \cdot 4 = 32$ ℳ; nun addirt man beide jährliche Zinsen, dieses giebt $25 + 32$ ℳ $= 57$ ℳ; darauf dividirt man die Summe der jährlichen Zinsen der Kapitale durch den jährlichen Zins der Summe der Kapitale zu $1\frac{0}{0}$ gerechnet; 1300 zu $1\frac{0}{0}$ geben jährlich 13 ℳ, damit in obige 57 ℳ dividirt, giebt $\frac{57}{13} = 4\frac{5}{13}$, welches die mittlern Procente sind.

Den mittlern Termin zu erfahren, dividirt man die Summe der Zinsen der Kapitale zu den gegebenen Procenten in den gegebenen Zeiten durch die Summe der jährlichen Zinsen der Kapitale zu den gegebenen Procenten; jene Summe war 292 ℳ, diese 57 ℳ; also der mittlere Termin $= \frac{292}{57} = 5\frac{7}{57}$ Jahren.

11. 150 Thlr. sind zu $4\frac{0}{0}$ nach 3, 200 Thlr. zu $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ nach 4 und 250 Thlr. zu $5\frac{0}{0}$ nach 6 Monaten von der ersten Zeit angerechnet zu zahlen; die ganze Summe von 600 Thlr. soll auf einmal entrichtet werden; welches ist der mittlere Zinsfuß und der mittlere Termin?

150 ℳ	zu $4\frac{0}{0}$	tragen in	1 Jahr	6	ℳ	Zinsen,
200 „	„ $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$	„	„ „	9	„	„
250 „	„ $5\frac{0}{0}$	„	„ „	12,5	„	„

daher ist die Summe der jährlichen Zinsen 27,5 ℳ.

150 ℳ zu $4\frac{0}{0}$ bringen in 3 Monaten oder $\frac{1}{4}$ Jahr $\frac{6}{4}$ ℳ $= 1\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen,
200 „ „ $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ „ „ 4 „ „ $\frac{1}{3}$ „ $\frac{9}{3}$ „ $= 3$ „ „
250 „ „ $5\frac{0}{0}$ „ „ 6 „ „ $\frac{1}{2}$ „ $\frac{12\frac{1}{2}}{2}$ „ $= 6\frac{1}{4}$ „ „

Summe der Zinsen zu den gegebenen $\frac{0}{0}$ in den gegebenen Zeiten $= 10\frac{3}{4}$ ℳ;
also ist der mittlere Termin $= 10\frac{3}{4} : 27\frac{1}{2} = \frac{43}{110}$ Jahren $= 4\frac{36}{60}$ Monaten.

Anmerk. Die kurze Regel zur Berechnung des mittlern Zinsfußes ist diese: der mittlere Zinsfuß ist gleich der Summe der Produkte aus den Kapitalen und den Procenten, dividirt durch die Summe der Kapitale. Zur Berechnung des mittlern Termins: der mittlere Termin ist gleich der Summe der Produkte aus den Kapitalen, den Procenten und den Zeiten, dividirt durch die Summe der Produkte aus den Kapitalen und den Procenten.

Noch ein Beispiel zur Anwendung dieser Regel.

Digitized by Google

12. 135 Thlr. zu $4\frac{1}{3}$ % nach 5, 224 Thlr. zu $5\frac{1}{4}$ % nach 6, 364 Thlr. zu $5\frac{1}{2}$ % nach 7 Monaten zahlbar; soll die ganze Summe von 723 Thlr. auf einmal gezahlt werden, wann muß die Zahlung geleistet werden und welches ist der mittlere Zinsfuß?

Kapitale.	Proc.	Jährliche Zinsen.	Zeiten.	Zinsen in den gegebenen Zeiten.
135	$4\frac{1}{3}$	585	5	2925
224	$5\frac{1}{4}$	1176	6	7056
364	$5\frac{1}{2}$	2002	7	14014
Summen 723		3763		23995

Mittlerer Zinsfuß $= \frac{376300}{7230} = 5\frac{1468}{7230}$.

Mittlerer Termin $= \frac{2399500}{376300} = 6\frac{141700}{376300}$ Monaten.

Anmerk. In vorstehender Rechnung sind die jährlichen Zinsen mit den Zahlen der Monate, anstatt mit denen der Jahre, multiplicirt; aber die jährlichen Zinsen mit den Zahlen der Jahre multiplicirt, giebt den mittlern Termin in Jahren, und da er in Monaten zu suchen ist, so müßte man denselben mit 12 multipliciren, welches man dadurch erreicht, daß man die vorhergehende Verwandlung der Monate in Jahre unterläßt; denn diese Verwandlung geschieht durch die Division mit 12, und die nachfolgende durch die Multiplication mit 12, wodurch 12 aus der Rechnung geht.

13. Zwei Kaufleute, A, B, verbinden sich zu einem Handelsgeschäfte; A giebt zu demselben 580 Thlr., B 1305 Thlr.; nach beendigtem Geschäfte theilen sie den reinen Gewinn von 4116 Thlr. 20 Sgr. nach Verhältniß ihrer Einlagen; wie viel wird jeder erhalten?

580 ℳ : 1305 ℳ = 4 : 9; da sich die Kapitale wie 4 : 9 verhalten, so müssen in demselben Verhältnisse auch die Gewinne stehen; hat also der Gewinn das 4fache einer gewissen Summe, so muß der Gewinn des B das 9fache derselben, also beider zusammen das 13fache derselben Summe haben, welches $= 4116\frac{2}{3}$ ℳ; daher das Einfache $= \frac{4116\frac{2}{3}}{13}$; daher ist der Gewinn des A $= \frac{4 \cdot 4116\frac{2}{3}}{13} = 1266$ ℳ 20 Sgr., und der des B $= \frac{9 \cdot 4116\frac{2}{3}}{13} = 2850$ ℳ.

14. Von 3 Kaufleuten giebt A 510, B 680 und C 850 Thlr. zu einem gemeinschaftlichen Handelsgeschäfte her; den Gewinn von 3456 Thlr. theilen sie nach Verhältniß ihrer Beiträge; wie viel erhält jeder?

Durch Schlüsse wie vorher; durch Proportionen berechnet, liegt denselben folgender Satz zum Grunde: die Summe der Beiträge verhält sich zum Betrage Jedes, wie sich die Summe der Gewinne zum Gewinne Jedes verhält; daher

2040 : 510 = 3456 : A = 864 ℳ.
2040 : 680 = 3456 : B = 1152 „
2040 : 850 = 3456 : C = 1440 „

Digitized by Google

15. A giebt zu einem gemeinschaftlichen Handel 1200, B 2000 Thlr. A hat sein Geld 5, B 4 Monate in der Handlung gelassen; den reinen Gewinn von 910 Thlr. wollen sie unter sich nach Verhältniß ihrer Beiträge und der Zeiten unter sich theilen; wie viel gebührt Jedem von dem Gewinne?

Der monatliche Gewinn von 100 ℔ ist eine gewisse Summe und sei das Einfache; so ist der monatliche Gewinn von 1200 ℔ das 12fache, und in 5 Monaten das 60fache. Auf gleiche Weise findet man den Gewinn von 2000 ℔ in 4 Monaten = dem 80fachen; daher hat der ganze Gewinn das 140fache = 910 ℔; also das Einfache $\frac{910}{140} = 6\frac{1}{2}$ ℔; daher ist der Gewinn des A $= 60 . 6\frac{1}{2} = 390$, und der des B $= 80 . 6\frac{1}{2} = 520$ ℔.

Anmerk. Wenn die Beiträge der Theilnehmer einer Handlung nicht gleich lange in der Handlung verwendet werden, so kann eigentlich der Gewinn nicht genau nach Verhältniß der Einlagen und der Zeiten getheilt werden, sondern diese Theilung gestaltet sich dann nach einem andern Verhältnisse. Weil diese Berechnungen sowohl interessant, wie auch von Wichtigkeit sind, so will ich sie genauer zergliedern. Da diese Untersuchung mit Gleichungen zu thun hat, so setzt sie einige Kenntnisse der Algebra voraus; daher werden das Nachfolgende auch nur diejenigen Leser vollkommen verstehen, denen jener Theil der Arithmetik nicht ganz fremd ist, und ich kann daher unbeschadet der Deutlichkeit diese Art Aufgaben allgemein behandeln.

16. A möge ein Kapital K zu einer Handlung verwenden, nach M Monaten tritt B dieser Handlung mit einem Kapitale k bei; gemeinschaftlich führen sie nun noch die Handlung m Monate und finden am Schlusse derselben, nach Abzug ihrer Beiträge und der Unkosten, einen reinen Gewinn G, den sie nun, nach Verhältniß ihrer Einlagen und der Zeiten, unter sich theilen wollen; wie viel gebührt jedem von demselben?

Hier wird vorausgesetzt, daß die monatlichen Procente, p, stets dieselben während der M und m Monate geblieben sind.

A ziehet in M Monaten von seinem Kapitale K zu p monatlichen Proc. $\frac{K.p.M}{100}$. Da nun B der Handlung beitritt, so ist das Kapital des A in der Handlung nicht mehr K allein, sondern es ist $K + \frac{KpM}{100}$; dieses läßt nun A noch m Monate zu $p\frac{0}{0}$ stehen; daher ziehet er von demselben in den m Monaten noch $\left(\frac{K + \frac{KpM}{100}}{100}\right) . pm$, folglich ist der ganze Gewinn des A in dem M + m Monaten

$$\frac{KpM}{100} + \left(\frac{K + \frac{KpM}{100}}{100}\right) . p . m = \frac{100KpM + 100Kpm + KppMm}{100 . 100}.$$

Der Gewinn des B in m Monaten von seinem Kapitale k zu p monatlichen Procenten beträgt $\frac{kpm}{100}$; daher ist $\frac{100KpM + 100Kpm + KppMm}{100 . 100} + \frac{kp.m}{100} = G.$

Digitized by Google

In dieser Gleichung sind alle Größen K, k, M, m und G gegeben und daher bekannt, nur p ist unbekannt und kann durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung gefunden werden. Ordnet man diese Gleichung in Bezug auf p, so erhält man $pp + 100 . \left(\frac{KM + Km + km}{KMm}\right) p = \frac{100 . 100 G}{KMm}$

daher $p = -50\left(\frac{KM + Km + km}{KMm}\right)$

$$\pm \sqrt{\frac{100^2 . G}{KMm} + 50^2 . \left(\frac{KM + Km + km}{KMm}\right)^2}$$

Setzt man in diesen Ausdruck für p die gegebenen Zahlen der 15. Aufgabe anstatt der Buchstaben, also $K = 1200$ ℔, $k = 2000$ ℔, $M = 1$, $m = 4$, $G = 910$; so findet man:

$$p = -50 . \left(\frac{1200 . 5 + 2000 . 4}{1200 . 1 . 4}\right) \pm \sqrt{\frac{100^2 . 910}{1200 . 1 . 4} + 50^2 . \left(\frac{1200 . 5 + 2000 . 4}{1200 . 1 . 4}\right)^2}$$

oder $p = -\frac{7000}{48} \pm \sqrt{\frac{91000}{48} . \left(\frac{7000}{48}\right)^2}$

oder $p = \frac{-7000 \pm 7305,_{3405}}{48} = 6,_{36126}$.

Hier kann nur das positive Zeichen Giltigkeit haben, weil sich bei dem Handel ein Gewinn und kein Verlust herausstellt.

Da nun der Gewinn des $A = \frac{100 Kp (M + m) + KppMm}{100 . 100}$ ist, so erhält $A = \frac{100 . 1200 . 6,_{36126} . 5 + 1200 . 6,_{36126}^2 . 1 . 4}{100 . 100} =$

$401,_{0991}$ ℔ $= 401$ ℔ $2,_{973}$ Sgr.

Der Gewinn des B ist $= \frac{Kmp}{100} = \frac{2000 . 4 . 6,_{36126}}{100} = 508,_{9008}$ Thlr. $= 508$ ℔ $27,_{024}$ Sgr.

Nach obiger Rechnung hat also A $401,_{0991} - 390 = 11,_{0991}$ ℔ zu wenig und ebenso viel B zu viel erhalten.

Die Differenzen wachsen aber bedeutender, wenn M in Bezug auf m größer wird; dieses wird man in folgendem Beispiele erkennen, das ich nach beiden Methoden berechnen will.

17. A möge ein Handelsgeschäft mit 5000 Thlr. beginnen; nach 9 Monaten verbindet sich B mit ihm und bringt ein Kapital von 7000 Thlr. zum Handel mit. Nach 6 Monaten ihres gemeinschaftlichen Handels mögen Umstände eintreten, welche die Fortsetzung ihres gemeinschaftlichen Handels nicht gestatten. Nach Abzug ihrer Beiträge und der Unkosten finden sie einen reinen Gewinn von 4680 Thlr.; wie viel gebührt jedem davon?

Nach der gewöhnlichen Rechnungsweise ist der Gewinn des A in den $9 + 6$ oder 15 Monaten das $\frac{5000 . 15}{100} = 750$fache einer gewissen Summe: der Gewinn des B beträgt in den 6 Monaten das $\frac{7000 . 6}{100} = 420$fache derselben Summe; daher beider Gewinn zusammen = dem 1170fachen;

Digitized by Google

daher hat A $\frac{750}{1170} = \frac{25}{39}$, und B $\frac{420}{1170} = \frac{14}{39}$ des ganzen Gewinns; also $A = \frac{25}{39} . 4680 = 3000$ ℳ und $B = \frac{14}{39} . 4680 = 1680$ ℳ.

Nach der richtigen Verfahrungsart müssen zuerst die Procente berechnet werden, und dazu haben wir bereits die Formel entwickelt, welche war:

$$p = -50\left(\frac{K(M+m)+km}{KMm}\right) \pm \sqrt{\frac{100^2 . G}{KMm} + 50^2 . \left(\frac{K(M+m)+km}{KMm}\right)^2}$$

Hierin hat man $K = 5000$, $M = 9$, $k = 7000$, $m = 6$, $G = 4680$ zu setzen, so erhält man

$$p = -50\left(\frac{5000.15+7000.6}{5000.9.6}\right) \pm \sqrt{\frac{100^2.4680}{5000.9.6} + 50^2 . \left(\frac{5000.15+7000.6}{5000.9.6}\right)^2}$$

$p = 3{,}6863956$ oder $p = 3{,}6864$.

Der Kürze wegen darf man nur den Gewinn des B suchen und denselben von dem Ganzen subtrahiren, so hat man den des A. Es war der Gewinn des $B = \frac{kmp}{100}$, also ist er $= \frac{7000 . 6 . 3{,}6864}{100} = 1548{,}246$ ℳ und der des $A = 4680 - 1548{,}246 = 3131{,}754$ ℳ. A erhält also nach diesem Verfahren $131{,}754$ ℳ mehr, und B ebenso viel weniger als nach der gewöhnlichen Rechnungsweise. Noch ein anderes Beispiel.

18. A und B unternehmen gemeinschaftlich einen Handel, A mit einem Beitrage von 3600 Thlr., B mit einem von 5400 Thlr.; nach 10 Monaten ihres gemeinschaftlichen Handels nimmt B 3000 Thlr. zu einem gewissen Zwecke aus der Handlung; 8 Monate darauf halten sie Rechnung, und finden einen reinen Gewinn von 4140 Thlr.; wie viel erhält Jeder von demselben?

Nach der gewöhnlichen Rechnungsweise ist der Gewinn des A das $\frac{3600.18}{110} = 648$fache einer gewissen Summe, nämlich der monatlichen Procente; der Gewinn des B das $\frac{5400.10}{100} = 540$fache während der 10 Monate, und während der 8 Monate das $(\frac{5400-3000}{100}) . 8 = 192$fache, also zusammen das 732fache der monatlichen Procente. Daher ist der Gewinn beider = dem 1380fachen = 4140 ℳ, daher sind die monatlichen Procente = 3 ℳ, also erhält $A = 3 . 648 = 1944$ ℳ, und $B = 3 . 732 = 2196$ ℳ.

Die richtige Auflösung unter Annahme gleicher monatlichen Procente p giebt nachfolgende Resultate.

A gebe das Kapital K, B das Kapital k, nach M Monaten vermindere B sein Kapital um k′, und m Monate darauf mögen beide den reinen Gewinn G unter sich theilen. Der Gewinn des A in M Monaten zu p monatlichen Procenten beträgt $\frac{KpM}{100}$, nach dieser Zeit hat er in der Handlung $K + \frac{KpM}{100} = \left(\frac{100+Mp}{100}\right) K$, und diese tragen ihm in m Monaten zu p monatlichen Proc. $\frac{(100+Mp)\,Kpm}{100.100}$; daher ist der ganze Gewinn des A

Digitized by Google

in den $M+m$ Monaten $= \frac{KpM}{100} + \frac{(100+Mp)\,Kpm}{100\,.\,100}$. Der Gewinn des B in den M Monaten ist $\frac{kpM}{100}$, und nach dieser Zeit hat er in der Handlung $k + \frac{kpM}{100} - k'$, diese tragen ihm einen Gewinn in m Monaten $\frac{(100\,(k-k')+kpM)\,pm}{100\,.\,100}$; daher ist sein ganzer Gewinn $\frac{kpM}{100} + \frac{(100\,(k-k')+kpM)\,pm}{100\,.\,100}$; folglich ist der Gewinn beider:

$$\frac{KpM}{100} + \frac{(100+Mp)\,Kpm}{100\,.\,100} + \frac{kpM}{100} + \frac{(100\,(k-k')+kpM)\,pm}{100\,.\,100} = G;$$

ordnet man diese Gleichung in Bezug auf p, so erhält man folgende Gleichung:

$$p^2 + 100\,.\left\{\frac{(K+k)\,M+(K+k-k')\,m}{(K+k)\,Mm}\right\}p = \frac{100^2\,.\,G}{(K+k)\,Mm};\ \text{also}$$

$$p = -50\,.\left\{\frac{(K+k)\,M+(K+k-k')\,m}{(K+k)\,Mm}\right\} \pm \sqrt{\frac{100^2\,.\,G}{(K+k)\,Mm} + 50^2\,.\left\{\frac{(K+k)\,M+(K+k-k')\,m}{(K+k)\,Mm}\right\}^2}$$

Setzt man in diesen Ausdruck $K = 3600$, $k = 5400$, $k' = 3000$, $M = 10$, $m = 8$, so findet man

$$p = -50.\left\{\frac{9000.10+6000.8}{9000.10.8}\right\} \pm \sqrt{\frac{100^2.4140}{9000.10.8} + 50^2.\left(\frac{9000.10+6000.8}{9000.10.8}\right)^2}$$

oder $p = \frac{-115 \pm 146,_{64583}}{12} = 2,_{63715}$.

Daher ist der Gewinn des $A = \frac{KpM}{100} + \frac{(100+Mp)\,Kpm}{100\,.\,100} = \frac{3600\,.\,10\,.\,2,_{63715}}{100} + \frac{(100+10\,.\,2,_{63715})\,.\,3600\,.\,8\,.\,2,_{63715}}{100\,.\,100} = 1909,_{164531528}$ ℛ.

Der Gewinn des $B = \frac{KpM}{100} + \left\{\frac{100\,(k-k')+kpM}{100\,.\,100}\right\}pm = 2230,_{830797292}$ ℛ, und beider Gewinne zusammen $= 4139,_{99532882}$ ℛ, also sehr nahe 4140 ℛ.

Löhmann giebt in seinem Handbuche für juridische und staatswirthschaftliche Rechnungen folgende Aufgabe:

19. A und B verbinden sich zu einem Handel, A mit einem Beitrage von 2000, B mit einem von 1800 Thlr. Nach 4 Monaten tritt C dieser Handlung mit 2500 Thlr. bei, und 5 Monate später schließt sich derselben noch D mit 3200 Thlr. an. 9 Monate nach dem Beitritte des Letztern stirbt C; die Erben desselben wollen keinen Antheil an diesen Handelsgeschäften

Digitized by Google

nehmen, weswegen dieselben vorläufig geschlossen werden. Nach Abzug aller Unkosten findet sich ein reiner Kassenbestand von $10\,269\frac{3}{28}$ Thlr. Nun ist die Frage 1) wie viel die Erben des C erhielten; 2) wie hoch sich dieses Geschäft jährlich rentirte?

Löhmann findet durch seine Rechnung, daß die Erben des C $2718\frac{3}{4}$ Thlr. erhielten, und daß das Geschäft jährlich $7\frac{1}{2}$ Procent einbrachte.

Da mir das erwähnte Handbuch von Löhmann nicht eigenthümlich gehört, so habe ich bei flüchtigem Blättern in demselben zufällig jene Aufgabe gefunden, deren Data, so wie deren Resultate ich mir notirte, ihre Berechnung aber nicht gelesen habe; folgende Rechnung führt aber zu denselben Resultaten.

Kapitale.	Monate.	Verhältnißzahlen der Antheile.	
D = 3200 Thlr.	9	9 . 32 = 288	144
C = 2500 "	14	14 . 25 = 350	oder 175
B = 1800 "	18	18 . 18 = 324	oder 162
A = 2000 "	18	18 . 20 = 360	180
		Summe	661

$661 : 175 = 10\,269\frac{3}{28}$ ℳ : Antheile des C $= 2718\frac{3}{4}$ ℳ.

Es haben also 2500 ℳ in 14 Monaten sich in $2718\frac{3}{4}$ ℳ vermehrt; daher ist die Vermehrung während dieser Zeit $2718\frac{3}{4} - 2500 = 218\frac{3}{4}$ ℳ. Nun ist die Frage, wenn 2500 ℳ in 14 Monaten $218\frac{3}{4}$ ℳ einbringen, wie viel sie in 12 Monaten eintragen werden?

12 Monate $= \frac{6}{7}$ mal 14 Monate, also

$$2500 : \tfrac{6}{7} . 218\tfrac{3}{4} = 100 : p = \tfrac{6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5} = 7\tfrac{1}{2}\,\%.$$

Nun will ich dieselbe Aufgabe in voriger Art behandeln. Die monatlichen Procente seien p, so ist der Gewinn des A

in 4 Monaten $\frac{2000 . p . 4}{100}$ . . . . . $= 80p$

" 5 " $\left(\frac{2000 + 80p}{100}\right) . 5p$ . . $= 100p + 4p^2$

" 9 " $\left(\frac{2000 + 180p + 4p^2}{100}\right) . 9p = \underline{180p + 16{,}2p^2 + 0{,}36p^3}$

also der gesammte Gewinn des A . . . . $= 360p + 20{,}2p^2 + 0{,}36p^3$

Eben so findet man den Gewinn des B

in 4 Monaten $\frac{1800 . 4p}{100}$ . . . . . $= 72p$

" 5 " $\left(\frac{1800 + 72p}{100}\right) . 5p$ . . $= 90p + 3{,}6p^2$

" 9 " $\left(\frac{1800 + 162p + 3{,}6p^2}{100}\right) . 9p = \underline{162p + 14{,}58p^2 + 0{,}324p^3}$

daher ist der ganze Gewinn des B . . $= 324p + 18{,}18p^2 + 0{,}324p^3$

Digitized by Google

Der Gewinn des C ist

in 5 Monaten $\frac{2500 \cdot 5p}{100} \ldots\ldots = 125p$

„ 9 „ $\left(\frac{2500+125p}{100}\right) 9p \ldots = \underline{225p + 11{,}_{25}p^2}$

Folglich der ganze Gewinn des C $\ldots = 350p + 11{,}_{25}p^2$

Der Gewinn des D beträgt

in 9 Monaten $\frac{3200 \cdot 9p}{100} \ldots\ldots = 288p.$

Der gesammte Gewinn Aller $= 1322p + 49{,}_{63}p^3 + 0{,}_{684}p^3$, dazu die Einlage Aller $= 9500$ ℔ gerechnet, giebt den Kassen-Bestand $= 10\,269\frac{3}{28}$ ℔; folglich ist

$0{,}_{684}p^3 + 49{,}_{63}p^2 + 1322p = 769\frac{3}{28} = 769{,}_{107142857}.$

Man löset diese Gleichung am besten durch Näherung auf. Es ist

$9{,}_{684}p^3 + 49{,}_{63}p^2 + 1322p - 769{,}_{107142857} = 0.$

Setzt man hierin $p = 0{,}_{56}$, so wird diese Gleichung $= -13{,}_{1030533513}$, und für $p = 0{,}_{57}$ wird sie gleich $0{,}_{684316155}$; dieser Werth ist also sehr nahe dem Werthe von p. Dem wahren Werthe von p noch näher zu kommen, setze man der Kürze wegen die Koefficienten der Potenzen von p gleich A, B, C, D, also $A = 0{,}_{684}$, $B = 49{,}_{63}$, $C = 1322$, $D = -769{,}_{107142857}$, und $p = w - w'$, so ist

$Ap^3 = A(w-w')^3 = A(w^3 - 3w^2w' + 3w.w'^2 + w'^3)$

$Bp^2 = B(w-w')^2 = B(w^2 - 2ww' + w'^2)$

$Cp = \ldots\ldots C(w-w')$

$D = \ldots\ldots D$

$0 = Aw^3 + Bw^2 + Cw + D.(3Aw^2 + 2Bw + C)w' + (3Aw + B)w'^2 - Aw'^3.$

Da nun w' ein kleiner Bruch sein muß, so kann man die höhern Potenzen von w' vernachlässigen, und nur die erste in der Rechnung behalten, so ergiebt sich der Werth von $w' = \frac{Aw^3 + Bw^2 + Cw + D}{3Aw^2 + 2Bw + C}$ und hierin wieder die Werthe von A, B, C, D gesetzt, giebt

$$w' = \frac{0{,}_{684}.w^3 + 49{,}_{63}.w^2 + 1322.w - 769{,}_{107142857}}{2{,}_{052}w^2 + 99{,}_{26}w + 1322}$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck $w = 0{,}_{57}$, so erhält man $w' = \frac{0{,}_{684316155}}{1354{,}_{629590036}} = 0{,}_{000505}$; daher $p = w - w' = 0{,}_{57} - 0{,}_{000505} = 0{,}_{569495}$; dafür setze ich $p = 0{,}_{5695}$.

Daher sind die jährlichen Procente $= 12 \cdot 0{,}_{569495} = 6{,}_{83394}$ und der Gewinn des C beträgt also $350 \cdot p + 11{,}_{25}p^2 = 350 \cdot 0{,}_{5695} + 11{,}_{25} \cdot 0{,}_{5695^2} = 202{,}_{9737153125}$ ℔.

Anmerk. Die Aufgaben von der 10ten an kann man nicht allein noch anders, sondern man muß sie auch anders rechnen, wenn man sich nicht mit einem unrichti-

Digitized by Google

gen Resultate begnügen will. Dort habe ich gezeigt, wie man sie rechnet, nun will ich auch zeigen, wie man sie richtig rechnen muß.

20. Jemand hat 3600 ℳ nach 4 Jahren zu zahlen; man macht ihm den Vorschlag, die Schuld gleich baar mit 5 % Rabatt zu entrichten; wie viel hat er baar zu bezahlen?

Rabatt ist im Allgemeinen ein Abzug an einer zu zahlenden Summe, wenn man sie eher bezahlt, als man verpflichtet ist, die Zahlung zu leisten.

Die baare Summe oder der jetzige Werth muß so beschaffen sein, daß er zu 5 % verzinset, in 4 Jahren sammt seinen Zinsen während dieser Zeit gleich der, nach 4 Jahren zu zahlenden, Summe oder gleich dem künftigen Werthe 3600 ℳ sei.

Ist nun der baare Werth 100, so betragen davon die Zinsen zu 5 % in 4 Jahren 20, daher ist der hiezu gehörige künftige Werth 120, also giebt folgende Proportion 120 : 3600 = 100 : baaren Werthe, den baaren Werth = 3000 Thlr.

Vom baaren Werthe 100 ist also der künftige Werth = dem baaren Werthe 100 nebst dem Produkte aus den Procenten und der Zeit, und daraus folgt die Proportion: der künftige Werth vom baaren Werthe 100 verhält sich zum gegebenen künftigen Werthe, wie sich der baare Werth zum gesuchten baaren Werthe verhält.

21. Jemand bietet auf ein Haus, welches verkauft werden soll, 5400 ℳ und zwar 2400 Thlr. baar und die übrigen 3000 Thlr. nach 4 Jahren oder auch die letzte Summe baar mit 5 % Rabatt. Ein Anderer bietet eine andere Summe, deren erste Hälfte er nach 4, und die zweite von jetzt gerechnet nach 5 Jahren zahlen will; oder auch die ganze Summe gleich baar mit 5 % Rabatt. Der Verkäufer hält beide Gebote für gleich; wie viel hat der Zweite geboten?

Zuerst muß man den baaren Werth des ersten, dann den baaren Werth des zweiten Käufers berechnen, hieranf beide baaren Werthe einander gleich setzen, so wird man das Gebot des andern finden.

Der baare Werth der 3000 Thlr. ist = $\frac{3000 \cdot 100}{120}$ = 2500 Thlr.; daher ist der baare Werth, welchen der erste Käufer bietet, 2400 + 2500 = 4900 Thlr.

Der baare Werth von der ersten Hälfte des künftigen Werthes, den der zweite Käufer bietet, ist $\frac{100}{120}$ der Hälfte = $\frac{5}{12}$ des ganzen künftigen Werthes; der baare Werth von der zweiten Hälfte ist $\frac{100}{105}$ der Hälfte = $\frac{2}{5}$ des ganzen künftigen Werthes; also hat der Zweite nur $\frac{5}{12} + \frac{2}{5} = \frac{49}{60}$ des künftigen Werthes baar geboten = 4900 Thlr.; daher ist dieser künftige Werth = $\frac{60}{49} \cdot 4900$ = 6000 Thlr.

22. Sind 500 Thlr. nach 4, 800 Thlr. nach 6 Jahren zahlbar; welches ist ihr baarer Werth zu 5 % gerechnet?

Digitized by Google

Der baare Werth von 500 Thlr. zu 5 %, nach 4 Jahren zahlbar, ist $\frac{500 \cdot 100}{120} = 416\frac{2}{3}$ Thlr.; der baare Werth von 800 Thlr. zu 5 %, nach 6 Jahren zahlbar, ist $\frac{800 \cdot 100}{130} = 615\frac{5}{13}$ Thlr.; daher ist der baare Werth von beiden künftigen $= 1032\frac{2}{39}$ Thlr.

23. Sollen 500 Thlr., welche nach 4 Jahren, und 800 Thlr., die nach 6 Jahren zahlbar sind, auf einmal zu 5 % entrichtet werden, nach welcher Zeit muß dieses geschehen?

500 Thlr. + 800 Thlr. = 1300 Thlr. betragen also den künftigen Werth; da ihr baarer Werth, nach der vorigen Aufg., $= 1032\frac{2}{39}$ Thlr., so muß also dieser baare Werth zu 5 % in der gesuchten Zeit den künftigen Werth 1300 Thlr. geben. Nennt man die gesuchte Zeit Z, so ist nach dem Vorhergehenden $100 + 5.Z : 1300 = 100 : 1032\frac{2}{39}$, oder verwechselt $100 + 5.Z : 100 = 1300 : 1032\frac{2}{39}$, getrennt $5.Z : 100 = 267\frac{37}{39} : 1032\frac{2}{39}$; daher $Z = \frac{\frac{1}{5} \cdot 267\frac{37}{39} \cdot 100}{1032\frac{2}{39}} = 5\frac{31}{161}$ Jahren.

24. Jemand leihet 12000 Thlr. zu 5 % auf 8 Jahre und 20000 Thlr. zu 6 % auf 12 Jahre; der Kreditor wünscht die ganze Summe von 32000 Thaler zu 5 % auf einmal zu empfangen; wann ist die Zeit der Zahlung (Verfallzeit)?

Hier können zwei Fälle stattfinden, nämlich A) die Zinsen werden jährlich bezahlt, oder B) die Zinsen werden sammt dem Kapitale zur Verfallzeit abgetragen.

A) Werden die Zinsen jährlich bezahlt, so hat der Schuldner von 12000 Thlr. zu 5 % in 8 Jahren $\frac{12000 \cdot 5 \cdot 8}{100} = 4800$ Thlr. und von 20000 Thlr. zu 6 % in 12 Jahren $\frac{20000 \cdot 6 \cdot 12}{100} = 14400$ Thlr., also zusammen 19200 Thlr. zu zahlen.

Nun zahlt er von 32000 Thlr. zu 5 % jährlich $\frac{32000 \cdot 5}{100} = 1600$ Thlr.; daher hat er die ganze Summe nach $\frac{19200}{1600} = 12$ Jahren zu entrichten.

B) Wenn die Zinsen sammt dem Kapitale zur Verfallzeit entrichtet werden, so pflegt man auch diese Aufgabe wie im vorigen Falle zu berechnen, oder man nimmt auf den Unterschied dieser Fälle keine Rücksicht; wir wollen untersuchen, ob man hierin recht verfährt.

Da 12000 Thlr. zu 5 % in 8 Jahren 4800 Thlr. Zinsen tragen, so kann man diese Zinsen als einen künftigen Werth zu 5 % nach 8 Jahren zahlbar betrachten, und seinen baaren Werth berechnen, welcher $\frac{4800 \cdot 100}{140} = 3428\frac{4}{7}$ Thlr. ist. Eben so findet man, daß die Zinsen von 20000 Thlr. zu 6 % in 12 Jahren 14400 Thlr. betragen, und einen baaren Werth von $\frac{14400 \cdot 100}{172} = 8372\frac{4}{43}$ Thlr. haben; daher ist der baare Werth der Zinsen beider Kapitale $= 11800\frac{200}{301}$ Thlr.; diese zu 5 % auf Zinsen geliehen geben in 12 Jahren $\frac{11800\frac{200}{301} \cdot 12 \cdot 5}{100} = 7080\frac{2}{5}$ Thlr.

Digitized by Google

Die jährlichen Zinsen von 32 000 Thlr. zu $5\frac{2}{3}$ betragen 1600 Thlr., und in 12 Jahren $12 . 1600 = 19\,200$ Thlr., welche also $= 11800\frac{2}{3} + 7080\frac{2}{3}$ Thlr. sein müssen, und auch nahe sind, indem die letzte Summe $= 18\,881\frac{1}{15}$ Thlr. beträgt, und nur um $318\frac{14}{15}$ Thlr. zu gering ist. Doch schon diese Differenz zeigt an, daß die Rechnung unter A) für diesen Fall nicht paßt.

Dieser Fall der vorgelegten Aufgabe muß eigentlich wie folgt gerechnet werden.

Da 12 000 zu $5\frac{2}{3}$ jährlich 600 ℳ Zinsen tragen, so könnte man diese während der 8 Jahre auf Zinsen zu $5\frac{2}{3}$ geben, und eben so mit den 600 ℳ Zinsen der folgenden Jahre verfahren. Auf diese Weise erhält man eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= 600$, ihre Differenz $= 30$, und die Anzahl der Glieder $= 8$ ist; daher ist die Summe aller Glieder $= (2 . 600 + 7 . 30) . 4 = 5640$.

20 000 ℳ zu $6\frac{2}{3}$ bringen jährlich 1200 ℳ Zinsen, diese zu $5\frac{2}{3}$ verliehen, tragen jährlich 60 ℳ Zinsen; die Summe aller dieser Zinsen bildet wieder eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= 1200$, ihre Differenz $= 60$, und die Anzahl der Glieder $= 12$ ist; folglich ist ihre Summe $= (2 . 1200 + 11 . 60) . 6 = 18\,360$; daher bringen die Kapitale in den gegebenen Zeiten 24 000 ℳ Zinsen ein.

32 000 ℳ zu $5\frac{2}{3}$ tragen jährlich 1600 ℳ Zinsen, diese zu $5\frac{2}{3}$ wieder auf Zinsen gegeben, bringen jährlich 80 ℳ; folglich erhält man dadurch eine Progression, deren erstes Glied $= 1600$, ihre Differenz $= 80$, und ihre Summe $= 24\,000$ ist; und die Anzahl ihrer Glieder gesucht wird, welche zugleich die Zahl der Jahre ist. Nennt man die Zahl der Glieder Z, so ist $[2 . 1600 + (Z-1) . 80] . \frac{Z}{2} = 24000 = 1600\,Z + (Z-1) . 40\,Z$, oder $(Z-1) . Z + 40\,Z = 600$, also $Z^2 + 39Z = 600$; daher ist

$$Z = -\tfrac{39}{2} \pm \sqrt{600 + (\tfrac{39}{2})^2} = -\frac{39 \pm 62{,}61788}{2} = 11{,}80894.$$

Also beträgt die Verfallzeit $11{,}80894$ Jahre oder 11 Jahre 9 Monate 21 Tage, den Monat zu 30 Tagen gerechnet. Diese Verfallzeit ist nach den Bedingungen der Aufgabe und der Annahme unter B) die richtige, wenn man nicht Zinses-Zinsen rechnen will. Etwas der Art kommt zwar in dieser Berechnung vor, doch diese Annahme ist nicht allein gesetzlich erlaubt, sondern auch leicht ausführbar. Diese wahre Verfallzeit ist also um 2 Monate 9 Tage kürzer als die oben gefundene.

25. Schiebe in seinem kaufmännischen Rechenbuche behandelt folgende Aufgabe: »Jemand will zwei Kapitale, deren eins von 1200 Fl. zu $5\frac{2}{3}$ nach 8 Monaten und anderes von 2000 Fl. zu $6\frac{2}{3}$ nach 12 Monaten fällig ist, zu einem mittlern Zinsfuße und einer mittlern Zahlungszeit abtragen.«

Dazu giebt er folgende Regel: »Multiplicire jedes Kapital mit seinem Zinsfuße und das Produkt mit der Zeit, addire die

Digitized by Google

Kapitale, dann die Produkte, die aus ihnen, den Zinsfußen und den Zeiten entstanden sind, und dividire mit der Summe der Kapitale die Summe der Produkte aus den Kapitalen und den Zinsfußen, mit dieser Summe der Produkte dividire wieder die Summe der Produkte aus den Kapitalen, den Zinsfußen und den Zeiten, so ist der erste Quotient der mittlere Zinsfuß, der zweite der mittlere Zahlungstermin.«

Anwendung dieser Regel auf vorstehende Aufgabe.

1200 . 5 =	6000 . 8 =	48000	Daher ist der mittlere Zinsfuß
2000 . 6 =	12000 . 12 =	144000	$5\frac{5}{8}$ % und der mittlere Zahlungs-
3200	18000	192000	termin $10\frac{2}{3}$ Monate.
	$5\frac{5}{8}$	$10\frac{2}{3}$	

Dieses Verfahren ist dasjenige, welches im kaufmännischen Rechnen stattfindet, und hierüber bemerkt Schiebe, daß es nicht richtig sei, sondern nach Löhmann müsse man so verfahren.

Man suche von jeder einzelnen Schuldpost ihren jetzigen baaren Werth, addire die gefundenen Resultate dieser baaren Werthe, und ziehe diese Summe von derjenigen aller erst später fälligen Kapitale ab, so ist der Rest der Zinsbetrag für den baaren Werth auf die Zeit bis zum mittlern Zinstermine.

5 % jährlich machen in 8 Monaten $\frac{5 \cdot 8}{12} = 3\frac{1}{3}$ %, 6 % jährlich machen in 12 Monaten 6 %; daher sind 1200 Fl. zu 5 % nach 8 Monaten fällig gegenwärtig nur $\frac{1200 \cdot 100}{103\frac{1}{3}} = 1161\frac{9}{31}$ Fl., und 2000 Fl. zu 6 % nach 12 Monaten zahlbar jetzt nur $\frac{2000 \cdot 100}{106} = 1886\frac{4}{53}$ Fl. werth; also beträgt der baare Werth beider Schuldposten zusammen $1161\frac{9}{31} + 1886\frac{4}{53} = 3048\frac{136}{1643}$ Fl. Die Summe der Schuldposten ist 3200 Fl., also der Zinsbetrag für den baaren Werth auf die Zeit bis zum mittlern Zinstermine $= 3200 - 3048\frac{136}{1643} = 151\frac{1507}{1643}$ Fl.

Oben wurde der mittlere Zinsfuß $= 5\frac{5}{8}$ % berechnet; daher folgende Aufgabe: 100 Fl. bringen in 1 Jahre $5\frac{5}{8}$ Fl. Zinsen, so werden $3048\frac{136}{1643}$ Fl. in welcher Zeit $151\frac{1507}{1643}$ Fl. Zinsen tragen?

$3048\frac{136}{1643}$: 100	= 12 Monate : A	(für den Zins $5\frac{5}{8}$ Fl.)	
$5\frac{5}{8}$	: $151\frac{1507}{1643}$ =	A	: B (Zeit für den Zins $151\frac{1507}{1643}$ Fl.)
313	: 832 =	4	: B = $10\frac{96}{313}$ Monaten.

Oben gab es $10\frac{2}{3} = 10{,}6666\ldots$ Monaten, durch diese Rechnung erhält man $10\frac{96}{313} = 10{,}6326678$ Monaten, also eine kürzere Verfallzeit, als vorher, doch ist der Unterschied sehr gering.

26. Ein anderes Beispiel ist folgendes, das Schiebe nach Löhmann anführt: 4000 ℳ sind nach 4 Jahren, 8000 ℳ nach 7 Jahren ohne Interessen zu zahlen. Wann muß die Zahlung der ganzen Summe von 12 000 ℳ geschehen?

Digitized by Google

Zu 5 % gerechnet findet man nach der gewöhnlichen Regel:

$4000 . 5 = 20000 . 4 =$	80000		
$8000 . 5 = 40000 . 7 =$	280000	Mittlerer Zinsfuß	$= \frac{60}{12} = 5\ \%$,
12000	60000		360000	Mittl. Termin	$= \frac{36}{6} = 6$ Jahre.
	$5\ \%$		6 Jahre

Nach Löhmann und Andern suchen wir zunächst den baaren Werth jeder Schuldpost zu 5 % jährlich; dieses giebt den wahren Werth der ersten Post $= \frac{4000 \cdot 100}{120} = 3333\frac{1}{3}$ Thlr., der andern $= \frac{8000 \cdot 100}{135} = 5925\frac{25}{27}$ Thlr., zusammen $= 9259\frac{7}{27}$ Thlr., diese von der Summe der Schuldposten $= 12000$ subtrahirt, giebt den Zinsbetrag für den baaren Werth auf die Zeit bis zum mittlern Termine $= 2740\frac{20}{27}$ Thlr.

Nun wie oben $9259\frac{7}{27} : 100 = 12$ Monate : A

$5 : 2740\frac{20}{27} =$ A : B

$25 : 148 = 1$ Jahr : B $= 5\frac{23}{25}$ Jahren.

Das letzte Resultat weicht von dem frühern nur um $6 - 5\frac{23}{25} = \frac{2}{25}$ Jahren ab, also nur um $\frac{2}{25} . 12 = \frac{24}{25}$ Monaten $= 28\frac{4}{5}$ Tagen.

Nun will ich dieselbe Aufgabe noch auf eine dritte, früher schon bemerkte, Weise berechnen.

Der baar zu zahlende Werth für 4000 Thlr. sei w, diesen zu 5 % jährlich gerechnet, giebt $\frac{1}{20}$ w als jährliche Zinsen, und dieselben wieder zu 5 % jährlich verliehen, liefern $\frac{1}{400}$ w. Durch die Zinsen erlangt man also eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= \frac{1}{20}$ w, deren Differenz $= \frac{1}{400}$ w, und deren Gliederzahl $= 4$, daher ist ihre Summe $= (\frac{2}{20}w + \frac{3}{400}w) . 2$, dazu den baaren Werth w gerechnet, giebt den künftigen Werth

$$w + \frac{1}{5}w + \frac{3}{200}w = 4000; \text{ also } w = 3292\frac{44}{243} \text{ Thlr.}$$

Durch ähnliche Schlüsse für das andere Kapital, dessen baarer Werth W sei, und 7 Jahre, erhält man

$$W + (\frac{2}{20}W + \frac{6}{400}W) . \frac{7}{2} = 8000, \text{ also } W = 5704\frac{56}{361} \text{ Thlr.}$$

Daher ist die Summe der baaren Werthe $= 8996\frac{127}{441}\frac{64}{41}$ Thlr., also der Zins $= 3003\frac{326}{454}\frac{77}{41}$ Thlr. für den baaren Werth auf die Zeit bis zum mittlern Zinstermine. Bezeichnet man diese Zeit mit Z, und den baaren Werth für die Schuldpost von 12 000 Thlr. mit W', so ist wie früher

$$W' + (\frac{2}{20}W' + \frac{Z-1}{400} . W') . \frac{Z}{2} = 12000 \text{ und}$$

$$(\frac{2}{20}W' + \frac{Z-1}{400} . W') . \frac{Z}{2} = 3003\frac{326}{454}\frac{77}{41},$$

so folgt daraus, daß $W' = 8996\frac{127}{454}\frac{64}{41} =$ der Summe der früher berechneten baaren Werthe; diesen in die andere Gleichung gesetzt, und dieselbe durch W' dividirt, giebt $(\frac{1}{10} + \frac{Z-1}{400}) . \frac{Z}{2} = \frac{3003\frac{326}{454}\frac{77}{41}}{8996\frac{127}{454}\frac{64}{41}} = \frac{341}{1020}\frac{23}{00}$;

$Z^2 + 39Z = \frac{136492}{411} = 265{,}1507$; daher $Z = -19{,}5 \pm 25{,}014$; also $Z = 5{,}914$ Jahren oder der mittlere Termin ist 5 Jahre 10 Monate 29,04 Tage.

Digitized by Google

Die erste Rechnungsart gab für den mittlern Termin 6 Jahre, die zweite 5 Jahre 11 Monate 1 Tag, die dritte 5 Jahre 10 Monate 29 Tage; hieraus geht hervor, daß die dritte Methode der zweiten sehr nahe Resultate giebt, und es daher in den meisten Fällen besser ist, nach der zweiten, und am besten nach der ersten Methode zu rechnen.

Anmerk. Wenn hier Rechnungen mit Gleichungen, und besonders quadratischen vorkommen, so ist es begreiflich, daß dieselben nur für solche Lehrer hier stehen, welche Kenntnisse derselben haben; für Elementarschüler sind sie also nicht geschrieben, und kein Lehrer wird natürlicher Weise von ihnen Rechnungen mit quadratischen Gleichungen fordern. Ich hielt es aber für nothwendig, die Terminrechnung (auch Termin-Reduktions-Rechnung) etwas genauer zu untersuchen, weil manche Lehrer des Rechnens geneigt sind, das gewöhnliche Verfahren als unrichtig anzusehen. Obgleich es nun zwar nicht ganz richtig ist, so weichen doch seine Resultate, wie wir in den vorstehenden Beispielen gesehen haben, nur um Weniges von denen der beiden andern Methoden ab, und es hat den Vortheil einer größern praktischen Anwendbarkeit vor den beiden andern, daher ist die Ausübung desselben empfehlenswerth.

Bei dieser Gelegenheit muß ich aber noch folgende Bemerkung machen. Im Geschäftsleben werden eine Menge Aufgaben anders berechnet, als die Arithmetik aus Vernunftgründen zu rechnen lehrt; dort geschieht es der Kürze wegen, oder wie man sagt, auf praktischem Wege. Dieser praktische Weg führt rasch zu Resultaten, die, wenn auch nicht genau, doch sehr nähernd den wahren Werthen kommen. Wollte nun ein Lehrer von seinen Schülern fordern, daß sie Aufgaben nach den praktischen Methoden rechnen sollten, ohne ihnen vorher dieselben auseinander gesetzt zu haben, so setzte er voraus, daß die praktische Methode auf Gründen der Arithmetik beruhe, welche jeder denkende Mensch durch Nachsinnen finden kann, und dadurch zeigte er deutlich, daß ihm die Natur dieser Aufgaben verborgen sei. Der Lehrer muß vielmehr in solchen Fällen, in welchen Aufgaben nur nach einer Näherungsmethode berechnet werden, deutlich erklären, daß die Rechnungsweise nicht die wahre, die richtige sei, daß sie daher auch nicht das wahre Resultat gebe, deswegen aber in Anwendung komme, daß sie auf kurzem Wege ein Resultat herbeiführe, das dem wahren Werthe sehr nahe ist. Ferner muß jede Aufgabe bestimmt gegeben werden, d. h. es muß keine Angabe fehlen, die also nach Willkür angenommen werden könne; denn solche Willkür verwirrt die Kinder, und sie fassen den Sinn der Aufgabe gar nicht, woraus dann eine Abneigung gegen das Rechnen folgt.

Digitized by Google

Berechnungen der Fonds und ihrer Zinsen nach den Börsenkurs-, Fonds- oder Wechselkurs-Zetteln.

Börse von Berlin, vom 11. Juni 1842.	Preuß. Courant. Zf.	Br.	Geld.
Staatsschuldscheine	4	$105\frac{1}{6}$	$104\frac{5}{6}$
" " zu $3\frac{1}{2}$ pCt. abgestempelt	*)	103	$102\frac{1}{2}$
Preuß.-Engl. Obligationen von 1830	4	$103\frac{1}{6}$	—
Prämien-Scheine der Seehandlung	—	—	$84\frac{3}{4}$
Kur- und Neumärkische Schuldverschreibungen	$3\frac{1}{2}$	102	$101\frac{1}{2}$
Berliner Stadt-Obligationen	4	$103\frac{3}{4}$	$103\frac{1}{4}$
Danziger " " in Th.	—	48	—
Westpreuß. Pfandbriefe	$3\frac{1}{3}$	$103\frac{1}{3}$	$102\frac{5}{6}$
Großherz. Posensche Pfandbriefe	4	$106\frac{11}{12}$	$106\frac{5}{12}$
Ostpreuß. Pfandbriefe	$3\frac{1}{2}$	$103\frac{3}{4}$	$103\frac{1}{4}$
Pommersche Pfandbriefe	$3\frac{1}{2}$	—	103
Kur- und Neumärkische Pfandbriefe	$3\frac{1}{3}$	$103\frac{3}{4}$	$103\frac{1}{4}$
Schlesische Pfandbriefe	$3\frac{1}{2}$	$103\frac{1}{4}$	—
Friedrichsd'or	—	$13\frac{1}{2}$	13
Andere Goldmünzen à 5 Thlr.	—	$10\frac{1}{4}$	$9\frac{3}{4}$
Disconto	—	3	4

*) Der Käufer vergütet die abgelaufenen Zinsen à 4 pCt. und außerdem $\frac{1}{2}$ pCt. p. anno bis 31. December 1842.

Wechsel- und Geld-Kurs.

Amsterdam . (250 Fl.) Kurz $140\frac{1}{8}$ Br. $139\frac{7}{8}$ G. 2 Mt. $139\frac{1}{8}$ G.
Hamburg . (300 M.) Kurz $150\frac{1}{8}$ B. $149\frac{7}{8}$ G. 2 Mt. $149\frac{1}{8}$ B. $148\frac{7}{8}$ G.
London . (1 L.) 3 Mt. 6. $21\frac{1}{2}$ Br. 6. $21\frac{1}{4}$ G.
Paris . . (300 Frs.) 2 Mt. $79\frac{5}{12}$ Br. $79\frac{1}{4}$ G.
Wien . . (in 30-Xr. 150 Fl.) 2 Mt. $103\frac{3}{8}$ Br. $103\frac{1}{8}$ G.
Augsburg . (150 Fl.) 2 Mt. $102\frac{3}{8}$ G.
Breslau . (100 Thlr.) 2 Mt. $99\frac{5}{12}$ Br. $99\frac{1}{4}$ G.
Leipzig . . (in Cour. im 14 Thlr.-F. 100 Thlr.) 8 T. 100 Br.
Frankf. a. M. (W.Z. 150 Fl.) 2 Mt. $101\frac{7}{8}$ Br. $101\frac{5}{8}$ G.
St. Petersburg (1 Silb.-Rbl.) 3 Wochen 1. $2\frac{1}{12}$ Br. 1. $1\frac{11}{12}$ G.

Die Zinsenberechnungen der Fonds werden nach denselben Gesetzen, nach welchen die Zinsen anderer Kapitale gefunden werden, angestellt, und in so fern verdienten sie nicht einer besondern Erwähnung; doch sind hiebei einige Usancen (Gebräuche) zu erklären, die vielleicht nicht jedem Leser bekannt sind, besonders diejenigen, welche sich auf die Kurszettel beziehen, und daher wird eine kurze Behandlung dieses Artikels manchem Leser nicht unwillkommen sein.

Fonds ist jedes Kapital, das zu einem gewissen Zwecke bestimmt ist; diejenigen Fonds, von welchen hier die Rede ist, sind Papiere, Geldscheine, Schuldscheine, Staatsschuldscheine, Schuldverschreibungen, Pfandbriefe, Obli-

Digitized by Google

ationen (Obligatio Verbindung, Verbindlichmachung, Verbindlichkeit) ꝛc. Jedes Papier, welches die Stelle eines Kapitals vertritt, trägt Zinsen und zwar von 2 bis 6 pCt. In den meisten Fällen sind diesen Kapitalpapieren Zinsquittungen beigefügt, die gewöhnlich in halbjährigen Terminen bezahlt werden; da die Zinsquittungen zur Verfallzeit von ihren Kapitalpapieren abgeschnitten werden, so heißen sie Coupons (coupons wörtlich: laßt uns abschneiden, von couper abschneiden). Werden diese Zinsen regelmäßig ausgezahlt, so ist ihr Nennwerth (Nominalwerth) dem Nennwerthe ihrer Kapitalpapiere proportional; bleiben sie aber lange rückständig, wie zur Zeit eines Krieges, so muß man sie nach dem jedesmaligen Kurse berechnen.

Jeder Kurszettel hat zwei Rubriken, mit Briefen (Br. oder B.) oder mit Geld (G.) überschrieben; die erste Rubrik, Br., zeigt an, was man verkaufen will und was man dafür fordert, die andere, Geld, was man bietet oder geben will. Hiebei ist zu merken, daß allen Fonds die Summe 100 ℔, Fl., Liversterling, Francs, Rubel ꝛc. zum Grunde liegt, nämlich diejenige Geldsorte, in welcher der Schuldschein ausgestellt ist. Nach vorstehendem Kurszettel steht bei Staatsschuldscheinen unter Br. $105\frac{1}{8}$, d. h. jede 100 ℔ in Staatsschuldsch. bietet man aus zu $105\frac{1}{8}$ ℔ in Briefen, und unter G. steht daneben $104\frac{1}{8}$, d. h. für die $105\frac{1}{8}$ ℔ Br. will man nur $104\frac{1}{8}$ ℔ baares Geld geben. Zu Preuß.-Engl. Obligationen finden sich Verkäufer, die jedes 100 derselben zu $103\frac{1}{4}$ ausbieten, es finden sich aber keine Käufer dazu. Die Preuß.-Engl. Obligationen sind in Liversterling ausgestellt; daher fordert man für 100 Lsterl. der Oblig. $103\frac{1}{4}$ Lsterl. Ferner will man für 100 ℔ Pomm. Pfdbr. 103 ℔ baar zahlen; dazu sind aber keine Papiere (Br.) vorhanden. Alle Kapitalpapiere verlieren nun entweder (haben ein Damnum) oder gewinnen (tragen ein Agio) und die Ursache davon liegt theils im niedrigen oder höhern Zinsfuße, theils in der Sicherheit der Fonds selbst, welche sie dem Käufer gewähren. Es sind hier drei Ausdrücke: Damnum, Pari und Agio zu erklären. Damnum (damnum Schaden, Verlust) wird stets in 100 gerechnet; so stehen die Prämienscheine der Seehandlung nur $84\frac{3}{4}$, d. h. für 100 ℔ Pr.-Sch. will man nur $84\frac{3}{4}$ ℔ zahlen; daher ist ihr Damnum $100 - 84\frac{3}{4} = 15\frac{1}{4}$; umgekehrt hat ein Papier $15\frac{1}{4}$ % Verlust, so ist ihr Werth nur $100 - 15\frac{1}{4}$ oder $84\frac{3}{4}$.

Das Pari (par gleich) bedeutet, daß eine Summe Geld gleich einer andern Summe einer andern Geldsorte ist; in Papieren heißt es also, daß 100 ℔, Lsterl., Francs gleich 100 ℔, Lsterl., Francs baar sind.

Agio übesetzt man durch: Aufgeld; im Deutschen mag man dieses Wort durch ein beliebiges anderes ersetzen; sei es nun durch Aufgeld, Mehrgeld ꝛc., oder auch dasselbe gebrauchen, wenn man nur in allen Fällen den richtigen Sinn damit verbindet, und dieser ist folgender: wenn von einem Agio die Rede ist, so versteht man stets dabei 1) zwei gleiche Anzahlen von Geldsorten, 2) gleichnamige Geldsorten; hat man also von der einen Sorte 1;

Digitized by Google

2, 3... 100 Stücke, so muß man auch von der andern 1, 2, 3...100 Stücke rechnen; ferner heißt die erste Art Thlr., Fl., Francs, Rubel ꝛc., so muß auch die andere Thlr., Fl., Francs, Rubel ꝛc. heißen. Den Unterschied dieser gleichen Anzahlen gleichnamiger Geldarten macht nun der höhere Werth der einen gegen die andere Art. Dieser höhere Werth der einen Geldsorte über den der andern ist nun entweder wirklich vorhanden, oder er liegt in andern Ursachen, z. B. in dem bessern, passendern Gebrauche; in jedem Falle hat man für eine gewisse Anzahl der Geldstücke der bessern Art eine eben so große Anzahl gleichnamiger Geldstücke der schlechtern Art und außerdem noch eine gewisse Anzahl der letztern Stücke zu geben, damit der Werth der ganzen gegebenen Geldsumme dem Werthe jener Geldsumme gleich komme. Diejenige Anzahl der schlechtern Geldstücke, welche man über die Anzahl der bessern Geldstücke giebt, heißt nun das Agio. Giebt man für 5 ℳ Gold (in Frd'or) z. B. $5\frac{2}{3}$ ℳ Cour.; so giebt man für jene 5 ℳ Cour. auch 5 ℳ, außerdem aber noch $\frac{2}{3}$ ℳ Cour., und diese $\frac{2}{3}$ ℳ Cour. betragen also das Agio für 5 ℳ Frd'or Im Verfolg wird dieses noch klarer werden, wenn man bei nachfolgenden Gelegenheiten auf die oben gegebene Erklärung des Agio zurücksieht.

1. Staatsschuldscheine in Courant mit Coupons für den 1. Januar und 1. Juli. Zinszahlungen in Berlin, auch theilweise, wenn sie mit einem rothen Stempel versehen sind, in Leipzig; auch werden die Coupons zur Verfallzeit von allen Provinzial-Regierungskassen (Königsberg, Gumbinnen, Danzig, Marienwerder ꝛc.) angenommen. Abschnitte sind 25, 50, 100, 200, 300, 400, 500 und 1000 Thlr. Zu jedem Schein werden von 4 zu 4 Jahren 8 Coupons ausgegeben. Jemand kauft den 18. Januar einen Staatsschuldschein über 500 Thlr., den 16. Sept. 3 Staatsschuldsch. über 25, 50 und 300 Thlr. a) Wie viel hat er in jedem Kaufe zu zahlen gehabt? b) Wie viel betragen die Coupons zur nächsten Verfallzeit? c) Wie viel wird er für diese 4 Staatsschuldsch. erhalten, wenn er sie den 11. Juni des folgenden Jahres verkauft?

In allen Zinsberechnungen wird der Monat zu 30 Tagen gerechnet.

a) Staatsschuldsch. tragen $4\frac{0}{0}$ p. a. (pro anno für die Zeit eines Jahres zu 360 Tagen), daher sind die täglichen Procente $\frac{4}{360}$ Thlr. $= \frac{1}{3}$ Sgr. Zinsen für 1 Thlr. Vom 1. bis zum 18. Januar (den Tag des Verkaufs nicht gerechnet, denn er ist noch nicht verflossen) sind 17 Tage; folglich sind die Zinsen von 500 Thlr. $= \frac{500 \cdot \frac{1}{3} \cdot 17}{100} = 28\frac{1}{3}$ Sgr.; daher hat der gekaufte Staatsschuldsch. einen Werth von 500 Thlr. $28\frac{1}{3}$ Sgr. Diesen Werth muß man nun nach dem Kurse bezahlen. Wir wollen nun annehmen, daß der Kurs dieser Papiere am 18. Januar eben derselbe wie der obige vom 11. Juni 1842 sei; so zahlt man also für jede 100 Thlr. in Staatsschuldscheinen $104\frac{1}{6}$ Thlr. baar, dieses giebt: $\frac{500 \cdot 104\frac{1}{6}}{100} = 523\frac{1}{6}$ ℳ, $\frac{28\frac{1}{3} \cdot 104\frac{1}{6}}{100}$

Digitized by Google

= 29 Sgr. $7\frac{2}{10}$ Pf. Da $\frac{2}{10}$ Pf mehr als $\frac{1}{2}$ Pf beträgt, so rechnet man dafür einen ganzen Pf. Nun ordnet man die Rechnung wie folgt:

500 Thlr. Staatsschuldscheine à $104\frac{1}{8}$ % . . Thlr. 523 Sgr. 3 Pf 9
Zinsen von 500 Thlr. v. 1. Jan. 17 Tage à 4 % » — » 29 » 8
Betrag in Preuß. Cour. Thlr. 524 Sgr. 3 Pf 5

Der zweite Kauf beträgt 375 Thlr. Staatsschuldsch.; die verflossene Zeit vom 1. Juli bis zum 16 Sept. = 75 Tagen. Die übrige Rechnung wird wie vorher gemacht; daher:

375 Thlr. Staatsschuldscheine à $104\frac{1}{8}$ % . . Thlr. 392 Sgr. 10 Pf 4
Zinsen von 375 Thlr. v. 1. Juli, 75 Tage à 4 % » 3 » 8 » 1
Betrag in Preuß. Cour. Thlr. 395 Sgr. 18 Pf 5

b) Da der Verkäufer den Tag des Verkaufs nicht rechnete, so zählt ihn der Käufer für die Zinsen; folglich sind vom 18. Jan. bis zum 1. Juli 163 Tage; also

100 Thlr. : 500 Thlr. = 4 : A (Zinsen für 360 Tage)
360 Tage : 163 Tage = A : B (Zinsen für 163 Tage)

18 : 163 = 1 Thlr. : B = 9 Thlr. 1 Sgr. 8 Pf.

Also empfängt der Besitzer des Staatsschuldscheins über 500 Thlr. am 1. Juli von der Regierungskasse 9 Thlr. 1 Sgr. 8 Pf.

Vom 16. Sept. inklusive bis zum 1. Jan. exklusive sind 105 Tage, daher

$$\left.\begin{array}{l} 100 : 375 \\ 360 : 105 \end{array}\right\} = 4 \text{ Thlr. : } x = 4 \text{ Thlr. } 11 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.}$$

Am 1. Januar erhält er also für die Coupons der 375 Thlr. Staatsschuldscheine von der Regierungskasse 4 Thlr. 11 Sgr. 3 Pf.

c) Vom 1. Januar bis zum 11. Juni sind 180 — 10 = 170 Tage; die 4 Staatsschuldscheine betragen zusammen 875 Thlr.; also

100 : 875 = $104\frac{1}{8}$: A = 915 Thlr. 14 Sgr. 1 Pf Kapital.

$$\left.\begin{array}{l} 100 : 875 \\ 360 : 170 \end{array}\right\} = 4 \text{ Thlr. : } x = \text{Zinsen,}$$

welche man wieder nach dem Kurse zu berechnen hat, indem man für 100 Thlr. Papier $104\frac{1}{8}$ Thlr. baar rechnet; daher kann man durch Zusammensetzung der Proportionen auch diese auf einmal berechnen:

$$\left.\begin{array}{l} 100 : 875 \\ 360 : 170 \\ 100 : 104\frac{1}{8} \end{array}\right\} = 4 : \text{Zinsen} = 17 \text{ Thlr. } 8 \text{ Sgr. } 9 \text{ Pf.}$$

875 Thlr. Staatsschuldscheine à $104\frac{1}{8}$ % . . . Thlr. 915 Sgr. 14 Pf 1
Zinsen von 875 Thlr. v. 1. Jan., 170 Tage, à 4 % » 17 » 8 » 9
Betrag in Preuß. Cour. Thlr. 932 Sgr. 22 Pf 10

In gleicher Art werden alle übrigen Fonds berechnet, daher sind keine ähnlichen Aufgaben darüber zu geben nöthig. Doch muß ich von den inländischen Fonds noch der Danziger Stadt-Obligationen erwähnen.

Digitized by Google

2. Die Danziger Stadt-Obligationen sind ohne Zinsen, in Abschnitten von 20 bis 1000 Thlr. Die Schuldmasse dieser Stadt ist bis zum 1. Jan. 1824 festgestellt, und laut Kabinetsordre vom 24. April 1824 dahin verfügt, die Kapitalschuld, in Betracht ihrer Entstehung, zu $33\frac{1}{3}\,\%$ zu sichern, also für 100 Thlr. der alten Schuld $33\frac{1}{3}$ Thlr. baar zu rechnen, einen Tilgungsfonds zu bilden, und dieselbe nach und nach durch Ankauf einzulösen. Zinsen werden nicht gezahlt, jedoch wird nach Ablauf des ersten Jahres und so jedes folgenden, der Kurs um $1\frac{1}{3}\,\%$ erhöht, so daß in diesem Zuwachs das Kapital und zugleich die Zinsen enthalten sind. Zu diesem Tilgungsfonds liefert die Regierungs-Hauptkasse zu Danzig jährlich 115 000 Thlr. und die Stadt Danzig mit den dazu gehörig gewesenen Dorfschaften 30 000 Thlr., zusammen also 145 000 Thlr. an die Königl. Seehandlung in Berlin, welche Summe der Staat nach Möglichkeit erhöhen will. Ankäufe geschehen nach dem Börsenkurse und zwar nach dem vorerwähnten Verhältnisse vom Jahre 1824 à $33\frac{1}{3}$ pCt. und jährlich mit $1\frac{1}{3}$ Thlr. Zulage steigend. (Man sehe Nelkenbrecher's allgemeines Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde. 15te Aufl.)

a) 10 000 Thlr. der alten Danziger Schuld haben welchen Werth am 1. Januar 1843?

Vom 1. Januar 1824 bis zum 1. Januar 1843 sind 19 Jahre; jährlich $1\frac{1}{3}\,\%$ betragen in 19 Jahren $19 \cdot 1\frac{1}{3} = 25\frac{1}{3}$, dazu $33\frac{1}{3} = 58\frac{2}{3}\,\%$, also $100 : 10\,000 = 58\frac{2}{3} : A = 5866\frac{2}{3}$ Thlr.

b) Welches ist der Kurs der alten Danziger Schuld am 11. Juni 1842?

Vom 1. Jan. 1824 bis zum 11. Juni 1842 sind 18 Jahre 160 Tage $= 18\frac{4}{9}$ Jahren, daher sollte der Kurs derselben $33\frac{1}{3} + 18\frac{4}{9} \cdot 1\frac{1}{3} = 57\frac{2}{27}$ sein.

c) Da der Berliner Kurs am 11. Juni 1842 48 ist, wie viele pCt. Damnum erleiden diese Papiere?

$57\frac{2}{27} : 48 = 100 : A = 82\frac{38}{91}$, also $100 - 82\frac{38}{91} = 17\frac{53}{91}$ pCt. Damnum. Den Verlust hätte man auch durch folgende Proportion berechnen können, da $57\frac{2}{27}$ nur 48 gelten, so haben sie einen Verlust von $9\frac{2}{27}$; also $57\frac{2}{27} : 9\frac{2}{27} = 100 : B = 17\frac{53}{91}\,\%$.

d) Welche Summe ist durch den Tilgungsfonds seit dem 1. Jan. 1824 bis zum 1. Jan. 1843 geliefert, und wie groß würde sie sein, wenn sie jährlich mit $5\,\%$ einfachen Zinsen ausgeliehen worden wäre?

In 19 Jahren hat der Tilgungsfonds $19 \cdot 145\,000 = 2\,755\,000$ ℳ geliefert.

Würden jährlich 145 000 zu $5\,\%$ auf Zinsen gegeben, so würden die Kapitale sammt ihren Zinsen eine arithmetische Progression von 19 Gliedern bilden, deren erstes $= 145\,000$, deren Differenz $= \frac{145000 \cdot 5}{100} = 7250$, daher ihre Summe $= (2 \cdot 145\,000 + 18 \cdot 7250) \cdot \frac{19}{2} = 3\,994\,750$ ℳ, und man hätte also auf diese Weise 1 239 750 ℳ mehr als auf vorige

Weise abgetragen, und diese Zinsen der in 19 Jahren getilgten Schuld haben den Betrag von $8\frac{1}{20}$ Jahren.

e) 1832 war der Kurs der Danziger alten Schuld 37, 1842 ist er 48, leiden diese Papiere in den gegebenen Zeiten ein gleiches Damnum?' und wie viele pCt. Differenz?

Vom 1. Jan. 1824 bis zum 1. Jan. 1832 sind 8 Jahre: $8.1\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$;
" " " " " " 1842 " 18 " $18.1\frac{1}{3} = 24$;
$33\frac{1}{3} + 10\frac{2}{3} = 44$, weniger $37 = 7$;
$33\frac{1}{3} + 24 = 57\frac{1}{3}$, " $48 = 9\frac{1}{3}$;
$44 : 7 = 100 : A = 15\frac{10}{11}$ % Damnum 1832;
$57\frac{1}{3} : 9\frac{1}{3} = 100 : B = 16\frac{12}{43}$ % Damnum 1842;
also ungefähr $\frac{4}{11}$ % Differenz.

3. Ueber die Preuß.-Engl. Obligationen von 1830 weiß ich keine andere Auskunft als folgende zu geben. 1832 gab es Preuß.-Engl. Anleihe von 1818 zu 5 %, welche $102\frac{1}{4}$ Briefe und 102 Geld im Kurse standen, dann Preuß.-Engl. Anleihe von 1822 zu 5 %, welche denselben Kurs hatten, ferner Preuß.-Engl. Anleihe von 1830 zu 4 %, die 95 % Br. im Kurse waren. Darüber enthält Nelkenbr. folgende Notiz: "Die Preuß.-Engl. Anleihe von 1818 beträgt 5 Mill. Lib. Sterling, und soll der Rest der seit 1830 noch rückständigen 3 809 400 L. mit dem 1. Okt. 1832 getilgt sein. Fester Kurs für 1 L. ist $6\frac{3}{4}$ ℳ Preuß. Cour. Für die gleiche Summe entstanden 4procentige 15 Jahre unkündbare Obligationen, mit Zinszahlungen wie vorher (nämlich am 1. Oktbr. und 1. April). Vor der Kündigung werden sie, wenn sie nicht über pari stehen, nach dem Tageskurs eingezogen, insoweit das zum Tilgungsfonds ausgesetzte 1 pCt. solches erlaubt; nach derselben erfolgt die Rückzahlung durch Verloosung. Fester Kurs für 1 L. ist 7 Thlr. Preuß. Cour." Ueber die Preuß.-Engl. Anleihe von 1822 bemerkt Nelkenbr., daß sie 1835 am 2. Januar spätestens getilgt sei; also können die im obigen Kurszettel enthaltenen Preuß.-Engl. Obligationen keine anderen sein, als die kurz vorher erwähnten 4procentigen, 15 Jahre hindurch unkündbaren Obligationen. Diese Bemerkungen enthalten einen Stoff zu interessanten und nützlichen Aufgaben, deren Berechnungen die sinnreiche Verwaltung der Staatsschulden vor Augen legen werden.

a) In der Zeit vom 1. Oktober 1818 bis zum 1. Oktober 1830 hat man welche Summe von der Preuß.-Engl. Anleihe abgetragen, und in welcher Zeit würde man nach demselben Verhältnisse den Rückstand seit 1830 getilgt haben? Wie viel im Durchschnitt hat man jährlich abgetragen?

Vom 1. Okt. 1818 bis zum 1. Okt. 1830 sind 12 Jahre; in dieser Zeit hat man also 5 M. — 3 809 400 = 1 190 600 Lib. Sterl. getilgt; daher wird man den Rückstand tilgen in

$1\,190\,600 : 3\,809\,400 = 12 \text{ Jahre} : A = 38{,}39476$ Jahren.

Im Durchschnitt hat man jährlich $99\,216\frac{2}{3}$ Lib. Sterl. abgetragen.

Digitized by Google

b) Wie viel in Preuß. Cour. betragen die Zinsen mit Rücksicht auf den jährlichen Durchschnittsabtrag, und wie viel würden sie bei unverminderter Schuld in den 12 Jahren mehr betragen haben?

Es kann nur angenommen werden, daß die theilweise Tilgung am Schlusse jedes Jahres erfolgt; denn würde sie im Anfange jedes Jahres getilgt, so hätte man gleich anfangs den ersten jährlichen Abtrag nicht leihen dürfen, wodurch man noch die Zinsen dafür erspart hätte.

Durch den ersten Abtrag ersparte man die Zinsen desselben für 11, durch den zweiten für 10, durch den dritten für 9 ꝛc. Jahre; dieses macht im Ganzen eine Ersparniß der Zinsen für 66 Jahre der jährlichen Zinsen von einem jährlichen Abtrage. Da nun der Zinsfuß $5\frac{0}{0}$ beträgt, also $\frac{1}{20}$ der ganzen Schuld, so machen auch die jährlichen Zinsen $\frac{1}{20}$ des Abtrages aus, und für 66 Jahre betragen sie also $\frac{66}{20}$ des Abtrages $= \frac{33}{10} . 99216\frac{2}{3}$ $=$ 327 415 Lib. Sterling; diese Summe ist also die Ersparniß an Zinsen durch theilweise Amortisirung der Schuld; ohne diese würden die Zinsen der ganzen Schuld während der 12 Jahre $\frac{12}{20} = \frac{3}{5} . 5$ Mill. $=$ 3 Mill. Lsterl. betragen; und 1 Ł. $= 6\frac{3}{4}$ Thlr. Preuß. Cour., dieses macht $6\frac{3}{4} . 3$ Mill. $=$ $20\frac{1}{4}$ Mill. Thlr. Preuß. Cour., welche der Preuß. Staat hätte nach England senden müssen; wie groß ist also die Ursache, wie nothwendig und dringend, an eine schnelle Amortisation einer so ungeheuer fressenden Schuld mit allem Scharfsinne und Aufopferung mancher Bequemlichkeit zu denken! Wie viel hat man aber an Zinsen durch erwähnte Amortisirung der Anleihe erspart? 327 415 Lib. Sterling! Wie viel hat man also wirklich an Zinsen gezahlt? 3 Millionen $-$ 327 415 $=$ 2 672 585 Lib. Sterling, 1 Lib. $= 6\frac{3}{4}$ Thlr. Preuß. Cour., dieses macht 18 039 948,$_{75}$ Thlr. Preuß. Cour. Wie groß mußte also die Aufforderung sein, möglichst schleunig diese, das Mark des Landes zehrende, Schuld zu tilgen? Denn hätte man in früherer Weise mit Amortisirung der Schuld fortgefahren, so würde man noch 38,$_{39476}$ Jahre an dieser Auszehrung haben laboriren müssen. Darüber folgende Aufgabe.

c) Da die Verwaltung der Staatsschulden ein Mittel ersann, vermöge welches der Rückstand seit 1830 der Preuß.-Engl. Anleihe von 1818 in 2 Jahren getilgt wurde, so zahlte man in dieser Zeit wie viele Zinsen, wenn man annimmt, daß in jedem der beiden Jahre die Hälfte des Rückstandes am Ende eines jeden Jahres abgetragen wurde? Wie viel würden die Zinsen während der 38,$_4$ Jahre betragen haben, wenn man fortgefahren hätte, am Schlusse jedes Jahres wie früher nur 99 216$\frac{2}{3}$ Lib. Sterling zu amortisiren? Welchen Vortheil hat man durch die zweijährige Tilgung des Rückstandes über die letztere erlangt?

Im ersten Jahre mußte man die Zinsen für den ganzen, im andern nur für die Hälfte, also während der 2 Jahre für $\frac{3}{2}$ des Rückstandes zahlen. Da nun der Zinsfuß $5\frac{0}{0} = \frac{1}{20}$ der Kapitalschuld beträgt, so beliefen sich

Digitized by Google

die gezahlten Zinsen während der 2 Jahre auf $\frac{1}{20} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{40}$ des Rückstandes $= \frac{3}{40} \cdot 3\,809\,400 = 285\,705$ Lsterl. Bezeichnet man den ganzen Rückstand der Anleihe mit R, also R = 3 809 400 Lsterl., die jährliche Tilgung mit T = 99 216⅔ Lsterling, so sind die Reste der Schuld in den aufeinander folgenden Jahren:

R, R — T, R — 2T, R — 3T, R — 4T, ... R — 38,₄ T = 0,

in Bezug auf die jährlich zu zahlenden Zinsen; denn nach der frühern Annahme erfolgt die Tilgung am Ende eines jeden Jahres, also muß man im ersten Jahre für den ganzen Rückstand die Zinsen zahlen. Da nun die jährlichen Zinsen $\frac{1}{20}$ der jedesmaligen Kapitalschuld betragen, so sind sie also in den auf einander folgenden Jahren

$\frac{1}{20}$R, $\frac{1}{20}$(R — T), $\frac{1}{20}$(R — 2T), $\frac{1}{20}$(R — 3T) . . . . . $\frac{1}{20}$(R — 37T) ꝛc.

Diese Reihe stellt eine fallende arithmetische Progression dar, deren erstes Glied $= \frac{1}{20}$R, deren fallende Differenz $= \frac{1}{20}$T, und deren Gliederzahl $=$ 38,₄ ist. Jeder kann diese Reihe addiren, ich wende dazu die Summen-Formel $S = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$ an, in welcher a das erste, d die Differenz und n die Anzahl der Glieder bezeichnet, und erhalte dadurch:

$\left|\frac{2}{20}R - \frac{37,_4}{20}T\right| \cdot \frac{38,_4}{2} = \frac{38,_4}{20}R - 37,_4 \cdot \frac{38,_4}{20} \cdot T = 1,_{92} \cdot R - \frac{37,_4 \cdot 19,_2}{20}T$. Nun ist R = 3 809 400, daher $1,_{92} \cdot R = 1,_{92} \cdot 3\,809\,400 = 7\,314\,048$; T = 99 216⅔; also $\frac{37,_4 \cdot 19,_2}{20}T = \frac{37,_4 \cdot 19,_2 \cdot 99\,216\frac{2}{3}}{20}$ $= 3\,562\,275,_2$; daher ist der Betrag der Zinsen während der 38,₄ Jahre 7 314 048 — 3 562 275,₂ = 3 751 772,₈ Lsterl. Hiervon die oben berechneten, wirklich gezahlten Zinsen, giebt 3 751 772,₈ — 285 705 = 3 466 067,₈ Lsterling, und diese in Preuß. Courant berechnet, macht $6\frac{4}{7} \times 3\,466\,067,_8 = 23\,395\,957,_{65}$ ℛ Pr. Cour., welche durch scharfsinnige Rechnung durch die Verwaltung der Staatsschulden dem Staate und also seinen Bürgern gewonnen sind.

d) Durch die 4procentigen, 15 Jahre hindurch unkündbaren Obligationen, für die Summe von 3 809 400 Lsterl. à 7 ℛ Preuß. Cour. kam jährlich welche Summe in Umlauf und während der 15 Jahre?

Jährlich kamen $\frac{4}{100} \cdot 3\,809\,400 \cdot 7 = 1\,066\,632$ ℛ und während der 15 Jahre 15 999 480 ℛ in Umlauf.

e) Würde die Verwaltung der Staatsschulden sich bestrebt haben, den Rückstand der Preuß.-Engl. Anleihe in 15 Jahren in gleichen Abträgen zu amortisiren, würde sie dann durch diese oder obige Speculation für ihre Kasse einen Gewinn erreicht haben und welchen?

Die jährliche Abtragung beträgt $\frac{1}{15}$ des Rückstandes, daher sind die in den 15 Jahren aufeinander folgenden verzinslichen Schuldbestände R, $\frac{14}{15}$R,

Digitized by Google

$\frac{13}{15}$R, $\frac{12}{15}$R, ... $\frac{2}{15}$R, $\frac{1}{15}$R; da der Zins $\frac{1}{20}$ jeder Kapitalschuld beträgt, so sind die jährlich zu entrichtenden Zinsen $\frac{1}{20}$R, $\frac{1}{20}\cdot\frac{14}{15}$R, $\frac{1}{20}\cdot\frac{13}{15}$R, . . . $\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{15}$R, $\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{15}$R, also ihre Summe $= \frac{1}{10}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{15}{2}$R $= \frac{2}{5}\cdot$R $= \frac{2}{5}$ × 3 809 400 Esterling à $6\frac{3}{4}$ ℔ = 10 285 380 ℔ Pr. Cour. Die Kasse selbst hat also durch den Umlauf der Obligationen eine Mehrausgabe von 5 714 100 ℔; diese bleiben aber im Lande, und werden noch durch Ankauf und Verloosung sehr vermindert, wodurch die Staatskasse den Schaden ersetzt; durch die Einführung der Obligationen hat das Land aber immer einen Vortheil.

Anmerk. Bei dieser Materie kann ich nicht länger verweilen, obgleich sie noch viele interessante Aufgaben darbietet; denn wider meine Absicht nimmt diese Schrift zu stark an Volumen zu, und ich muß daher weiter eilen, um noch andere Artikel zu berühren, welche man in einem Buche dieser Art nicht vergebens suchen darf.

B. Disconto und Rabatt.

Vom Rabatt ist schon gelegentlich die Rede gewesen, weil er aber häufig in Verbindung mit dem Diskonto vorkommt und in vielen Fällen auch mit diesem als gleichbedeutend genommen wird, so ist es zweckmäßig, beide unter einer Rubrik zu behandeln.

Der Diskontto ist im Allgemeinen ein Abzug an Geld für baare Zahlung einer gewissen Summe, die von jetzt ab erst nach einer gewissen Zeit zahlbar ist, welche die Verfallzeit der zu zahlenden Summe genannt wird. Die künftig zu zahlende Summe ist entweder für genommene Waaren entstanden, oder sie besteht in Wechseln. Der Abzug von dem Werthe für entnommene Waaren wird gewöhnlich Rabatt, der von dem Nennwerthe oder der Valuta eines Wechsels der Diskonto im engern Sinne genannt. Die künftig zu zahlende Summe für entnommene Waaren wird auch der Fakturawerth und die baar gezahlte Summe der kontante Werth geheißen; daher ist der Fakturawerth gleich dem kontanten Werthe und dem Rabatt zusammen. Sowohl der Rabatt als auch der Diskonto werden nach Procenten und zwar entweder auf oder in 100 gerechnet. In allen Fällen wird man sowohl den Rabatt als auch den Diskonto auf 100 rechnen, wenn die Verfallzeit so lange, also wenigstens $\frac{1}{4}$ Jahr ist, daß der baare Werth sich in derselben verzinsen könnte. Bei allen diesen Berechnungen hat man aber vorzüglich den Gebrauch zu beachten; daher muß man sich mit demselben bekannt machen und in jeder Aufgabe muß derselbe genau angegeben werden, wenn man ihn nicht aus Gründen als bekannt voraussetzen kann. In den Wechselgeschäften wird der Diskonto gewöhnlich in 100 berechnet, weil die Verfallzeit der Wechsel in der Regel kurz ist und sich nur bis auf 8, 10, 12, 15 Tage, 2, 3, 4 bis 6 Wochen, 1, 2 bis 3 Monate in Europa höchstens erstreckt. In allen Fällen, sowohl beim Diskonto als auch Rabatt, wird der einfachen Rechnung wegen, nämlich zur Vermeidung großer Brüche,

Digitized by Google

der Monat zu 30 Tagen, also das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Die Procente des Diskonto, so wie des Rabatts sind verschieden; jene bewegen sich zwischen 3 und 5, bei Kaufleuten steigen sie auch ausnahmsweise bis 10 hinauf; diese haben einen größern Spielraum.

Der Rabatt muß eigentlich auf und nicht in 100 gerechnet werden; er wird aber in 100 von den Fabrikherren und den Deutschen Buchhändlern gerechnet, um den Käufern einen größern Vortheil zu gewähren. Da sowohl Diskonto als auch Rabatt wie die Zinsen der Kapitale berechnet werden, so werden wenige Aufgaben darüber hinlänglich sein, das Nöthige in dieser Sache zu erläutern.

1. Ein Wechsel über 1580 Thlr. wird 15 Tage vor der Verfallzeit mit $4\frac{0}{0}$ p. a. (d. h. pro anno, für ein Jahr) Diskonto verkauft. Welches ist der Diskonto und der diskontirte oder baare Werth desselben?

Diese Aufgabe kann auf dreifache Weise, entweder durch 2 einfache, oder durch zusammengesetzte Proportionen oder durch den Kettensatz berechnet werden.

I. Berechnung durch einfache Proportionen.

360 Tagen : 15 Tagen = 4 : pCt. = $\frac{1}{6}$ % für 15 Tage.

100 : 1580 = $\frac{1}{6}$: Diskonto = 2 ℳ 19 Sgr.

Daher der diskontirte Werth = 1580 ℳ − 2 ℳ 19 Sgr. = 1577 ℳ 11 Sgr.

II. Berechnung durch zusammengesetzte Proportionen.

100 : 1580 = 4 : A (für ein Jahr)

360 : 15 = A : Diskonto (für 15 Tage)

30 : 79 = 1 : Diskonto = 2 ℳ 19 Sgr.

III. Durch den Kettensatz.

— 1580 ℳ

100 — 4 Disk. p. a.

360 — 15 Tage

30 | 79 | 2 ℳ 19 Sgr.

2. Ein Wechsel über 800 Thlr. ist den 19. Juli von dato auf 6 Wochen ausgestellt, und wird den 5. August mit $6\frac{0}{0}$ p. a. Diskonto verkauft. Welches ist der Diskonto und der baare Werth desselben?

Der Tag, an welchem der Wechsel verkauft wird, kommt dem Käufer des Wechsels zu gut, und weil er den Wechsel diskontirt, (d. h. den Diskonto von dem Betrage des Wechsels abzieht), so heißt er der Diskontnehmer, auch Diskontant.

Vom 19. Juli bis zum 4. August sind $|11 + 4 = 15$ Tagen; 6 Wochen $= 6 . 7 = 42$ Tagen; also ist der Diskonto für $42 - 15 =$ 27 Tagen zu berechnen. Das Uebrige der Rechnung ist ebenso, als in der ersten Aufgabe; daher führe ich nur eine Rechnungsart an.

Digitized by Google

100 : 800 = 6 : A (für ein Jahr)
360 : 27 = A : Diskonto (für 27 Tage)
5 : 3 = 6 : Diskonto = 3 ℳ 18 Sgr.

Der diskontirte Werth = 800 ℳ — 3 ℳ 18 Sgr. = 796 ℳ 12 Sgr.

3. Jemand nimmt aus einem Buchladen für 180 Thlr. 24 Sgr. Bücher, und es werden ihm $25\frac{0}{0}$ Rabatt bewilligt; wie viel hat er baar zu zahlen?

Es wurde schon oben bemerkt, daß die Buchhändler Deutschlands den Käufern die Procente Rabatt in 100 bewilligen; daher folgende Proportion:
100 : $180\frac{4}{5}$ = 75 : Baarzahlung = 135 ℳ 18 Sgr.

4. Ein Kaufmann nimmt auf der Leipziger Messe für 3568 Thlr. Seiden- und andere Waaren, und erhält $8\frac{1}{3}\,\frac{0}{0}$ Rabatt auf 100; welches ist der kontante Werth?

$108\frac{1}{3}$: 3568 = 100 : kontanten Werthe = 3293 ℳ 16 Neugr. $1\frac{7}{13}$ ₰.

Anmerk. Seit 1841 rechnen alle Sächsischen Länder, welche früher die Thaler- und guten Groschen-Rechnung hatten, nach dem Preuß. Fuße, d. h. 14 Thlr. = 1 Berl. Mark fein Silber, 1 Thlr. = 30 Neugroschen à 10 Pf.

5. Ein Danziger Kaufmann nimmt in Hamburg für 12 500 Hamb. Mark Bco. Rohzucker und erhält $8\frac{0}{0}$ p. a. Rabatt auf 100. Der Kredit wird daselbst auf 13 Monate gegeben; welches ist die Baarzahlung in Hamb. Mark Banko und Preuß. Courant?

Für 12 Monate 8, also für 13 Monate $8\frac{2}{3}\,\frac{0}{0}$ Rabatt; daher
$108\frac{2}{3}$: 12 500 = 100 : Baarzahlung = 11 $503\frac{11}{163}$ Mark Banko = 11 503 Mark 1 ß $\frac{156}{163}$ ₰ (1 Mark = 16 Schillingen à 12 ₰.)

Zweites Kapitel.

Berechnung solcher Größen, welche durch drei ungleichartige Größen bedingt werden.

Da die ungleichartigen Größen entweder Räume oder Gewichte oder Geld oder Zeit sein können, so erhält man durch Kombination derselben folgende Eintheilung dieses Kapitels:

I. Raum, Gewichte (Kräfte) und Geld,
II. Raum, Gewichte (Kräfte) und Zeit,
III. Raum, Geld und Zeit, und
IV. Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit auf einander bezogen.

I. Raum, Gewichte (Kräfte) und Geld auf einander bezogen.

Die Raumgrößen sind nun wieder entweder Linien (Längen) oder Flächen oder Körper; die Gewichte können entweder als wirkliche Gewichte (Handelsgewicht, Markgewicht, Medicinalgewicht oder Diamantengewicht) oder

Digitized by Google

als Kräfte (der Maschinen und lebenden Wesen) angesehen, und das Geld sich wieder in Münzen oder Papiergeld theilen; da alle diese Größen ferner inländische oder ausländische sein können, so hat man hier hinreichenden Stoff zu mannigfaltigen Aufgaben; nur das Wesentlichste hebe ich hervor.

A. Längen, Gewichte (Kräfte) und Geld.

1. Die Fracht für einen Centner einer Waare eine Meile fortzuschaffen beträgt 5 Sgr. 4 Pf.; wie viel wird die Fracht für 3 Kisten, A, B, C, für 5 Fässer, D, E, F, G, H, und 4 Ballen, J, K, L, M, $24\frac{3}{4}$ Meilen weit zu transportiren betragen. Diese Kollid haben folgende Gewichte:

Kiste	A	wiegt	5	Centn.	$39\frac{3}{4}$	℔.	Faß	D	wiegt	6 Centn.	$54\frac{7}{8}$	℔.
»	B	»	4	»	$95\frac{1}{2}$	»	»	E	»	8 »	$13\frac{3}{4}$	»
»	C	»	5	»	$48\frac{1}{4}$	»	»	F	»	5 »	—	»
Ballen	J	»	2	»	$64\frac{5}{8}$	»	»	G	»	6 »	$98\frac{1}{2}$	»
»	K	»	1	»	$108\frac{7}{8}$	»	»	H	»	6 »	$92\frac{3}{8}$	»
»	L	»	2	»	$33\frac{11}{16}$	»		Summe		32 Centn.	$39\frac{7}{8}$	℔
»	M	»	2	»	$107\frac{1}{2}$	»				25 »	$58\frac{11}{16}$	»
	Summe		25	Centn.	$58\frac{11}{16}$	℔				57 Centn.	$98\frac{9}{16}$	℔

ist das Gewicht der ganzen Ladung.

1 Centn. : 57 Centn. = $5\frac{1}{3}$ Sgr. : x = 10 ₰ 4 Sgr. für 1 Meile.

110 ℔ : $98\frac{9}{16}$ ℔ = $5\frac{1}{3}$ Sgr. : y = 4 Sgr. $9\frac{19}{85}$ ₰ = 1 »

Da nun für 1 Meile die Fracht der ganzen Ladung 10 ₰ 8 Sgr. $9\frac{19}{85}$ ₰ kostet, so wird sie für $24\frac{3}{4}$ Meilen, jene Kosten mit $24\frac{3}{4}$ multiplicirt, 254 ₰ 22 Sgr. $6\frac{23}{110}$ ₰ betragen.

Anmerk. Die Transportkosten vorstehender Aufgabe werden wohl jedem Lehrer etwas zu hoch vorkommen, und jungen Lehrern wird es im Bilden von Aufgaben häufig so gehen, daß sie nach gewissen Annahmen auf Resultate gelangen, die in der Wirklichkeit nicht vorkommen. Nun ist es zwar in bloßer Uebung im Rechnen sehr gleichgiltig, welche Resultate die Rechnung liefert, wenn sie nur richtig geführt wird, doch kommen solche alle Wahrscheinlichkeit überschreitenden Aufgaben einem, im Geschäftsleben Bewanderten lächerlich vor; um solches zu vermeiden, will ich in folgender Aufgabe zeigen, welche Betrachtungen man vor Bildung ähnlicher Aufgaben anzustellen habe.

2. Die Kavallerie rechnet 20 Centner auf 2 Pferde, eine große monatliche Ration rechnet sie gegenwärtig 7 Thlr. Chausseegeld möge für ein Pferd per Meile 2 Sgr. 6 Pf. betragen. Der Fuhrmann brauche täglich zu seinem Unterhalte auf Reisen 15 Sgr. Für die Benutzung des Stalles während der Nacht rechne man pro Pferd 6 Pf. Die Frachtfuhre möge täglich 6 Meilen machen, so ergeben sich hieraus in Verbindung mit voriger Aufgabe folgende Fragen: a) Wie viele Pferde sind zur Fortschaffung der Last voriger Aufgabe erforderlich? b) In wie vielen Tagen wird die Last am Orte ihrer Bestimmung sein? c) Wie viel betragen die Zehrungskosten der Fuhrleute, wenn man auf 2 Pferde einen Mann rechnet? d) Wie viel kosten die Pferde mit dem Chausseegelde auf dieser Reise? e) Welches sind

die gesammten Unkosten dieser Reise? f) Wie hoch muß die Fracht eines Centners für eine Meile zu stehen kommen, wenn der Besitzer des Wagens und der Pferde 50 Thlr. auf dieser Reise gewinnen will?

a) Zur Fortschaffung von 57 Centnern $98\frac{9}{16}$ ℔ oder circa 58 Centn. sind $\frac{58}{20} . 2 = 5{,}8$, also 6 Pferde erforderlich, wenn man sie nicht übermäßig anstrengen will.

b) Die Last ist in $\frac{24\frac{3}{4}}{6} = 4\frac{1}{8}$ Tagen, also in 4 Tagen am Orte ihrer Bestimmung.

c) Zu 6 Pferden sind 3 Fuhrleute erforderlich, deren jeder täglich $\frac{1}{2}$ ℳ, also die 3 in 4 Tagen 6 ℳ verbrauchen.

d) Die Unterhaltungskosten jedes Pferdes, monatlich zu 7 ℳ gerechnet, macht für 4 Tage $\frac{4}{30} . 7 = \frac{14}{15}$ ℳ, und für 6 Pferde in derselben Zeit $6 . \frac{14}{15} = 5$ ℳ 18 Sgr. Chausseegeld für jedes Pferd auf eine Meile $2\frac{1}{2}$ Sgr., also für 6 Pferde 15 Sgr. auf eine, und für $24\frac{3}{4}$ Meilen also $24\frac{3}{4} . 15 = 12$ ℳ $11\frac{1}{4}$ Sgr.; dieses macht zusammen 17 ℳ $29\frac{1}{4}$ Sgr. Für Benutzung der Ställe während der 3 Nächte à Pferd $\frac{1}{2}$ Sgr., macht für 6 Pferde 9 Sgr.; daher sind diese Unkosten zusammen 18 ℳ $8\frac{1}{4}$ Sgr.

e) Daher sind die gesammten Unkosten dieser Reise 24 ℳ $8\frac{1}{4}$ Sgr.

f) 58 Centner, oder da 6 Pferde gerechnet wurden, so sind 60 Centner zu rechnen, kosten $24\frac{3}{4}$ Meilen zu transportiren 24 ℳ $8\frac{1}{4}$ Sgr. und 50 ℳ, oder 74 ℳ $8\frac{1}{4}$ Sgr.; was nun 1 Centner für eine Meile an Fracht kostet, geben folgende Proportionen:

60 Ctnr. : 1 Ctnr. = 74 ℳ $8\frac{1}{4}$ Sgr. : A (für $24\frac{3}{4}$ Meilen)
$24\frac{3}{4}$ Ml. : 1 Ml. = A : B (für 1 Meile)

B = 1,49175 Sgr. = 1 Sgr. 5,901 ₰.

Man kann also einen Centner eine Meile zu transportiren $1\frac{1}{2}$ Sgr. rechnen, versteht sich, wenn von einer bedeutenden Last und einer nicht kurzen Strecke des Weges die Rede ist; denn sonst würden die Transportkosten für einen einzelnen Centn. von Danzig bis Königsberg oder 25 Meilen nur 1 ℳ $7\frac{1}{2}$ Sgr. betragen, dafür kein Bote ohne alles Gepäck diesen Weg machen wird.

3. Rohe Seide wird nach dem Gewichte verkauft; den Preis bestimmt aber die Qualität und das Gewicht. Zur Beurtheilung der Qualität oder der Feinheit hat man einen besonders dazu eingerichteten Haspel, dessen Umfang z. B. in Turin = 526,62 Par. Linien ist. 400 mal umgehaspelt heißt die Probe; wiegen nun diese 400 Fäden 20 bis 21 oder 30 bis 31 Denari, so bezeichnet man die Feinheit und das Gewicht, wie auch den Preis derselben so: Organsin à Den. 20/21 L. 25. 50 oder Organsin à Den. 30/31 L. 16. 87; d. h. im ersten Falle kostet ein Pfund Seide von der Feinheit 20 bis 21 Denari $25\frac{1}{2}$ Lire, und im andern Falle kostet

Digitized by Google

ein Pfund Seide von der Feinheit 30 bis 31 Denari 16 Lire 87 Centesimi. Je größer also die Feinheit ist, desto höher ist der Preis.

a) Angenommen nun, daß Seide so bezeichnet: Organsin à Den. 20/21 L. 25. 50, welchen Preis müßte also diese Seide: Organsin à Den. 25/26 L. haben?

b) 288 Denari = 1 Turiner Pfund = $368,_{8445}$ Grammen, 1 Preuß. Pfund = $467,_{711}$ Grammen; 1 Preuß. Elle = $25\frac{1}{2}$ Preuß. Zoll; 12 Zoll = 1 Preuß. Fuß = $139,_{13}$ Par. Linien; 1 Lire = 1 Franz. Frank, also $,51,_{968}$ Lire = 1 Mark f. S. = 14 ℳ Preuß. Cour.; wie theuer ist ein Preuß. Pfd. der Seide Organsin à Den. 20/21 L. 25. 50? Und wie viele Preuß. Ellen muß ein Preuß. Pfd. halten?

a) Soll man diese Frage beantworten können, so muß man von der Annahme ausgehen, daß die Preise im umgekehrten Verhältniß des Gewichts stehen, und dann kostet 1 ℔ der Seide von der Feinheit Organsin à Den. 25/25 L. $\frac{4}{5} . 25,_5 =$ L. 20. 4; wird der Preis anders bestimmt, so kann nach diesen Angaben derselbe nicht berechnet werden.

b) 1 Preuß. ℔ $= \frac{467,_{711}}{368,_{8445}} = 1,_{26804}$ Turiner ℔, und 1 Lire $= 8,_{082}$ Sgr.; daher ist der Preis von 1 Preuß. ℔ Seide von der gegebenen Feinheit $= 1,_{26804} . 25,_5 . 8,_{082}$ Sgr. $= 261,_{3316}{}_{3164}$ Sgr. = 8 ℳ 21 Sgr. 4 L. Das Gewicht der 400 Fäden Seide setze man = $20\frac{1}{2}$, weil ihr Gewicht zwischen 20 bis 21 Denari ist. Daher enthält 1 Turiner ℔ $\frac{288}{20\frac{1}{2}} = \frac{576}{41} . 400$ Fäden; folglich hält 1 Preuß. ℔ $= 1,_{26804} . \frac{576}{41} . 400$ Fäden. 1 Preuß. Elle $= \frac{25\frac{1}{2}}{12} = \frac{17}{8}$ Preuß. Fuß, also 1 Fuß $= \frac{8}{17}$ Ellen; ein Faden $= \frac{526,_{62}}{139,_{13}}$ Preuß. Fuß, also 1 Faden $= \frac{526,_{62}}{139,_{13}} . \frac{8}{17}$ Ellen; daher hält ein Preuß. ℔ $= 1,_{26804} . \frac{576}{41} . 400 \times \frac{526,_{62}}{139,_{13}} . \frac{8}{17}$ Ellen $= 12692,_4$ Preuß. Ellen.

B. Flächen, Gewichte (Kräfte) und Geld.

1. Drei Arbeiter haben in einer gewissen Zeit 2 Thlr. 12 Sgr. Arbeitslohn erhalten, indem sie eine Wiese abmähten, welche 45 Ruthen lang und 36 Ruthen breit war; so werden 5 Arbeiter, welche in derselben Zeit eine Wiese von 54 Ruthen Länge abmähen, wie viel verdient haben und welche Breite hat diese Wiese?

Wird das Verhältniß der Stärke der Arbeiter nicht angegeben, so wird stets vorausgesetzt, daß sie gleiche Kräfte haben, oder doch gleiche Kräfte zur Arbeit anwenden.

Digitized by Google

Bei gleichen Zeiten sind die Arbeiten den Kräften proportional; die erste Arbeit ist 45 . 36□°, also ist die zweite $\frac{45 . 36}{3} . 5 = 15 . 36 . 5$□°, diese durch die Länge dividirt, giebt die Breite der andern Wiese $= \frac{15 . 36 . 5}{54} = 50°$.

Die Arbeitslohne stehen den Arbeiten proportional, daher ist der Lohn der 5 Arbeiter $= \frac{54 . 50}{45 . 36} . 72$ Sgr. $= 4$ ℛ.

Da in diesem Falle die Arbeiten den Arbeitern proportional sind, so berechnet man kurz den Lohn $= \frac{5}{3} . 72$ Sgr. $= 4$ ℛ.

5. In einer gewissen Zeit haben 9 Arbeiter einen Acker von 84° Länge und 63° Breite bearbeitet, und dafür 7 Thlr. 15 Sgr. erhalten; so werden 12 Arbeiter, welche dieselbe Zeit arbeiteten und 10 Thlr. erhielten, einen Acker von welcher Länge bearbeitet haben, wenn er 72° breit war?

Bei gleichen Zeiten sind die Arbeiten den Kräften proportional, die Verdienste müssen aber den Arbeiten proportional sein, daher sind die Kräfte oder die Zahlen der Arbeiter ihren Verdiensten proportional, also
9 Arbeiter : 12 Arbeitern $= 7\frac{1}{2}$ ℛ : 10 ℛ $= 84° . 63 : A = \frac{84 . 63 . 4}{3}$, und daher ist die Länge des Ackers $= \frac{84 . 63 . 4}{3 . 72} = 98°$.

6. Ein Besitzer einer Fabrik läßt auf seinen Webestühlen Tuch verfertigen; nun erhält er 96 Ellen 6 Viertel breiten Zeug von der Feinheit A aus einem Centner reiner Wolle, und wieder aus einem Centner derselben Wolle erhält er 72 Ellen 8 Viertel breiten Zeug von der Feinheit B. Die Elle des Tuches von der Feinheit A berechnet er zu 2 Thlr.; wie hoch wird er also die Elle des Tuches von der Feinheit B ansetzen?

Da die ganze Quantität des Tuches A das Gewicht hat, welches die ganze Quantität des Tuches B hat, so sind ihre Massen in Hinsicht der Menge der Wolle in beiden Tuchen einander gleich, daher müssen auch ihre Flächen einander gleich sein, wenn die Fäden von gleicher Feinheit und das Gewebe von gleicher Feinheit ist. Das Tuch A enthält $96 . \frac{6}{4} = 144$ Quadratellen; das Tuch B enthält $72 . \frac{8}{4} = 144$ Quadratellen; daher sind beide Täche von gleicher Feinheit, also müssen auch die Preise gleicher Flächen Tuch einander gleich sein. Da nun vom Tuche A eine Elle in der Länge 2 ℛ kostet, und dieses Tuch an Fläche $1 . \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ Quadratellen hat, so müssen auch vom Tuche B $\frac{3}{2}$ Quadratellen 2 ℛ kosten. Nun ist dieses Tuch 8 Viertel Ellen breit, daher ist die Länge dieser Fläche $\frac{3}{2} : \frac{8}{4} = \frac{3}{4}$ Ellen; daher muß die Elle des Tuches B $\frac{4}{3} . 2 = 2$ ℛ 20 Sgr. werth sein.

7. Ein Tuchhändler prüft auf einer Messe zwei Arten Tuch; beide Tuche A und B scheinen von gleicher Güte zu sein; das Tuch A hat 32 Ellen à 5 Viertel und das Tuch B hat gleichfalls 32 Ellen à 6 Viertel; er wägt ein Tuch A, und findet sein Gewicht 24 ℔ 18 Loth, das Tuch B wiegt 27 ℔ 6 Loth. Ueber den Preis des Tuches A ist er mit seinem Verkäufer

Digitized by Google

einig; er hat nämlich die Elle desselben für 1 ℛ 15 Sgr. bedungen; wie viel wird er für eine Elle des Tuches B bieten?

Wären die Tuche von gleicher Güte, so müßten sich ihre Preise wie ihre Breiten verhalten, da sie von gleicher Länge sind, also = 5 : 6; unter dieser Bedingung müßten sich aber auch ihre Gewichte ebenso verhalten, weil angenommen wird, daß die Tuche aus gleicher Wolle gefertigt sind.

Nun ist das Gewicht des Tuches A : Gewichte des Tuches B = $24\frac{9}{16}$ ℔ : $37\frac{3}{16}$ = 131 : 145, nach Verhältniß ihrer Breite müßte sein Gewicht des Tuches A : Gewicht des Tuches B = 5 : 6 = 131 : x = $157\frac{1}{5}$; daher müssen die Tuche, wenn auch von gleicher Wolle, doch nicht von gleicher Dichte (Stärke) sein; diese stehen nämlich im umgekehrten Verhältnisse von $157\frac{1}{5}$: 145, also müssen auch die Preise in diesem Verhältnisse stehen; daher:

5 : 6 = $1\frac{1}{2}$ ℛ : C (Preis des Tuches B bei gleicher Güte),

$157\frac{1}{5}$: 145 = C : D (» » » B bei ungleicher Güte od. Dichte)

oder 5 : 6 = $1\frac{1}{2}$ ℛ : C
$\frac{131 \cdot 6}{5}$: 145 = C : D
} oder 131 : 145 = $1\frac{1}{2}$ ℛ : D = 1,6603 ℛ.

Also wird er für eine Elle des Tuches B 1,6603 ℛ oder 1 ℛ 19 Sgr. 9,7 ₰ und nicht nach dem Verhältnisse der Breite 1 ℛ 24 Sgr. bieten.

Anmerk. Hier muß ich einige Bemerkungen anführen. Im gewöhnlichen Leben sagt man das Zeug, und so wird es vielleicht manchem Leser auffallen, daß ich der Zeug sage. Der Unterschied, wem er gerade nicht bekannt sein sollte, ist dieser: das Zeug ist irgend ein Instrument, ein Werkzeug, Spielzeug; der Zeug ist Tuch, Seidenzeug, Baumwollenzeug ꝛc. In keinem Buche habe ich gelesen, daß man beim Kaufe ꝛc. der Waaren, welche nach Ellen gemessen werden, auf ihr Gewicht Rücksicht nimmt; bei Seidenzeugen mag dieses wohl im Verkehre stattfinden, im Allgemeinen glaube ich aber, daß man hierauf nicht sieht; meiner Meinung nach müßte man auch bei Beurtheilung der Güte derjenigen Waaren, deren Größe nach Längen und Breiten, also nach Ellen bestimmt wird, auf ihr Gewicht Rücksicht nehmen; denn nach welchem andern Maßstabe will man die Dichte der Tuche ꝛc. beurtheilen? Daher werde ich dieser Ansicht gemäß noch einige Aufgaben ähnlicher Art behandeln.

7. Ein Besitzer einer Fabrik erhält aus einem Centner der Wolle, welche per Centner 48 Thlr. kostet, 98 Ellen 6 Viertel breiten Zeug, aus einem Centner Wolle, welche per Centner 72 Thlr. kostet, erhält er 108 Ellen 9 Viertel breiten Zeug. Findet er nun durch Rechnung, daß er die Elle des ersten Zeuges A = 2 Thlr. setzen muß, so frägt es sich, wie theuer er die Elle des Zeuges B ansetzen müsse, wenn alles Uebrige, das hier in der Aufgabe nicht bemerkt ist, als Unkosten ꝛc. nicht beachtet wird?

48 ℛ : 72 ℛ = 2 ℛ : C (Preis einer Elle für gleiche Länge und Breite)

108 : 98 = C : D (» » » die Länge 108 E. u. gleicher Breite)

6 : 9 = D : E (» » » » » » » » » $\frac{2}{3}$ Breite)

12 : 49 = 1 ℛ : E = 4 ℛ $2\frac{1}{2}$ Sgr. ist der Preis einer Elle des Zeuges B.

Digitized by Google

Anmerk. Vorstehende Proportionen scheinen auf den ersten Blick richtig zu sein, und dennoch steckt ein Fehler in ihnen. Denn man setze den Preis einer Quadrat-Elle des Zeuges A = p, den einer Q.E. des Zeuges B = P. Der Zeug A enthält $98 . \frac{6}{4} = 49 . 3$ Q.E.; also ist der Preis desselben $49 . 3 . p$; der Zeug B enthält $108 . \frac{9}{4} = 27 . 9$ Q.E.; daher ist sein Preis $= 27 . 9 . P$; da alles Uebrige nicht berücksichtigt wird, so müssen sich diese Preise wie die Werthe eines Centners ihrer Wolle verhalten; also ist $48 : 72 = 49 . 3 . p : 27 . 9 . P$ oder $2 : 3 = 49 . p : 81 . P$; daher $P = \frac{3 . 49}{2 . 81} = \frac{49}{54} . p$.

Nun kostet eine Elle des ersten Zeuges, welches $\frac{6}{4}$ breit ist, 2 ℛ, d. h. $1 . \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ Q.E. = 2 ℛ; daher 1 Q.E. = $\frac{4}{3}$ ℛ; folglich $P = \frac{49}{54} . \frac{4}{3} = \frac{49 . 2}{27 . 3}$ ℛ = einer Q.E. des Zeuges B; dieses soll nun $\frac{9}{4}$ Ellen breit sein; daher ist eine Elle des Zeuges B = $\frac{9}{4} . 1$ Q.E.; also ist der Preis einer Elle des Zeuges B = $\frac{49 . 2}{27 . 3} . \frac{9}{4} = \frac{49}{3 . 3 . 2} = \frac{49}{18} = 2\frac{13}{18}$ ℛ.

Dasselbe Resultat wird man erhalten, wenn man von obigen Proportionen nur die beiden ersten nimmt, und die dritte ganz unberücksichtigt läßt; denn es ist $D = \frac{2 . 72 . 98}{48 . 108} = \frac{49}{18}$ ℛ.

In Aufgaben dieser Art darf man also die Breite des Zeuges nicht mit in Rechnung bringen, sondern sie gänzlich in derselben vernachlässigen. Daher noch ein Beispiel zur Uebung.

9. Wenn aus einem Stein Flachs zu 12 Thlr. 32 Ellen 5 Viertel breite, und aus einem Stein Flachs zu 21 Thlr. 42 Ellen 6 Viertel breite Leinwand verfertigt wird, und eine Elle der ersten Leinwand 15 Sgr. kostet, wie theuer muß eine Elle von der andern Leinwand sein, ohne Berücksichtigung der Arbeit und aller übrigen Kosten?

$$\left.\begin{array}{l} 12 \text{ Thlr.} : 21 \text{ Thlr.} \\ 42 \text{ Ellen} : 32 \text{ Ellen} \end{array}\right\} = 15 \text{ Sgr.} : x = 20 \text{ Sgr.}$$ kostet eine Elle der andern Leinwand.

Anmerk. In voriger Note habe ich die wahre Ursache, weswegen die Breite des Zeuges in dieser Art Aufgaben in Rechnung nicht gezogen werden darf, nicht angegeben; sollte sie manchem Leser nicht gleich einfallen, so führe ich sie hier an. Die Zeuge kann man als Parallelepipeden betrachten, welche gleiche Gewichte haben, nämlich jedes ein Centner oder ein Stein ꝛc., und da von dem specifischen Gewichte ihrer Stoffe nicht die Rede ist, so kann man sie auch in Hinsicht ihres Volumens als gleich annehmen. Bezeichnet man nun die Länge des einen Parallelepipedon mit l, die des andern mit L, die Grundfläche des ersten mit g, die des andern mit G, so sind ihre Volumen $g . l$ und $G . L$, und es muß also $g . l = G . L$, also $l : L = G : g$ sein, d. h. ihre Grundflächen stehen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Längen oder Höhen. Nun sei der Preis eines Stückes von dem ersten Parallelepipedon von gleicher Grundfläche g, und einer Elle Länge oder Höhe p, der Preis eines Stückes vom andern Parallelepipedon auf derselben Grundfläche G, und einer Elle Länge (Höhe) P, so ist der Werth des ersten Parallelepipedon $= l . p$, der des andern gleich $L . P$; kostet nun ein Ctnr. (Stein, ℔ ꝛc.) von dem Stoffe des ersten k, von dem des andern K, so müssen sich diese Preise wie die Preise der ganzen Parallelepipeden verhalten, also $l . p : L . P = k : K$, daher ist $K . l . p = k . L . P$; folglich $p : P = k . L : K . l$ oder

$$\left.\begin{array}{l} k : K \\ L : l \end{array}\right\} = p : P,$$ d. h. die Preise einer Elle von jedem Zeuge stehen im zusammengesetzten Verhältnisse aus dem geraden der Kosten ihrer Stoffe und dem

Digitized by Google

umgekehrten ihrer Längen: die Breiten der Zeuge kommen also eben so wenig als ihre Dicken in Betracht, diese so wie jene sind schon bei Bestimmung des Preises einer Elle Länge (Grundflächen g, G) in Rechnung gezogen.

9. Aus einem Stein Flachs von 33 Pfunden hat man 40 Ellen 6 Viertel breite Leinwand gewebt; wie viele Ellen wird man aus einem Centner von 110 Pfund Flachs von derselben Güte weben können, wenn die Fäden in beiden Linnen gleich dick sind, und die Breite dieser Leinwand 5 Viertel sein soll?

$$\left.\begin{matrix}33\ \text{℔} & : & 110\ \text{℔}\\ 5\ \text{Viertel} & : & 6\ \text{Viertel}\end{matrix}\right\} = 40\ \text{Ellen} : x = 160\ \text{Ellen}.$$

33 ℔ Flachs geben $40 . \frac{6}{4}$ □Ellen, $110\ \text{℔} = \frac{10}{3}$ Stein, also geben 110 ℔ oder 1 Centner Flachs $\frac{10}{3} . 60$ □Ellen, diese durch die Breite $\frac{5}{4}$ Ellen dividirt, giebt die gesuchte Länge $= \frac{10 . 60}{3 . \frac{5}{4}} . 4 = 160$ Ellen.

10. In einer Leinwand, welche 32 Ellen lang und 6 Viertel Ellen breit ist, zählt man 66 Fäden auf einen Zoll; nun hat ein Stück Garn 20 Gebinden zu 40 Fäden à $3\frac{1}{2}$ Ellen; wie viele Stück Garn hat man zum Weben oben genannter Leinwand gebraucht? Eine Elle $= 25\frac{1}{2}$ Zoll.

Da die Breite der Leinwand $\frac{6}{4}$ Ellen $= \frac{6}{4} . 25\frac{1}{2}$ Zoll ist, so liegen in der Breite dieser Leinwand $\frac{6}{4} . 25\frac{1}{2} . 66$ Fäden neben einander, und weil die Länge der Leinwand 32 Ellen beträgt, so ist die Länge aller Fäden $= 32 . \frac{6}{4} . 25\frac{1}{2} . 66$ Ellen. Ein Stück Garn hat $20 . 40 . 3\frac{1}{2}$ Ellen, also hat man zu dieser Leinwand $32 . \frac{6}{4} . 25\frac{1}{2} . 66 : 20 . 40 . 3\frac{1}{2} = 17\frac{74}{175}$ Stück Garn gebraucht. Dieses Garn ist aber nur dasjenige, welches die Leinwand der Länge nach enthält; der Breite nach muß sie eben so viel Garn enthalten, weil die Fläche der Leinwand immer dieselbe bleibt; daher braucht man im Ganzen zu dieser Leinwand das Doppelte des berechneten Quantums, also $34\frac{148}{175}$ Stück Garn. Doch dieses Resultat der Rechnung kann nur ungefähr richtig sein, in der Wirklichkeit wird man wohl etwas mehr Garn verbrauchen; weil die Fäden in der Leinwand abwechselnd ober- und unterhalb derselben liegen, und also nicht gerade, sondern Schlangenlinien bilden, oder wellenförmig sich durch die Leinwand der Länge und Breite nach erstrecken. Eine genaue Rechnung kann aber selbst auch diese Abweichungen mit großer Schärfe ermitteln, eine solche würde hier aber zu weit führen, daher wollen wir uns mit unserm ungefähren Resultate begnügen.

11. Man will ein Dach, welches 48 Fuß lang, und 15 Fuß breit ist, mit Zinkplatten belegen, die 18 Zoll lang und 8 Zoll breit sind. Jedes ℔ Zink kostet im Durchschnitt $\frac{3}{20}$ ℳ, 120 dieser Platten wogen 3 Ctr. 66 ℔. Man sucht nun das Gewicht, welches die beiden Dachseiten haben, und die Kosten des Metalls, also ohne Rücksicht auf die übrigen Kosten.

Die Fläche einer Platte ist gleich $18 . 8$ □Zoll $= \frac{18 . 8}{144} = 1$ □Fuß. Die eine Seite des Daches hat 48 . 15, also beide $2 . 48 . 15$ □Fuß; daher sind $2 . 48 . 15$ Zinkplatten erforderlich, und ihr Werth beträgt $2 . 48 . 15 . \frac{3}{20} = 216$ ℳ. Ihr Gewicht $= \frac{2 . 48 . 15}{120} . 3\frac{1}{4}$ Centner $= 43$ Ctr. 22 ℔.

Digitized by Google

12. Ein junger Zimmermann übernimmt, eine Reiterbude aus Brettern zu errichten; sie soll 90 Fuß lang, 60 Fuß breit, bis zum Dache 30 Fuß hoch, und das Dach selbst eine Höhe von 18 Fuß haben. Die Länge des Daches ist also 90 Fuß, und aus der Höhe desselben und der Breite der Bude ergiebt sich die Breite des Daches sehr nahe 35 Fuß. Da er selbst keine Dielen oder Bretter besitzt, so muß er sie kaufen. Er wählt dazu Bretter, welche 24 Fuß lang, $13\frac{1}{2}$ Zoll breit und $1\frac{1}{2}$ Zoll dick sind, und zahlt für das Schock (60 Stück) derselben 54 Thlr. Da sich aber die Bretter auf dem Lande befinden, und die Bude in der Stadt errichtet werden soll, so will er zur Anfahrt Pferde miethen. Man rechnet 20 Cntr. auf 2 Pferde; die Bretter sind von trockenem Tannenholze, dessen specifisches Gewicht $= 0{,}55$ ist. Nun will er wissen a) wie viele Schock Bretter, b) wie theuer diese, c) wie viele Pferde er zu dieser Arbeit gebraucht?

Da die Wand der Bude eine Länge von 90 Fuß und eine Breite von 60 Fuß hat, so ist ihr ganzer Umfang $= 300$ Fuß, und weil ihre Höhe bis zum Dache 30 Fuß sein soll, so ist der Flächeninhalt der ganzen Wand $= 30 . 300 = 9000$ □Fuß.

Die Fläche jedes Daches beträgt $90 . 35$, also beide Seiten des Daches $= 90 . 35 . 2 = 6300$ □Fuß, dieses macht mit der Wand zusammen 15 300 □Fuß.

Der Theil der Fläche, welcher die Enden der Bude begrenzt, und zwischen den Seiten des Daches und der Wand befindlich ist, ist ein Dreieck, das zur Grundlinie 60 Fuß und zur Höhe 18 Fuß, nämlich die Höhe des Daches hat; daher ist der Inhalt dieses Dreiecks $= \frac{60 . 18}{2} = 540$ □Fuß, und da es zwei solcher Dreiecke, an jedem Ende der Bude, giebt, so ist ihr Flächeninhalt 1080 □Fuß; also sind zur Errichtung der ganzen Bude jene und diese oder in Summe 16 380 □Fuß erforderlich.

Weil jedes Brett 24 Fuß lang und $13\frac{1}{2}$ Zoll breit ist, so enthält es $24 . \frac{13\frac{1}{2}}{12} = 27$ □′; folglich begreift ein Schock dieser Bretter $60 . 27$ □Fuß;

a) daher sind zum Aufbaue der Bude $\frac{16380}{60 . 27} = 10\frac{1}{3}$ Schock Bretter erforderlich.

b) Da nun ein Schock dieser Bretter 54 Thlr. kostet, so hat er für alle Bretter $10\frac{1}{3} . 54 = 546$ Thlr. zu bezahlen.

c) Die Dicke jedes Brettes beträgt $1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1\frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{8}$ Fuß; daher ist der kubische Inhalt aller dieser Bretter $= 16\,380 . \frac{1}{8} = 2047\frac{1}{2}$ Kubikfuß. Da das specifische Gewicht des Tannenholzes $= 0{,}55$ ist, so wiegt 1 Kubikfuß Tannenholz $0{,}55 . 66 = 36{,}3$ ℔; daher beträgt das Gewicht aller Bretter $= 2047\frac{1}{2} . 36{,}3$ ℔.

2 Pferde ziehen 20 Centner $= 20 . 110$ ℔; also sind zum Anfahren des Holzes $\frac{2047\frac{1}{2} . 36{,}3 . 2}{20 . 110} = 37{,}6675$, also etwa 38 Pferde erforderlich.

Digitized by Google

C. Körper, Gewichte (Kräfte) und Geld.

13. Ein Maurermeister hat übernommen, ein Gebäude zu errichten, das 48 Fuß lang, 28 Fuß breit, und bis zum Dache 55 Fuß hoch sein soll. Die Dicke der Mauer soll bis zur Höhe von 20 Fuß $2\frac{1}{2}$, von da bis zur Höhe von 40 Fuß 2, und von da bis zur Höhe von 55 Fuß 1 Fuß 8 Zoll betragen. Vorläufig will er das Gewicht dieser Mauer berechnen, die Stärke des Fundaments danach bestimmen zu können. Auch ist ihm daran gelegen, so bald als möglich Ziegel anfahren zu lassen, damit er nicht allein die Arbeit möglichst bald beginnen könne, sondern auch in der Folge durch Mangel an Baumaterial darin nicht unterbrochen werde. Daher wünscht er zu wissen, wie viele Pferde er zur Anfuhr der Ziegel gebrauche, um hiernach die Zahl der täglichen Fuhren bestimmen zu können; er rechnet 20 Ctr. auf 2 Pferde. Jeder Ziegel ist $11\frac{1}{2}$ Zoll lang, $5\frac{1}{2}$ Zoll breit, und $2\frac{1}{2}$ Zoll dick; da aber zwischen den Ziegeln Kalk, Grand ꝛc., kurz Mörtel zu liegen kommt, so kann man die Dimensionen der Ziegel für die Mauer als ganze Zahlen, 12, 6, 3 Zoll, nicht aber für die Pferde annehmen; denn diese sind nur zum Anfahren der Ziegel nach ihren zuerst angegebenen Dimensionen bestimmt. Das Tausend dieser Ziegel kostet 10 Thlr. Nun sucht er folgende Fragen durch Rechnung zu beantworten: a) Wie groß ist der Druck der Mauer auf jeden □Fuß der Grundfläche, und wie groß das Gewicht der ganzen Mauer, wenn das specifische Gewicht des gebrannten Ziegelthons oder der Ziegelsteine $= 2{,}_{000}$ ist? Da aber das specifische Gewicht des weißen Sandes $= 2{,}_{631}$ ist, so setzt er das Gewicht des Ziegelsteins = dem achten Theile des Gewichts, welchen 8 Ziegel mit ihren ganzen Dimensionen einnehmen, indem er die Zwischenräume, welche als Folge ihrer wahren Dimensionen entstehen, und durch Sand ꝛc. ausgefüllt sind, mitrechnet, und zwar nach dem specifischen Gewichte des Sandes. Das gegebene specifische Gewicht der Ziegel ist in Bezug auf die Pferde bemerkt. b) Wie groß sind die Kosten für die Ziegel? c) Wie viele Pferde braucht er zum Anfahren der Ziegel?

Die ganze Grundfläche des Gebäudes beträgt 48 . 28 □Fuß. Da die Dicke der Mauer auf ihrer Grundfläche $2\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, so verliert jede Dimension der Grundfläche des Gebäudes innerhalb der Mauer an jedem Ende $2\frac{1}{2}$, also an beiden Enden 5 Fuß; daher sind diese nur 43, 23, also diese innere Grundfläche $= 43 . 23$ □Fuß; folglich ist die ganze Grundfläche der Ringmauer $= 48 . 28 - 43 . 23 = 335$ □Fuß; diese behält sie bis zur Höhe von 20 Fuß; daher enthält dieser Absatz der Mauer $20 . 335 = 7100$ Kubikfuß. Von dieser Höhe an hat die Mauer nur eine Dicke von 2 Fuß, und da die Dicke der Mauer natürlicher Weise nach innen zu abnimmt, so sind die innern Dimensionen der Grundfläche des neuen Stockes 24 und 44, also ihr Inhalt $= 24 . 44 = 1056$ □Fuß, diese von jenen 1344 □Fuß subtrahirt, giebt 288 □Fuß als Grundfläche der Ringmauer

Digitized by Google

im zweiten Stocke, und weil dieselbe wieder 20 Fuß hoch ist, so ist dieser Theil der Mauer $= 20 . 288 = 5760$ Kubikfuß. In dieser Höhe nimmt nun die Mauer an ihrer Dicke wieder um 4 Zoll oder $\frac{1}{3}$ Fuß ab, also sind die Dimensionen der innern Grundfläche des dritten Stockes $45\frac{1}{3}$ und $25\frac{1}{3}'$; daher ist ihr Inhalt $= 45\frac{1}{3} . 25\frac{1}{3} = 1148\frac{4}{9}$ □Fuß; diese von der untersten Grundfläche $= 1344$ □Fuß subtrahirt, läßt die Grundfläche der Ringmauer dieses Stockes $= 195\frac{5}{9}$ □Fuß, und weil ihre Höhe 15 Fuß beträgt, so ist ihr kubischer Inhalt $= 2933\frac{1}{3}$ Kubikfuß; daher ist der Inhalt der ganzen Mauer von der untersten Grundfläche bis zum Dache $= 7100 + 5760 + 2933\frac{1}{3} = 15\,793\frac{1}{3}$ Kubikfuß.

Die ganzen Dimensionen der Ziegel sind 12, 6, 3 Zoll, also ist der kubische Inhalt eines Ziegels $= 12 . 6 . 3$ Kubikzoll, und daher faßt ein Kubikfuß $\frac{1^2 . 1^2 . 1^2}{1^2 . 6 . 3} = 8$ Ziegel in sich; daher sind zur Errichtung der ganzen Mauer $15\,793\frac{1}{3} . 8 = 126\,346\frac{2}{3}$ Ziegel nothwendig. Die Kosten der Ziegel betragen also $\frac{126\,346\frac{2}{3}}{1000} . 10 = 1263$ ℛ 14 Sgr.

Acht Ziegel nehmen ihren wahren Dimensionen nach einen Raum $= 8 . 11\frac{1}{2} . 5\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2} = 1265$ Kubikzoll ein, und da sie ihren ganzen Dimensionen nach einen Raum $= 1$ Kubikfuß umfassen, so ist der Zwischenraum $= 1728 - 1265 = 463$ Kubikzoll für Sand, Kalk ꝛc., dessen specifisches Gewicht wir $= 2{,}631$ zu setzen haben.

1 Kubikfuß destillirten Wassers $= 66$ ℔, also 1 Kubikzoll $= \frac{11}{2^8 . 8}$ ℔, daher ist das Gewicht der 463 Kubikzoll Sand $= 463 . 2{,}631 . \frac{11}{2^8 . 8}$ ℔; da ferner das specifische Gewicht der Ziegelsteine $= 2{,}006$ angegeben ist, so ist das Gewicht der 1265 Kubikzoll Ziegel $= 1265 . \frac{11}{2^8 . 8} . 2{,}006$ ℔; daher ein Kubikfuß der Mauer $= \frac{41\,313{,}173}{288}$ ℔ $= 143{,}4485$ Pfunden. Folglich ist das Gewicht der ganzen Mauer $= 15\,793\frac{1}{3} . 143{,}4485$ ℔ $= 2\,265\,529{,}97667$ ℔, dafür man in ganzer Zahl 2 265 530 ℔ setzen kann; diese in Centner verwandelt, giebt 20 595 Ctnr. 80 ℔ als das Gewicht der Ringmauer von der Erde bis zum Dache.

Die Grundfläche enthält 355 □Fuß; daher ist der Druck auf einen □Fuß derjenige, welchen das Gewicht der ganzen Mauer, durch 355 dividirt, ausübt, also erleidet ein □Fuß der Grundfläche einen Druck von $6381{,}8$ ℔ $= 58$ Ctr. $1{,}8$ ℔, eine Last, welche kaum 5 Pferde wegschleppen.

Dieses Beispiel mag zeigen, welche Vorsicht man anzuwenden habe, dem Einsturze eines Gebäudes vorzubeugen.

Das Volumen von 8 Ziegeln war gleich 1265 Kubikzoll; zum Aufbau der Mauer gehören $126\,346\frac{2}{3}$ Ziegel, also haben diese ein Volumen von $126\,346\frac{2}{3} . \frac{1^2 . 6 . 3}{8}$ Kubikzoll; multiplicirt man dieses Produkt durch $2{,}006 \times \frac{11}{2^8 . 8}$ ℔, so erhält man diejenige Last aller Ziegel, welche die Pferde anzufahren haben; diese Last beträgt 1 532 361 ℔ und in Centner verwandelt,

Digitized by Google

erhält man 13 930 Centner 61 ℔; also sind zur Fortschaffung dieser Last 1393 Pferde erforderlich, wenn man auf ein Pferd 10 Ctr. rechnet.

Stellen wir nun die Resultate der Rechnung nach den Fragen auf:

a) Der Druck der Mauer auf jeden □Fuß der Grundfläche beträgt $6381{,}_8$ ℔ = 58 Centner $1{,}_8$ ℔, das Gewicht der ganzen Mauer ist = 20 595 Ctr. 80 ℔.

b) Die Kosten für die Ziegel betragen 1263 ℳ 14 Sgr.

c) Zum Anfahren der Ziegel sind wenigstens 1393 Pferde nothwendig.

14. Ein Architekt wird von der Regierung aufgefordert, ihr eine Rechnung über die Kosten und das Gewicht einer Röhre vorzulegen, welche etwa $\frac{1}{4}$ Meile, genau 5856 Preuß. Fuß lang, $\frac{1}{2}$ Zoll dick und einen innern Durchmesser von 6 Zoll haben soll. Dazu sind ihm folgende Metalle: Kupfer, Zinn, Zink, Blei und Eisen als Material zur Röhre bezeichnet. Nun findet er in den Tafeln für das specifische Gewicht folgende Angaben: das specifische Gewicht des Kupfers, gegossen = $8{,}_{788}$, gehämmert = $9{,}_{000}$, des Engl. Zinns, gegossen = $7{,}_{291}$, gehämmert = $7{,}_{799}$, des Blei's = $11{,}_{445}$, des Zinks, gegossen = $7{,}_{213}$, gehämmert = $7{,}_{861}$, und des Eisens, geschmiedet = $7{,}_{788}$, gegossen = $7{,}_{251}$.

In Nelkenbrecher findet er über den Werth dieser Metalle folgende Angaben: „Die Vergleichung der Metalle im Werthe gegen einander ist: 1 ℔ Gold = 15 ℔ Silber = 1350 ℔ Kupfer = 1720 ℔ Zinn = 8325 ℔ Blei = 11 000 ℔ Eisen = 1150 ℔ Messing. Den Werth des Zinks findet er nicht angegeben. Vermittelst dieser Data macht er nun die geforderte Rechnung.

Zuerst sucht er den kubischen Inhalt der Röhre; diese ist ein hohler Cylinder, und man erhält den Inhalt der Röhre, wenn man von einem Cylinder, dessen Durchmesser 7 Zoll ist, den innern Cylinder von gleicher Länge hinwegnimmt, dessen Durchmesser 6 Zoll beträgt.

Der Inhalt eines Cylinders ist aber das Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe (Länge); diese Grundfläche ist nun ein Kreis, und der Inhalt eines Kreises ist das Produkt aus dem Quadrate seines Halbmessers und der Verhältnißzahl $\pi = 3{,}_{14159}$; da der Durchmesser des innern Cylinders = 6 Zoll, so ist sein Halbmesser = 3 Zoll, daher das Quadrat desselben = 9 □Zoll; folglich ist seine Grundfläche = $9 . 3{,}_{14159}$ □Zoll, und weil seine Länge = 5856 Fuß sein soll, so beträgt sein kubischer Inhalt $5856 \times \frac{9 . 3{,}_{14159}}{144}$ Kubikfuß.

Aehnlicher Weise findet man den kubischen Inhalt des andern Cylinders $= 5856 . \frac{7}{4} . \frac{7}{2} . \frac{3{,}_{14159}}{144}$ Kubikfuß; daher ist der Inhalt der Röhre = $5856 . \frac{3{,}_{14159}}{144} . (\frac{49}{9} - 9) = 415{,}_{21348}$ Kubikfuß.

Digitized by Google

Das Gewicht der ganzen Röhre beträgt, wenn ihr Stoff

a) Kupfer, gegossen, ist $8,_{788}.66.415,_{21348}$ ℔ = 240827,$_{1401\,0784}$ ℔
» gehämmert = 246 636,$_{8071\,2}$ ℔
b) Zinn, gegossen, ist = 199 803,$_{2178\,5688}$ ℔
» gehämmert = 213 724,$_{4954\,1432}$ »
c) Blei ist . . . = 313 639,$_{8063\,876}$ »
d) Eisen, gegossen, ist = 198 707,$_{0442\,6968}$ »
» geschmiedet = 213 423,$_{0504\,2784}$ »
e) Zink, gegossen, ist = 197 665,$_{6986\,6154}$ »
» gehämmert = 215 423,$_{5489\,7448}$ »

In Hinsicht des Werthes dieser Röhre dienen folgende Betrachtungen. Eine Mark feines Silber = $\frac{1}{2}$ ℔ = 14 ₰, also 1 ℔ Silber = 28 ₰; daher 15 ℔ Silber = 15 . 28 ₰ = 1350 ℔ Kupfer = 1720 ℔ Zinn = 8325 ℔ Blei = 11 000 ℔ Eisen.

Hieraus ergiebt sich

a) 1 ℔ Kupfer = $\frac{14}{4\frac{1}{2}}$ ₰ = 0$\frac{1}{2}$ Sgr.
b) 1 » Zinn = $\frac{21}{66}$ » = 7,$_{3256}$ Sgr.
c) 1 » Blei = $\frac{28}{355}$ » = 1,$_{5135}$ »
d) 1 » Eisen = 1,$_{1455}$ »

Die Kosten der Röhre ohne die ihrer Verfertigung betragen

a) aus gegossenem Kupfer = 74 924 Thlr.
b) » » Zinn = 48 789,$_{16}$ Thlr.
c) » » Blei = 15 823,$_{28}$ »
d) » » Eisen = 7 587 »

15. Im Danziger Intelligenzblatte fand ich am 24. Juni folgende Anzeige: »Die zum Neubau eines Kreis-Steuer-Kassengebäudes zu Carthaus erforderlichen Baumaterialien, als

42$\frac{7}{7}$ Schachtruthen Feldsteine,
73 900 Stück Maurerziegel, großer Form,
21 700 Stück Biberschwänze,
87 Stück Forstpfannen,
180 Tonnen Kalk à 4 Scheffel,
207 Fuder Sand und Lehm à 24 Kubikfuß

werden zum Anfahren ausgeboten.

a) Nun wollen wir die Zahl der Pferde berechnen, welche zum Anfahren dieser Baumaterialien nothwendig sind.

Eine Schachtruthe ist 1 Ruthe lang und breit und 1 Fuß hoch, und enthält daher 12 . 12 . 1 = 144 Kubikfuß. Die Feldsteine, welche zum Bauen gebraucht werden, sind gemeiner Granit, dessen specifisches Gewicht = 2,$_{956}$ gesetzt wird. Würden nun die Feldsteine den ganzen Raum einer Schachtruthe ausfüllen, was natürlich nicht der Fall ist, so würde das Gewicht einer Schachtruthe Feldsteine = 144 . 66 . 2,$_{956}$ ℔ = 144 . $\frac{1}{2}$. 2,$_{956}$ Centner

Digitized by Google

sein; und die $42\frac{7}{8}$ Schachtruthen hätten also ein Gewicht von $42\frac{7}{8} . 144 \times \frac{3}{5} . 2{,}956$ Centnern; rechnet man nun 20 Centner auf 2 Pferde, so wären dazu $42\frac{7}{8} . 144 . \frac{3}{5} . \frac{2{,}956}{10}$ Pferde erforderlich $= 1095{,}02064$ Pferden für Feldsteine.

Die Dimensionen der Ziegel, welche in Aufgabe 13. angegeben, sind die gesetzlichen; also können wir dieselben beibehalten, und es hat daher ein Ziegel $\frac{1265}{8}$ Kubikzoll; und weil das specifische Gewicht derselben $= 2{,}006$ ist, so haben obige Ziegel ein Gewicht $= 73\,900 . \frac{1265}{8.1728} . \frac{3}{5} . 2{,}006$ Ctr., zu deren Fortschaffung $7390 . \frac{1265}{8.1728} . \frac{3}{5} . 2{,}006 = 813{,}923$ Pferde gehören. Biberschwänze und Forstpfannen sind mir ihren Dimensionen nach nicht bekannt.

Das specifische Gewicht des gebrannten Kalkes ist $= 1{,}842$. 1 Scheffel $= 3072$ Kubikzoll $= \frac{1}{6}$ Kubikfuß; daher haben 180 Tonnen Kalk à 4 Schffl. $180 . 4 . \frac{1}{6} = 1280$ Kubikfuß Kalk, deren Gewicht also $= 1280 . \frac{3}{5} . 1{,}842$ Centner, zu deren Fortbringung also $64 . \frac{3}{5} . 1{,}842 = 176{,}832$ Pferde erfordert werden.

Das specifische Gewicht des Thons (Lehms) $= 2{,}630$, des Sandes $= 2{,}631$, also kann man diese Stoffe von gleichem specifischem Gewichte $= 2{,}63$ annehmen; daher rechnet man auf eine Fuhre oder ein Fuder $24 . 66 \times 2{,}63$ ℔ $= 24 . \frac{3}{5} . 2{,}63$ Ctr. $= 37{,}872$ Ctr., also 4 Pferde; folglich sind zur Herbeischaffung der 207 Fuder Sand und Lehm $207 . 4 = 828$ Pferde nöthig.

Rechnet man nun, daß die Feldsteine einer Schachtruthe $\frac{3}{4}$ des Raumes derselben einnehmen, so sind zu diesem Zwecke $821{,}265$ Pferde nöthig; folglich können die Feldsteine, Ziegel, Kalk, Sand und Lehm zusammen 1826 Pferde auf einmal anfahren. Rechnet man auf jede Fuhre 4 Pferde, so müssen 454 Fuhren gemacht werden.

b) Von diesen Angaben benutze ich die Zahl der Ziegel noch zu einer andern Frage. Da Carthaus nur ein Flecken ist, so wird man in diesem Orte nicht ein Gebäude von mehreren Stöcken, sondern wahrscheinlich nur von einem Stocke machen. Nehmen wir nun an, daß alle Ziegel nur zur Ringmauer des Gebäudes verwendet werden; setzen wir die Höhe dieser Mauer von der Erde bis zum Dache $= 12$ Fuß, bestimmen wir die Dicke der Mauer zu $1\frac{1}{2}$ Fuß, damit Diebe nicht leicht durchbrechen können; nehmen wir die Dimensionen der Ziegel zu 12, 6, 3 Zoll an, und setzen endlich fest, daß die Grundfläche des Gebäudes ein Quadrat sei; so ist die Frage, wie groß dieselbe sein müsse? (Fig. 76.)

Ae ist die Dicke der Mauer $= 1\frac{1}{2}$ Fuß $=$ Bf ꝛc.; daher $\square$ Aa $= 1\frac{1}{2} . 1\frac{1}{2} = \frac{9}{4} \square$Fuß; also ist die Summe der 4 Quadrate Ae $+$ Bb $+$ Cc $+$ Dd $= 9 \square$Fuß; und weil die Höhe der Mauer $= 12$ Fuß angenommen ist, so ist die Summe dieser 4 Mauersäulen $= 9 . 12 = 108$ Kubikfuß; nehmen wir dieses Volumen von dem ganzen Volumen der Mauer

Digitized by Google

hinweg, so behalten wir das Volumen der 4 gleichen Mauern, deren Grundflächen die 4 gleichen Rechtecke abfe, bchg, cdki, daml sind. Aus Aufg. 13. wissen wir, daß 8 Ziegel = 1 Kubikfuß sind, also haben die 73 900 Ziegel $9237\frac{1}{2}$ Kubikfuß; daher ist die Summe der 4 gleichen Mauern = $9237\frac{1}{2} - 108 = 9129\frac{1}{2}$ Kubikfuß; also hält eine der Mauern $\frac{1}{4} . 9129\frac{1}{2}$ Kubikfuß = $2282\frac{5}{16}$ Kubikfuß. Der kubische Inhalt jeder Mauer ist das Produkt aus ihrer Länge, Dicke und Höhe, und wenn wir dieses Produkt durch das Produkt ihrer Dicke und Höhe dividiren, so müssen wir die Länge der Mauer erhalten. Da nun die Dicke der Mauer = $1\frac{1}{2}$ Fuß, und ihre Höhe = 12 Fuß, so ist das Produkt dieser 2 Dimensionen = $\frac{3}{2} . 12 = 18 \square'$; folglich ist die gesuchte Länge der Mauer = $\frac{2282\frac{5}{16}}{18} = 126\frac{229}{288}$ Fuß = 126,795 Fuß = ab = bc.

c) Nehmen wir ferner an, daß die innere Grundfläche des Gebäudes mit Doppelthalern belegt würde, welche Summe würde dazu erforderlich sein?

Der Durchmesser der Doppelthaler ist nach dem Münzgesetze 41 Millimeter = 18,8113 Preuß. Linien.

Macht man nun die 126,79514 Fuß zu Linien, indem man dieselben durch 144 multiplicirt, so erhält man 18 258,5 Linien, und diese durch den Durchmesser = 18,8 Linien der Zweithalerstücke dividirt, giebt 971 dieser Thalerstücke; es können also sowohl nach der einen als nach der andern Dimension des Quadrats 971 Doppelthaler neben einander liegen; daher ist ihre Zahl = 971 . 971 = 942 841 Doppelthaler = 1 885 682 ℛ Preuß. Cour.

16. Ein Scheffel Weizen, welcher 84 Preuß. Pfunde wiegt, kostet 3 ℛ 5 Sgr.; wie theuer muß ein Scheffel Weizen sein, der $85\frac{1}{2}$ ℔ schwer ist?

Da 84 ℔ Weizen $3\frac{1}{6}$ ℛ kosten, so ist der Preis eines Pfundes = $\frac{3\frac{1}{6}}{84}$; also kosten $85\frac{1}{2}$ ℔ = $85\frac{1}{2} . \frac{3\frac{1}{6}}{84} = \frac{171}{2} . \frac{19}{6.84} = 3$ ℛ 6 Sgr. $8\frac{5}{14}$ ₰ ist also der gesuchte Preis eines Scheffels Weizen $85\frac{1}{2}$ ℔ wiegend.

17. Eine Last Weizen von $56\frac{1}{2}$ Scheffeln zu $85\frac{1}{2}$ ℔ kostet 170 ℛ; wie theuer ist eine solche Last Weizen, von dem 1 Scheffel $86\frac{3}{4}$ ℔ wiegt?

Der gesuchte Werth ist = $\frac{86\frac{3}{4}}{85\frac{1}{2}} . 170 = 172$ ℛ 14 Sgr. $6\frac{14}{19}$ ₰.

18. Laut öffentlichen Blättern hat Danzig im Jahre 1840 47 313 Last Weizen à 170 ℛ seewärts versendet; Königsberg hat in demselben Jahre laut Börsen-Nachrichten der Ostsee 6786 Last Weizen verschickt; sowohl Königsberg als Danzig rechnen eine Last zu $56\frac{1}{2}$ Preuß. Scheffeln oder $10\frac{1}{2}$ Engl. Imperial-Quarters. Wenn nun 1 Engl. Quarter = 5,29064 Preuß. Scheffeln ist; so fragt es sich, ob die beiden genannten Städte zu ihrem Vortheile oder Nachtheile gerechnet haben? wie groß die Differenz in Preuß. Last und Thalern sei, und wie viele Procente sie betrage?

Digitized by Google

Man rechnet $56\frac{1}{2}$ Scheffel $= 10\frac{1}{2}$ Quarters; da nun 1 Quarter $= 5{,}_{29064}$ Scheffel, so sind $10\frac{1}{2}$ Quarter $= 10\frac{1}{2} . 5{,}_{29064} = 55{,}_{55372}$ Scheffeln; daher rechnet man auf jede Last $0{,}_{94828}$ Scheffel zu viel.

Da Danzig 47 313 Lasten versendet hat, so hat es $47313 . 0{,}_{94828}$ Scheffel $= 44\,865{,}_{97164}$ Scheffel zu viel gerechnet; diese in Preuß. Last zu $56\frac{1}{2}$ Scheffeln verwandelt, giebt $785{,}_{238436}$ Preuß. Last.

Die Last zu 170 Thlr. gerechnet, so kosten die letzten Lasten $170 \times 785{,}_{238436} = 133\,490{,}_{53412}$ Thlr.

Danzig hat sich nach seiner Weise 785 Last oder 133 490 Thlr. in einem Jahre zum Nachtheile gerechnet.

Auf demselben Wege findet man, daß Königsberg $113{,}_{894}$ Lasten oder 19 362 Thlr. sich zum Schaden gerechnet hat.

Da $10\frac{1}{2}$ Engl. Quarter $= 55{,}_{55}$ Preuß. Scheffeln, und man dafür $56{,}_{5}$ Preuß. Scheffel rechnet, so macht dieses $55{,}_{55} : 56{,}_{5} = 100 : A = 101{,}_{703}$; man rechnet also auf 100 Last zu $10\frac{1}{2}$ Quarters $1{,}_{703}$ Last zu viel, welches also $1\frac{7}{10}$ pCt. beträgt, die man sich zum Nachtheile rechnet.

19. In der Berliner Staatszeitung vom 20. Juni stand, daß die Engl. Regierung diejenigen Sovereigns, welche unter 5 Penny-weights (dwt.) $2\frac{1}{2}$ Grains wiegen, nicht annehme; daß die Bank solche nur über 50 ℔ umsetze, daß Wechsler im Kleinen bis 1 Schilling in Abzug bringen, daß das Publikum sich darüber beschwere, und meine, sie wären beschnitten, daß die Zeitungen dagegen sprechen, sie wären nicht beschnitten, sondern hätten durch den Gebrauch verloren, da sie so alt wären, und dieser Verlust wäre nur gering, da er nur $1\frac{1}{2}$ % betrage. Diese Angaben wollen wir etwas genauer prüfen.

Sovereigns werden erst seit 1816 geprägt. Früher wurden aus einem Münzpfunde Gold $44\frac{1}{2}$ Guineen à 21 Schill. Sterl., jetzt werden aus demselben Pfunde Gold Sovereigns à 20 Schill. Sterl. geprägt. a) Wie viele Sovereigns werden aus einem Münzpfunde Gold geschlagen?

$\frac{44\frac{1}{2} . 21}{20} = 46\frac{29}{40}$ Sovereigns werden aus einem Münzpfunde Gold geprägt.

b) Das britische Münzpfund ist = dem Troy-Pfunde = 12 Unzen = 240 Penny-weights = 5760 Grains $= 373{,}_{243}$ Grammen nach Chelius und Hauschild, wie Muncke bemerkt, und diese Angabe unter allen für die richtigste hält. 1 Preuß. Mark $= 233{,}_{8555}$ Grammen $= 3609{,}_{278}$ Engl. Troy-Grains. Wie viele Sovereigns gehen auf eine Preuß. Mark nach Angabe der Grammen und der Engl. Troy-Grains?

Nach der Angabe in Grammen ist 1 Preuß. Mark $= \frac{233{,}_{8555}}{373{,}_{243}} . 46\frac{29}{40}$ $= 29{,}_{2755\,61}$ Sovereigns.

Nach der Angabe in Engl. Grains ist 1 Preuß. Mark $= \frac{3609{,}_{278}}{5760} \times 46\frac{29}{40} = 29{,}_{278388}$ Sovereigns.

Digitized by Google

c) Die Feinheit des britischen Münzgoldes soll gesetzlich $\frac{11}{12}$ fein; wie viele Sovereigns gehen also auf eine Preuß. Mark feinen Goldes?

1 Preuß. Mark f. G. $= \frac{12}{11} . 29{,}_{275561} = 31{,}_{9369756}$ Sovereigns.

" " " $= \frac{12}{11} . 29{,}_{278388} = 31{,}_{9400596}$ "

Vergleicht man diese Resultate der Rechnung mit denen im Nelkenbrecher von dem Königl. Preuß. Haupt-Münz-Wardein Kandelhardt berechneten Werthen, welche sind $29{,}_{278}$ Sovereigns gesetzmäßig $= 1$ Berl. Mark brutto, also $31{,}_{9400} = 1$ Berl. Mark f. S., und $29{,}_{278}$ Sovereigns nach einem vom Jahre 1824 geprüften à 21 Karat $11\frac{1}{2}$ Grän f. G., also $32{,}_{000}$ Sovereigns $= 1$ Mark f. G., so wird man die Uebereinstimmung bis auf eine geringe Differenz leicht bemerken.

Anmerk. Wenn die Angabe einer Preuß. Mark in Engl. Grän richtig ist, so kann ihre Angabe in Grammen nicht richtig sein, oder dieses findet bei der Angabe des Engl. Troy-Pfundes in Grammen statt. Diese Differenz sollte man genau prüfen, denn für die Wissenschaft ist sie von Bedeutung, für unsere Rechnungen aber unbeachtenswerth.

d) Welches Gewicht hat nach obigen Angaben ein Sovereign in Engl. Grains?

$$5760 : 46\tfrac{2}{40} = 123\tfrac{1}{6}\tfrac{7}{23} \text{ Engl. Grains} = 1 \text{ Sovereign},$$

übereinstimmend mit der Angabe Nelkenbrecher's des Jüngern von 1841, wenn nicht die Angaben, wie der Titel vom Aeltern entlehnt sind.

e) 5 dwt. $2\frac{1}{2}$ Grains betragen wie viele Procente Damnum an einem Sovereign?

$$240 \text{ dwt.} : 5 \text{ dwt.} = 5760 : \text{Grains} = 120.$$

Also beträgt der Verlust an einem Sovereign $123\frac{1}{6}\frac{7}{23} - 122\frac{1}{2} = \frac{965}{1246}$ Grains; daher $123\frac{171}{623} : \frac{965}{1246} = 100 : 0{,}_{628\,27}$; daher ist der Verlust kaum $\frac{68}{100}$ Procent, also $6\frac{3}{10}$ an 1000; und die Zeitungen haben unrichtig gerechnet, oder andere Annahmen zum Grunde ihrer Rechnung gelegt?

f) Welchen Werth in Thlr. Frd'or und Preuß. Cour. hat ein Sovereign, wenn aus der Preuß. Mark gesetzlich 35 Frd'or à 5 Thlr. $\frac{65}{72}$ fein, und Frd'or 170 Sgr. stehen?

Wir wollen hier annehmen: $31{,}_{94}$ Sovereigns $= 1$ Preuß. $m\mathcal{K}$ f. G.

	$= 1$ Sovereign		$= 1$ Sovereign
$31{,}_{94}$	$= 1\ m\mathcal{K}$ f. G.	$31{,}_{94}$	$= 1\ m\mathcal{K}$ f. G.
$\frac{65}{72}$	$= 35$ Frd'or	$\frac{65}{72}$	$= 35$ Frd'or
1	$= 5\ \mathcal{R}$	1	$= 170$ Sgr.
1 Sover.	$= 6{,}_{06907}\ \mathcal{R}$ in Frd'or.	1 Sover.	$= 6\ \mathcal{R}\ 27{,}_{0131}$ Sgr. Preuß. Cour.

Diese Werthe eines Sovereign können wir als richtig annehmen, denn genau genommen, so ist auch die Feinheit der Frd'or nicht $\frac{65}{72}$, sondern nur $\frac{64\frac{1}{2}}{72}$ fein.

20. Dieselbe Zeitung (Aufg. 19.) enthielt auch die Bemerkung, daß d Kammern in München bei der Regierung darauf antragen wollten, daß d

Digitized by Google

4procentigen Staatsschulden auf $3\frac{1}{2}$procentige herabgesetzt würden, wodurch das Land jährlich 120000 Gulden gewinnen würde. Wie groß sind die Staatsschulden Baierns, wenn diese Gulden im 20- und 24-, und seit 1841 im $24\frac{1}{2}$ Gudenfuße gerechnet werden, in Preuß. Cour.?

$\frac{1}{2} : 100 = 120\,000 :$ Staatsschulden $= 24\,000\,000$ Gulden.

Nelkenbrecher bemerkt, daß 1832 circa 120 Mill. Gulden die Schulden betrugen; also kann das Resultat der Rechnung nur auf eine besondere Gattung der Staatsschulden, vielleicht nur auf Staatsschuldscheine des Landes sich beziehen.

$20 : 24\,000\,000 = 24$ ℳ $: 16\,800\,000$ ℳ nach dem 20 Guldenfuße.
$24 : 24\,000\,000 = 14$ „ $: 14\,000\,000$ „ „ „ 24 „
$24\frac{1}{2} : 24\,000\,000 = 14$ „ $: 13\,714\,285\frac{5}{7}$ „ „ „ $24\frac{1}{2}$ „

21. Man weiß aus der Erfahrung, daß A in der Zeit 60 Scheffel Roggen zu $80\frac{1}{2}$ Pfd., in welcher B 56 Scheffel Weizen zu $85\frac{1}{2}$ Pfd. trägt. Nun haben in einer gewissen Zeit beide gleichzeitig Getreide getragen und dadurch zusammen 53 Thlr. 13 Sgr. verdient, die sie unter sich theilen wollen. A sagt zu B: ich werde von der Summe immer 15 Thlr. nehmen, wenn du 14 Thlr. nimmst, denn ich trug immer 15 Scheffel, während du nur 14 wegbrachtest. Darauf erwiedert B: das ist wohl wahr, aber ich trug auch Weizen und du nur Roggen; denn dieser war nur $80\frac{1}{2}$ Pfd. und jener $85\frac{1}{2}$ Pfd. schwer. Da sie nicht einig werden, so bringen sie ihre Streitigkeit dem Herrn des Speichers vor. Wie wird er die Theilung machen und wie viel wird jeder erhalten?

Die gleichzeitig getragene Last von A verhält sich zu der des B $=$ $60 . 80\frac{1}{2}$ ℔ : $56 . 85\frac{1}{2} = 30 . 80\frac{1}{2} : 28 . 85\frac{1}{2} = 115 : 114$. Daher erhält A das 115fache von dem, wovon B das 114fache erhält, daher haben beider Antheile das 229fache $=$ 53 Thlr. 13 Sgr. $=$ 1603 Sgr., daher das Einfache $=$ 7 Sgr. Folglich bekommt A $115 . 7$ Sgr. $=$ 26 Thlr. 25 Sgr., und B empfängt $114 . 7$ Sgr. $=$ 26 Thlr. 18 Sgr.

22. A, B, C haben gleichzeitig getragen, und empfangen auch von dem Herrn des Getreides zusammen 35 Thlr. 18 Sgr. A trug 6 Scheffel Weizen à 87 Pfd. in derselben Zeit, in welcher B 7 Scheffel Roggen à 81 Pfd., und C 9 Scheffel Gerste à 57 Pfd. trug. Wenn sie nun ihren Arbeitslohn nach Verhältniß der Zahl der Scheffel und der Gewichte derselben unter sich theilen wollen, wie viel wird jeder erhalten?

Die Last des A : Last des B : Last des C $= 6 . 87$ ℔ $: 7 . 81$ ℔ $: 9 . 57$ ℔ $= 2 . 29 : 7 . 9 : 57 = 58 : 63 : 57$; daher ist:

$178 : 58 = 35\frac{3}{5}$ Thlr. : A $= \frac{68}{5}$ Thlr. $= 11$ Thlr. 18 Sgr.
$178 : 63 = 35\frac{3}{5}$ „ : B $= \frac{63}{5}$ „ $= 12$ „ 18 „
$178 : 57 = 35\frac{3}{5}$ „ : C $= \frac{57}{5}$ „ $= 11$ „ 12 „

23. Eichene Bohlen und Planken, welche nach Schocken zu 60 Cravelen verkauft werden, und 4 Zoll dick und 32 Fuß lang sein müssen, von

Digitized by Google

welcher Länge müssen 6 Zoll, 8 Zoll dicke Bohlen sein, wenn sie alle gleiche Breite haben?

6 Zoll dicke Bohlen müssen $\frac{4 \cdot 3^2}{6} = 21\frac{1}{3}$ Fuß lang,
8 " " " $\frac{4 \cdot 3^2}{8} = 16$ " " sein.

Nelkenbrecher hat: 6—7 Zoll dicke müssen 36 Fuß lang, 8—10 Zoll dicke 38 Fuß lang, 3 Zoll dicke 28 F. lang ꝛc. sein. Ueber die Breite dieser Bohlen bemerkt Nelkenbrecher Nichts, also wird diese wahrscheinlich als bekannt vorausgesetzt.

24. Jemand kauft auf seiner Reise nach der Residenz von einem reichen Handelsjuden einen rohen Diamanten für 120 Holl. Dukaten. In der Residenz angekommen ist sein erstes Geschäft, zu einem der kenntnißreichsten und geschicktesten Juweliere zu gehen, und nicht allein diesen Diamanten bearbeiten, sondern auch seinen Werth schätzen zu lassen. Nachdem dieser den Diamanten nach allen Kennzeichen gehörig geprüft hat, schätzt er ihn auf 116 bis 117 Thlr. in Gold, den Frd'or zu 5 Thlr. gerechnet. Als ihn der Käufer nach der Art der Berechnung des Werthes der Diamanten fragte, antwortete er ihm: »Der Werth der Edelsteine wird im Verhältnisse der Quadrate ihrer Gewichte berechnet.« Nun sucht man mit dem Verkäufer zunächst über den Werth von einem Karat einig zu werden, dann ist die Berechnung leicht gemacht, wenn man das Gewicht des Edelsteins kennt. Dieser Diamant wiegt sehr nahe $3\frac{1}{4}$ Karat, und 1 Karat desselben kann man 11 Thlr. in Frd'or rechnen.

Da das Gewicht des Diamanten $3\frac{1}{4}$ Karat beträgt und ein Karat 11 ℔ Frd'or werth ist, wie hoch beläuft sich der Werth dieses Diamanten und wie viel hat er zu viel an den Juden gezahlt, wenn 67 Dukaten = 1 Köln. Mark 23 Karat 7 Grän fein Gold, und 35 Frd'or à 5 ℔ = 1 Köln. Mark 21 Karat 8 Grän fein Gold sind? 1 Karat = 12 Grän.

Das Quadrat einer Zahl erhält man, wenn man dieselbe mit sich selbst multiplicirt; daher ist das Quadrat von $3\frac{1}{4} = 3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{4} = \frac{169}{16} = 10\frac{9}{16}$. Weil nun 1 Karat 11 ℔ Frd'or gelten, so sind die $3\frac{1}{4}$ Karat $10\frac{9}{16} \cdot 11$ Frd'or $= 116\frac{3}{16}$ ℔ Frd'or werth.

$21\frac{3}{4}$ Karat : 1 Karat = 35 . 5 ℔ Frd'or : A (℔ Frd'or für 1 Karat f. G.).
1 Karat : $23\frac{7}{12}$ K. = A : B (" " f. $23\frac{7}{12}$ K. f. G. od. 67 Duk.)
67 Duk. : 120 Dk. = B : C (" " für 120 Dukaten)
871 : 2830 = 175 ℔ Frd'or : C = 243 ℔ 2 Sgr. $\frac{5}{11}\frac{7}{11}\frac{8}{11}$ ₰ Frd'or.

Anmerk. In vorstehender Rechnung ist der Thaler in Gold in 30 Sgr., der Sgr. in 12 Pf. getheilt; also nach der Eintheilung des silbernen Thalers. Silberne Thaler haben wir wirklich, goldene nicht; wir bilden uns nur einen goldenen Thaler ein, und theilen den eingebildeten in 30 Sgr., den Sgr. desselben in 12 Pf. Alle solche Münzen, welche man wirklich nicht hat, sondern die man sich nur denkt oder vorstellt, heißen eingebildete, fingirte (lingo ich bilde, erdichte, stelle mir vor), oder Rechnungsmünzen. Alle fingirten Münzen dienen dazu, das Verhältniß zwischen dem Golde und dem Silber oder zwischen den Gold- und Silbermünzen auszudrücken; das Verhältniß zwischen beiden Münzsorten bestimmt

Digitized by Google

den Werth der einen nach dem Werthe der andern. In welchem Lande das Silbergeld vor dem Goldgelde vorherrschend ist, in dem wird der Werth des Goldgeldes nach dem Silbergelde bestimmt, und umgekehrt, wo die Goldmünze prädominirt, da wird der Werth der Silbermünzen nach dem der Goldmünzen geschätzt. Hieraus folgt, daß in allen Ländern und Staaten, in welchen Gold- und Silbermünzen kursiren, auch fingirte Münzen vorhanden sein müssen; und die fingirten Münzen sind stets gleichnamig mit der wirklichen Münze von geringerem Werthe (also mit der Silbermünze), welche am häufigsten in einem Lande zirkuliren, auch haben sie mit diesen gleiche Eintheilung in kleinere Münzen. Z. B. in Frankreich 20 Frankenstücke; in Spanien Quadruples, 4fache Pistolen zu 4 Piastern; in Neapel Once zu 3 Ducati oder 60 Carlini, denn es giebt daselbst auch Silber-Ducati à 10 Carlini; in Rom Zecchinen zu 215 Bajocchi; in Toskana Rusponi zu 40 Lire; in Sardinien Doppien zu 20 Lire nuove; in Oestreich Dukaten zu $4\frac{1}{2}$ Fl., Souverain'dor zu $13\frac{1}{3}$ Fl. ꝛc.; in England Pfund (Livre) Sterling (giltig, was allgemeinen Werth hat), anstatt zu sagen: ein Pfd. Gold sagt man: ein Pfd. Sterling, anstatt eine Guinee zu 21 Schilling in Gold, sagt man: 1 Guinee à 21 Schill. Sterling; weil seit langer Zeit man in England nur nach Gold rechnet, und das Silbergeld (Kronen, Schillinge, Pence) nur als Scheidemünze dient, wie bei uns die Silbergroschen und Kupfermünzen; daher wird in England auch den Silbermünzen das Wort Sterling beigelegt, weil ihr Werth nach dem der Goldmünzen bestimmt wird. Die angegebene Bedeutung des Wortes Sterling ist der eigentliche Sinn.

Diese Note habe ich deswegen etwas gedehnt, weil ich einen deutlichen Begriff von fingirten Münzen und dem Ausdrucke Sterling geben wollte; denn jene werden gewöhnlich anders definirt, und diesen wissen selbst solche Personen selten richtig zu deuten, welche Englisch sprechen.

Da der Diamant nur den Werth von $116\frac{9}{16}$ ℳ Frd'or = 116 ℳ 5 Sgr. $7\frac{1}{2}$ ₰ Frd'or hat, so hat der Käufer 126 ℳ 27 Sgr. $\frac{295}{1744}$ ₰ Frd'or zu viel bezahlt.

25. Rohe Diamanten, die zu schleifen sind, kostet das Karat in Paris 48 Franken. Als den größten, bekannten Diamanten bezeichnet man den Portugiesischen, der 1741 in Brasilien gefunden wurde. Sein Gewicht, an dessen Größe man zweifelt, wird auf 1680 Karat angegeben. Nehmen wir nun an, daß die Karate des Edelsteingewichts in allen Ländern einander gleich sind, wie dies gewöhnlich geschieht, und wissen wir, daß 160 Karat in Berlin = 9 Quentchen Preuß. Gewicht, oder 1 Karat = 0,20544 Gramm., so ist die Frage: a) welchen Werth der Portugiesische Diamant hat, in Preuß. Courant und Frd'or zu 170 Sgr., wenn 51,968 Franken = 14 Thlr. Pr. Cour.? b) wie groß das Volumen dieses Diamanten ist, wenn das specifische Gewicht der Diamanten = 3,600 ist?

a) Der Werth des Portugiesischen Diamanten ist 1680 . 1680 . 48 Franken = 135 475 200 Franken.

51,968 Fr. : 48 Fr. = 14 ℳ : A (ℳ Preuß. = 48 Frks. für 1 Kar.)
1 Karat : 1680 . 1680 = A : B (" " = dem Diamanten)

B = 36 496 551$\frac{294}{403}$ ℳ Pr. Cour.

Digitized by Google

Da 170 Sgr. = $5\frac{3}{4}$ ℛ = 1 Frd'or, so erhält man die Zahl der Frd'or, wenn man vorstehenden Werth durch $5\frac{3}{4}$ dividirt; also ist der Werth des Portug. Diamanten = $6\,440\,567\frac{47}{55}\frac{18}{51}$ Frd'or.

b) 1 Loth = 4 Quentchen, daher 9 Q. = $2\frac{1}{4}$ Loth = 160 Karat: daher ist das Gewicht des Portug. Diamanten = $\frac{1680}{160} \cdot \frac{9}{4} = \frac{180}{8}$ Loth.

Das Gewicht des Kubikfußes destillirten Wassers = 66 Pfd.; also wiegt ein Kubikzoll desselben = $\frac{66 \cdot 32}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{11}{9}$ Loth, oder 11 Loth Wasser haben ein Volumen von 9 Kubikzoll; daher wiegen 9 Kubikzoll des Diamanten $11 \cdot 3{,}_{600}$ Loth; folglich ist sein Volumen = $\frac{189 \cdot 9}{8 \cdot 11 \cdot 3{,}_{6}}$ = $\frac{1890}{8 \cdot 11 \cdot 4} = 2\frac{41}{44}$ Kubikzoll.

Wäre dieser Diamant eine Kugel, so würde sein Durchmesser $1{,}_{724}$ Preuß. Zoll betragen, also 1 Zoll 8 Linien 8 Scrupel.

Anmerk. Unter den bekannten Diamanten nimmt in Hinsicht der Größe den zweiten Rang der des Rascha Mattan auf Borneo von 367 Karat, den dritten der des Großmoguls von 279 Karat, den vierten der im Russischen Reichsscepter von 193 Karat, den fünften der sogenannte Regent oder Pitt von 137 Karat, den sechsten der des Oestreichischen Kaisers von 139 Karat ein. Wenn das Gewicht des letztern richtig ist, so müßte er im Range seinem Vorgänger voranstehen.

26. Jemand kauft von einem Uhrmacher eine goldene Uhr mit der Versicherung von Seiten der Uhrmachers, daß ein Dukaten von diesem Golde 2 Thlr. koste. Wenn nun Gold in Barren die feine Mark 193 Thlr. in Frd'or à 5 Thlr., und Frd'or im Berliner Kurszettel $13\frac{0}{0}$ stehen; von welchem Feingehalte ist das Gold der Uhr?

Ein Dukaten Gold kostet 2 Thlr. heißt, das Gewicht von einem Dukaten dieses Goldes kostet 2 Thlr. 67 Dukaten = 1 Mark.

Da die Art der Thaler nicht genauer bezeichnet ist, so müssen dieselben für Thaler Preuß. Courant genommen werden.

Man muß nun zur Lösung dieser Frage den Preis gleicher Gewichte des Goldes der Uhr und des vom feinen Golde, und beide in gleicher Münzforte, also entweder beide in Courant oder in Gold berechnen. Ich rechne nach Thlr. Gold. 1 Mark des Goldes der Uhr = 67 . 2 = 134 Thlr. Courant.

Stehen Frd'or $13\frac{0}{0}$, so heißt das, 100 Thlr. in Friedrichsd'or gelten 100 + 13 = 113 Thlr. Cour.; daher 113 : 134 = 100 : x = $\frac{134 \cdot 100}{113}$ Thlr. Welcher Bruch nun x Thlr. von 193 Thlr. ist, denselben muß das feine Gold in der Mark (von dem Golde der Uhr) von der feinen Mark sein; daher ist der Feingehalt des Goldes der Uhr = $\frac{13400}{113}$: 193 = $0{,}_{6144}$; will man diesen Bruch in Karat und Grän ausdrücken, so muß man denselben durch 24, den neuen Decimalbruch wieder durch 12 multipliciren, weil 1 Mark = 24 Karat, 1 Karat = 12 Grän; daher ist die Feinheit des Goldes der Uhr = 14 Karat $8{,}_{9472}$ Grän, also von der

Digitized by Google

Feinheit der neuen Arcot-Pagoden in Ostindien, denn diese haben den Feingehalt von 14 Karat 9 Grän.

II. Raum, Gewichte (Kräfte) und Zeit.

A. Längen, Gewichte (Kräfte), Zeit.

1. Die Zeitungen melden, daß am 9. Juni 1842 zu Toulouse und Montpellier gleichzeitig Feuerkugeln beobachtet worden wären, und daß die letztere nach diesen Beobachtungen 1 421 122 Meter hoch gewesen und in einer Sekunde 37 330 Meter durchflogen haben soll.

a) Die Länge einer Preuß. Meile = 2000 Preuß. Ruthen, 1 Ruthe = 12 Fuß, 1 Fuß = 139,$_{13}$ Pariser Linien, 443,$_{296}$ Pariser Linien = 1 Meter gesetzlich; wie viel Preuß. Meilen betragen obige Längen, und eine Preuß. Meile enthält wie viele Meter?

Die Höhe der Feuerkugel betrug 188,$_{6656}$ Preuß. Meilen. Die Kugel durchlief in einer Sekunde 4,$_{955868}$ Preuß. Meilen, also war die Geschwindigkeit dieser Kugel größer als die der Erde. Eine Preuß. Meile = 7532,$_{484}$ Meter. Nelkenbrecher: 1 Preuß. Meile = 7532,$_5$ Meter.

Anmerk. Nelkenbrecher, 15te Aufl. Seite 77. ist offenbar ein Druckfehler, denn es heißt: »Die Preuß. Meile ist eine Länge von 2000 Preuß. Ruthen, 14⅔ solcher Meilen sind beinahe ein mittlerer Meridiangrad, welcher nahe 29 502 Preuß. Ruthen, oder 7532,$_5$ Franz. Meter = 4,$_7$ Engl. gesetzmäßig, oder 4,$_{95}$ gewöhnliche Meilen oder 7 Russische Werften enthält.«

b) Ein Körper ist nur dann seiner großen Entfernung wegen bemerkbar, wenn sein Durchmesser wenigstens $\frac{1}{3000}$ seiner Entfernung beträgt; wäre die Feuerkugel nicht ein selbstleuchtender, sondern ein dunkler und am Tage sichtbarer Körper gewesen, wie groß müßte sein Durchmesser und sein Volumen sein?

Die in Metern gegebene Entfernung der Feuerkugel in Preuß. Fuß verwandelt, giebt 4 527 978,$_{9164}$ Preuß. Fuß; diese Länge durch 3000 dividirt, giebt den gesuchten Durchmesser = 905,$_{39778}$ Fuß, dafür 905,$_6$ Fuß gesetzt.

Das Volumen einer Kugel ist $\frac{1}{6}$ vom Kubus ihres Durchmessers, multiplicirt mit π = 3,$_{14159}$; daher ist das Volumen dieser Kugel = $\frac{1}{6} \times 905{,}_6 \cdot 905{,}_6 \cdot 905{,}_6 \cdot 3{,}_{14159} = \frac{1}{6} \cdot 2\,333\,236\,423{,}_{14194944}$ oder 38 887 273,$_{719}$ Kubikfuß.

2. In dem Pferderennen, welches im Juni 1842 zu Berlin gehalten wurde, durchliefen die schnellsten Pferde ½ Meile bei einfachem Siege in 4 Minuten 20 Sekunden, 3 Minuten 39 Sekunden; bei doppeltem Siege in 4 Minuten 20 Sekunden, 4 Minuten 25 Sekunden ꝛc. Welches war die Geschwindigkeit dieser Pferde, d. h. der Weg, den sie in 1 Sek. zurücklegten, wenn eine Meile = 2000 Ruthen zu 12 Fuß gerechnet wird?

46,$_{154}$; 54,$_8$; 45,$_3$ Fuß in einer Sekunde.

Digitized by Google

3. Ein Renner, welcher in 4 Minuten 20 Sekunden $\frac{1}{7}$ Meile durchläuft, würde mit derselben Geschwindigkeit in welcher Zeit die oben der Feuerkugel bemerkte Geschwindigkeit von 37 330 Metern in 1 Sek. durchlaufen?

3766,242 Meter : 37330 Meter = 260 Sek. : x = 2577,05 Sek. = 42 Minuten 57,05 Sek. Die Geschwindigkeit des Pferdes verhält sich also zur Geschwindigkeit der Feuerkugel = 1 : 2577.

Auch hieraus ergiebt sich die Bestätigung, daß die thierische, und also auch die menschliche Kraft gegen die der Natur verschwindet; und dennoch ist der Mensch auf sein physisches Wesen so stolz; der Geist macht den Mann zum Herrn der Erde, nicht seine Kraft, sein Reichthum!

4. In dem Berliner Pferderennen in den Junitagen geprüfte Zugkraft der Pferde hat man durch Rechnung herausgebracht, daß der braune Wallach des Stallmeisters Sachße 72 Centner auf gewöhnlichem Wege, 162 Centner auf der Chaussee und 1116 Centner auf Eisenbahnen zu ziehen vermögend wäre. Nehmen wie nun an, daß obige Feuerkugel von Wasser gewesen wäre, von welchem ein Kubikfuß 66 Pfund wiegt, wie viele solcher Pferde, als der eben erwähnte, ausgezeichnet starke braune Wallach würden die Wasserkugel auf den 3 verschiedenen Bahnen von der Stelle bewegt haben?

38 887 273,719 . $\frac{3}{5}$ Centn. : 72 Centn. = Pferde = 324 060,6 Pferde zögen die Wasserkugel auf gewöhnlichem Wege ꝛc.

5. In der ökonomisch-physikalischen Gesellschaft zu Königsberg hielt der Prof. Bessel, Direktor der Sternwarte, vor einigen Jahren einen Vortrag über Ebbe und Flut und deren Ursachen, in welchem er durch eigene Rechnung gefundene Resultate bemerkte, unter andern, daß nur dann Ebbe und Flut entstehen könne, wenn die Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes 200 Kubikmeilen Wasser wenigstens in Bewegung setzen; daß daher in der Ostsee ihrer Kleinheit wegen keine Ebbe und Flut stattfinden könne; daß die Kraft, welche eine Ebbe und Flut verursache, über die menschliche Vorstellung gehe, denn alle Menschen zusammen haben seit Adams Zeiten noch keine Kubikmeile von der Stelle bewegt, und dennoch wende die Sonne zur Erregung der Ebbe und Flut nur $\frac{1}{300000}$ derjenigen Kraft an, mit welcher sie die Erde in ihrer Bahn erhalte. a) Wie viele Pferde von der Kraft des oben erwähnten Sachsischen Wallachs sind erforderlich, 200 Kubikmeilen Wasser auf Eisenbahnen in Bewegung zu setzen. Das Gewicht von einem Kubikfuß Meerwasser ist zwar größer als das des destillirten, doch auf diese geringe Differenz kommt es hier nicht an, und wir setzen also das Gewicht von einem Kubikfuß Wasser = 66 Pfd. = $\frac{3}{5}$ Centner.

Ferner setzen wir eine Meile = 24 000 Fuß = 2000 Ruthen, daher ist eine Kubikmeile = 24 000 . 24 000 . 24 000 = 13 824 000 Millionen Kubikfuß; diese mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt, giebt 8 294 500 Millionen Centner; zur Bewegung dieser Last auf Eisenbahnen sind 7431 Millionen Sachsische Wallache erforderlich, und daher zur Bewegung von 200 Kubikmeilen 148 200 Millionen dieser Pferde.

Digitized by Google

b) Nehmen wir an, daß jeder Mensch im Durchschnitte 5 Centner bewegen könne, eine gewiß nicht zu geringe Last, wie viele Menschen werden eine Kubikmeile Wasser bewegen? 1 486 200 Millionen Menschen.

Da man die gegenwärtig auf der Erde lebenden Menschen gegen 1000 Millionen schätzt, so müßten sich also die Bewohner von 1486 Erden mit einander verbinden, um eine Kubikmeile Wasser von der Stelle zu bewegen. Erscheint die Behauptung Bessels übertrieben?

6. Das Produkt aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit heißt die Größe oder Quantität seiner Bewegung. Da die Masse eines Körpers durch sein Gewicht bestimmt wird, so kann man auch sagen, daß die Größe der Bewegung eines Körpers das Produkt aus seinem Gewichte und seiner Geschwindigkeit ist. Wenn z. B. eine Kugel, 6 Pfd. schwer, in 1 Sekunde 8 Fuß, eine andere, 9 Pfd. schwer, in 1 Sek. 15 Fuß durchläuft, so verhält sich die Größe der Bewegung der ersten Kugel zur Größe der Bewegung der andern $= 6 . 8 : 9 . 15 = 16 : 45$.

a) Ein Mann A, welcher ein Gewicht von 150 Pfd. hat, ist in 20 Minuten $\frac{1}{4}$ Meile oder 500 Ruthen, ein anderer B, welcher 190 Pfd. wiegt, in 30 Minuten $\frac{1}{2}$ Meile oder 1000 Ruthen gegangen, in welchem Verhältnisse stehen die Kräfte dieser Männer, die sie zum Gehen verwendeten?

Kraft des A : Kraft des B $= 150 . \frac{500}{20} : 190 . \frac{1000}{30} = 45 : 76$.

b) Eine Lokomotive führt eine Last von 3600 Centnern in 1 Stunde 4 Meilen weit, eine andere soll 5400 Centner in 1 Stunde 5 Meilen weit treiben; wie verhält sich die Kraft der ersten zur andern Lokomotive?

Kraft der Lokomotive I. : Kraft der Lokomotive II. $= 3600 . 4 = 5400 . 5 = 8 : 15$.

Anmerk. Locus der Ort, moveo ich bewege, also loco moveo ich bewege Etwas von der Stelle, ebenso locomotiva vis die Etwas von der Stelle bewegende Kraft, denn vis = Kraft, und ohne vis, die locomotiva oder mit Deutscher Endung, die locomotive.

c) Das Königsberger Dampfschiff, die Gazelle, fährt von Königsberg über Pillau zur See 18 Meilen in 9 Stunden, bis Neufahrwasser, dem Hafen von Danzig; das Danziger Dampfboot, der Pfeil, fährt von Danzig bis Neufahrwasser, etwa eine halbe Meile, in ungefähr 30 Minuten; nehmen wir nun die Last des Pfeils, an Passagieren 150 Personen à 150 Pfund, das Gewicht des ganzen Fahrzeuges $= 2000$ Centnern; die gesammte Last der Gazelle $= G$; die bewegende Kraft des Pfeils $= 2$ Pferdekraft, die bewegende Kraft der Gazelle $= 10$ Pferdekraft, so ist bewegende Kraft des Pfeils : bewegenden Kraft der Gazelle $= (\frac{150 . 150}{110} + 2000) . \frac{1}{100} : G . \frac{18}{9 . 60}$ $= 2$ Pferdekraft : 10 Pferdekraft $= 7275 : 11G = 1 : 5$; also wäre $G = 3306\frac{9}{11}$ Centnern.

Folgende Größen kommen hier also in Rechnung: 1) Gewicht des bewegten Körpers, 2) Geschwindigkeit desselben, 3) bewegende Kraft; da man

Digitized by Google

für die Geschwindigkeit Weg und Zeit setzen kann, so sind also die Größen: 1) Gewicht, 2) Weg, 3) Zeit, 4) bewegende Kraft oder Größe der Bewegung, zu beachten. Sind nun diese 4 Größen gegeben und in einer andern Verbindung 3 dieser Größen, so kann man immer die 4te Größe der andern Verbindung finden.

d) Die gesammte Last der Gazelle nebst Ladung betrage 24 000 Ctnr., die Größe ihrer Bewegung sei 50 Pferdekraft, und sie macht in 9 Stunden 18 Meilen; die Last des Pfeils wird gesucht, wenn er in 40 Minuten $\frac{1}{2}$ Meile mit 3 Pferdekraft zurücklegt. Die Last des Pfeils sei P, so ist

$24\,000 . 2 : \frac{3}{4} . P = 3 : 5$; also $P = 10\,333\frac{1}{3}$ Centner.

e) Des Pfeils Last = 10 000 Centner, er mache in 30 Minuten seine Fahrt = $\frac{1}{2}$ Meile mit der 3 Pferdekraft; die Gazelle habe die Last 100 000 Ctnr., sie macht ihre Fahrt 18 Meilen in 9 Stunden mit welcher Pferdekraft?

Die gesuchte Kraft sei K, so ist:

$10\,000 . 1 : 100\,000 . 2 = 3 : K$; also $K = 60$ Pferdekraft.

Anmerk. Die vorstehenden Sätze sind nur in dem Falle genau richtig, wenn die Körper sich in keinen Widerstand leistenden Mitteln bewegen; da dieses in der Wirklichkeit der Fall nicht ist, denn sie bewegen sich theils in der Luft, theils im Wasser, theils in beiden zugleich, so erleiden dadurch obige Sätze für die Wirklichkeit einige Korrektionen, von denen hier aber nicht die Rede sein kann, weil sie tiefere Kenntnisse der Arithmetik fordern, als hier vorgetragen werden. Die Sätze, welche sich auf den Widerstand beziehen, sagen: der Widerstand wird durch die Oberfläche der sich bewegenden Körper und ihre Geschwindigkeit bedingt; in Hinsicht der Oberfläche: der Widerstand wächst mit der Oberfläche und in Rücksicht der Geschwindigkeit wächst der Widerstand im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit.

7. A macht in $7\frac{1}{2}$ Minuten einen Gang und trägt auf demselben $4\frac{3}{4}$ Schffl.; B macht in 5 Minuten einen Gang und trägt auf demselben 3 Schffl.; B hat schon 10 Gänge gemacht, als A zu tragen anfängt; in welcher Zeit wird A ebenso viele Scheffel als B getragen haben, und wie viele Scheffel hat jeder in dieser Zeit fortgebracht?

Da A in $7\frac{1}{2}$ Minuten $4\frac{3}{4}$ Scheffel trägt, so wird er in der doppelten Zeit das Doppelte, also in 15 Minut. $9\frac{1}{2}$ Scheffel fortschaffen; B trägt in 15 Minuten nun 9 Scheffel, also trägt A in 15 Minuten $\frac{1}{2}$ Schffl. mehr als B weg. In der Zeit, in welcher B 10 Gänge allein machte, trug er 30 Schffl., diese muß also A in einer gewissen Zeit mehr als B in derselben wegtragen; daher wird er dieses nach $\frac{30}{\frac{1}{2}} . 15 = 60 . 15$ Minuten, d. h. in 15 Stunden geleistet haben. Da nun A in $\frac{1}{4}$ Stunde $4\frac{3}{4}$ Schffl., also in 1 Stunde $8 . 4\frac{3}{4} = 38$ Schffl. trägt, so hat er in 15 Stunden $15 . 38 = 570$ Schffl. getragen; B 30 weniger als diese Zahl, also in derselben Zeit nur 540 Schffl.

8. A und B tragen in 16 Minuten 595 Pfund, A und C in 12 Minuten 738 Pfd. und B und C in 15 Minuten 1050 Pfd. fort. Wenn

Digitized by Google

nun diese drei Träger gleichzeitig 17 190 Pfd. fortschaffen sollen, in welcher Zeit wird dieses geschehen, und in welcher Zeit wird jeder einzelne diese Last wegbringen?

In 1 Minute tragen A und B $59\frac{1}{2}$ Pfd., A und C $61\frac{1}{2}$ Pfd., B und C 70 Pfd., an der Summe dieser Pfunde $= 59\frac{1}{2} + 61\frac{1}{2} + 70 =$ 191 Pfd. hat Jeder 2 Minuten getragen; also werden die 3 Träger gemeinschaftlich in $\frac{17190}{191} . 2 =$ 180 Minuten oder 3 Stunden die ganze Last fortgeschafft haben.

Da die 3 Träger in 2 Minuten 191 Pfd. wegschaffen, so entfernen sie in 1 Minute $95\frac{1}{2}$ Pfd.; daher trägt C in 1 Minute $95\frac{1}{2} - 59\frac{1}{2} = 36$, B in 1 Minute $95\frac{1}{2} - 61\frac{1}{2} = 34$, A in 1 Minute $95\frac{1}{2} - 70 = 25\frac{1}{2}$ Pfd. Es braucht demzufolge A $\frac{17190}{25\frac{1}{2}} = 674\frac{8}{17}$ Min. $=$ 11 St. $14\frac{8}{17}$ M., B braucht $\frac{17190}{34} = 505\frac{10}{17}$ Min. $=$ 8 St. $25\frac{10}{17}$ Min., und C braucht $\frac{17190}{36} = 477\frac{1}{2}$ Min. $=$ 7 St. $57\frac{1}{2}$ Min., um die ganze Last allein wegzutragen.

B. Flächen, Gewichte (Kräfte) und Zeit.

9. Es haben 8 Arbeiter in 5 Tagen, da sie täglich 12 Stunden arbeiteten, einen Acker von 192 Ruthen Länge und 126 Ruthen Breite bestellt; so werden 18 dieser Arbeiter in 9 Tagen bei täglich 15stündiger Arbeit einen Acker, der 189 Ruthen breit ist, von welcher Länge bearbeiten können?

8 Arbeit. — 5 Tage zu 12 Stunden — Acker 192° lang, 126° breit.
18 „ — 9 „ „ 15 „ — „ L „ 189° „

8 Arb. : 18 Arb. = 192° L. : A (L., wenn 18 Arb. 5 T. zu 12 St. arb. u. d. Br. 126° ist.)
5 Tag. : 9 Tagen = A : B („ „ „ 9 „ „ „ „ „ „ „ „ „ „)
12 St. : 15 St. = B : C („ „ „ „ „ „ 15 „ „ „ „ „ „ „)
189° Br. : 126° Br. = C : L („ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 189° „)

1 : 27 = 24° L. : L = 648°.

Was bedeutet A in der ersten Proportion? A bezeichnet die Länge des Ackers von 126° Breite, den 18 Arbeiter in 5 Tagen zu 12 St. bestellen.

Der Lehrer hat vorzüglich darauf zu sehen, daß die Schüler die Bedeutung jeder Proportion deutlich einsehen; denn hierin ist der Grund ihrer Zusammensetzung enthalten. Die Regel der Bildung dieser Verhältnisse fassen die Schüler sehr leicht, und wenn sie diese begriffen und Beispiele nach derselben richtig berechnet haben, so begnügen sie sich mit dem Verfahren, ohne das Wesen desselben klar zu durchschauen; und die richtige deutliche Auffassung desselben ist doch der Hauptzweck des Unterrichts.

Aus vorstehender Aufgabe kann man durch Kombination im Ganzen 10 machen; denn die erste Reihe enthält die Data der Bedingung, die zweite die des Bedingten oder der Folge; nun kann man nicht allein jedes Datum der Folge, sondern auch jedes Datum der Bedingung oder des

Digitized by Google

Grundes suchen, wenn man die frühere Bedingung zur Folge und die frühere Folge zum Grunde macht. Diese Kombinationen wird jeder Lehrer leicht machen können, daher will ich bei derselben nicht verweilen.

Anmerk. Strenge genommen ist vorstehende Aufgabe unrichtig; denn je länger Jemand arbeitet, desto mehr wird die zur Arbeit erforderliche Kraft geschwächt; also kann er im Verhältnisse der täglichen Stunden auch nicht eine verhältnißmäßige Arbeit täglich liefern. Dieses Gesetz finden wir in allen Maschinen und in der Natur begründet; so hebe ich zwar vermittelst eines Hebebaumes eine größere Last als mit bloßen Händen, aber dafür auch nicht so hoch, als ich es mit diesen vermöchte. Ueberhaupt kann man sagen, daß man durch dasselbe Mittel, durch welches man an Kraft gewinnt, zugleich an Zeit verliert, oder was dasselbe ist, man muß mit Hilfe eines Mittels einen größern Raum als ohne dasselbe beschreiben.

10. In 2 Tagen zu 12 Stunden haben 5 Arbeiter eine Wiese von 75 Ruthen Länge und 72 Ruthen Breite abgemäht; 8 andere Arbeiter haben in 6 Tagen eine Wiese von 260 Ruthen Länge und 144 Ruthen Breite abgemäht, indem sie täglich 13 Stunden arbeiteten. Ein Gutsherr wünscht bei dem für die Heuernte sehr günstigen Wetter in kurzer Zeit eine Wiese von 210 Ruthen Breite und 1620 Ruthen Länge abmähen zu lassen. Daher miethet er 13 Arbeiter der ersten und 19 Arbeiter der zweiten Art, und verabredet mit ihnen, daß sie täglich 15 Stunden arbeiten; in wie vielen Tagen werden sie mit dieser Wiese zu Stande kommen?

Von den erstern Arbeitern hat jeder in einer Stunde $\frac{75 \cdot 72}{5 \cdot 2 \cdot 12} = 45$ □R. abgemäht, jeder von der zweiten Art hat in einer Stunde $\frac{260 \cdot 144}{8 \cdot 6 \cdot 13} = 60$ □R. abgeschnitten; daher werden 13 Arbeiter der ersten Art in einer Stunde $13 \cdot 45 = 585$ □R., und 19 Arbeiter der zweiten Art werden in einer Stunde $19 \cdot 60 = 1140$ □R. abhauen. Folglich schneiden die 32 Schnitter in einer Stunde $585 + 1140 = 1725$ □R. ab; also in 15 Stunden oder einem Tage beleisten sie $15 \cdot 1725$ □R. Da nun die zu bearbeitende Wiese $210 \cdot 1620$ □R. umfaßt, so brauchen die gemiethteten Arbeiter $\frac{210 \cdot 1620}{15 \cdot 1725} = 13\frac{9}{115}$ Tage oder 13 Tage 1 Stunde 10 Minuten $26\frac{2}{23}$ Sekunden.

Anmerk. Auch aus dieser Art Aufgaben kann man mehrere machen, und zwar dadurch, daß man andere Stücke derselben zur Berechnung vorlegt; denn anstatt der gegebenen täglichen Stunden der Arbeit, kann man die Zahl der Tage festsetzen und die tägliche Stundenzahl suchen lassen; ferner kann man aus der gegebenen Zahl der Tage und der Stunden die eine Dimension der Arbeit suchen, wenn die andere gegeben ist. Endlich kann man aus der gegebenen Zeit und Arbeit die Zahl der Arbeiter berechnen, wenn die Zahl der einen Klasse der Arbeiter bestimmt ist. Noch eine größere Abwechselung kann man in diese Aufgaben einführen, wenn man die Arbeiter zu verschiedenen Zeiten ihre Arbeit beginnen läßt. Ein Beispiel der letzten Art will ich hier noch behandeln.

11. Die Wiesen eines Gutsherrn ziehen sich längs dem Ufer eines Flusses in einer niedrigen Gegend hin, daher muß er die Tage ihrer Trockenheit zum Einernten des Heues benutzen. Die Wiesen haben im Durchschnitte

Digitized by Google

eine Breite von 480 Ruthen und eine Länge von 2160 Ruthen; für diese Größe kann er sogleich nicht eine hinlängliche Zahl Arbeiter auftreiben, daher stellt er bei der Arbeit zunächst 16 Arbeiter der ersten Art voriger Aufgabe an; 2 Tage später miethet er 9 Arbeiter der zweiten Art, und wieder einen Tag später 6 Arbeiter der ersten und 4 Arbeiter der zweiten Art. Er ist mit ihnen übereingekommen, daß sie täglich von frühe $2\frac{1}{2}$ bis 6 Uhr arbeiten, dann $\frac{1}{2}$ Stunde lang das Frühmahl einnehmen, darauf wieder bis $9\frac{1}{2}$ Uhr thätig sind, dann $\frac{1}{4}$ Stunde lang einen Imbiß zu sich nehmen; hierauf wieder bis 12 Uhr ihre Arbeit fortsetzen. Die Zeit bis 2 Uhr verwenden sie zum Mittagsmahle und zur Ruhe, dann arbeiten sie wieder bis 5 Uhr, halten $\frac{1}{4}$ Stunde lang Vesperbrot und setzen dann ihre Arbeit ununterbrochen bis 8 Uhr 45 Minuten fort, mit welcher Zeit sie ihre tägliche Arbeit beschließen. In welcher Zeit ist die ganze Wiese abgemäht?

Von Morgens $2\frac{1}{2}$ bis 6 Uhr sind $3\frac{1}{2}$ Stunden, von $6\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{4}10$ $9\frac{1}{2}$ Uhr sind 3 Stunden, von $9\frac{3}{4}$ bis 12 Uhr sind $2\frac{1}{4}$ Stunden, also arbeiten die Leute vor Mittag im Ganzen $8\frac{3}{4}$ Stunden. Von 2 bis 5 Uhr sind 3 Stunden, von $5\frac{1}{2}$ bis $8\frac{3}{4}$ Uhr Abends sind $3\frac{1}{4}$ Stunden, daher sind die Männer am Nachmittage $6\frac{1}{4}$ Stunden thätig, folglich beträgt ihre tägliche Arbeit $8\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} = 15$ Stunden.

Da nun jeder Mann der ersten Klasse in jeder Stunde 45 □R., so wird er in einem Tage $15 . 45 = 675$ □R. abmähen. Jeder Mann der zweiten Klasse mäht in einer Stunde 60, also in einem Tage $15 . 60 = 900$ □R. ab.

Die 16 Mann erster Klasse haben also in 2 Tagen $16 . 2 . 675$ □R., 16 Mann erster und 9 Mann zweiter Klasse bearbeiten in 1 Tage $16 . 675 + 9 . 900$ □R. Dieses macht zusammen 30 375 □R. Die ganze Wiese enthält $480 . 2160 = 1\,036\,800$ □R., daher bleiben für die übrigen Tage noch 1 006 425 □R. zu bestellen, daran von jetzt ab 22 Arbeiter erster und 13 Arbeiter zweiter Klasse arbeiten; diese beleisten täglich $22 . 675 + 13 \times 900 = 26\,550$ □R., daher müssen sie noch $\frac{1006425}{26550} = 37\frac{107}{118}$ Tage arbeiten, und sie haben also ihre Arbeit nach 37 Tagen 13 Stunden 36 Minuten $6\frac{6}{59}$ Sekunden beendigt, d. h. sie haben ihre Arbeit am 38sten Tage Abends 8 Uhr 21 Minuten $6\frac{2}{59}$ Sekunden seit der Thätigkeit aller vollendet.

12. Ein Mühlenbaumeister will zur Anlegung einer Mühle den Querdurchschnitt eines Flusses seinem Inhalte nach ermitteln, um die Wassermenge beurtheilen zu können, welche in einer gewissen Zeit durch diesen Querdurchschnitt strömt. Daher zieht er quer über den Fluß eine Schnur AB, die er am Rande des Ufers in A und B an tief eingeschlagene Pfähle stark angespannt befestigt. Nun fährt er auf einem Kahne längs der Schnur, doch nicht ober-, sondern unterhalb derselben, mit dem Senkbleie in der

Digitized by Google

Hand, langsam, mit vielen Ruhepunkten, um Zeit zur Messung der Tiefe des Flusses zu haben, über denselben. (Fig. 77.)

Angenommen nun, daß er die Tiefe des Flusses von je 3 zu 3 Fuß auf der Länge der Schnur, AC = 3′, CD = 3′, DE = 3′, EF = 3′ ꝛc., messe und finde Cc = 1′ 8″, Dd = 3′ 4″, Ee = 6′ 5″, Ff = 7′ 7″, Gg = 9′ 10″, Hh = 13′ 4″, Ji = 14′ 6″, Kk = 15′, Ll = 16′ 2″, Mm = 17′ 4″, Nn = 17′ 6″, Oo = 16′ 3″, Pp = 16′, Qq = 16′ 3″, Rr = 15′ 11″, Ss = 14′ 6″, Tt = 11′ 8″, Uu = 7′ 3″.

Nun trägt er eine Linie nach verjüngtem Maßstabe auf Papier; weil AB = 19 . 3′ = 57′ ist, so macht er die Linie auf Papier = 19″; daher verhält sich die verjüngte Linie AB auf Papier zur wirklichen Breite AB des Flusses = 19″ : 57′ = 19″ : 57 . 12″ = 1 : 36; folglich ist seine verjüngte Linie AB = $\frac{1}{36}$ der Wirklichkeit oder der natürlichen Länge.

Seine verjüngte Linie AB theilt er nun in ebenso viele Abschnitte als die, durch Knoten oder andere Kennzeichen, getheilte Schnur AB enthält, und da sie 19 Abschnitte, jeden zu 3′, AC = CD = 3′ ꝛc., in sich begreift, so theilt er seine verjüngte Linie AB in 19 gleiche Theile, davon jeder also ein Zoll ist; darauf errichtet er von Zoll zu Zoll in C, D, E, F ꝛc. Senkrechte Cc, Dd, Ee, Ff ꝛc., und macht diese gleichfalls $\frac{1}{36}$ ihrer natürlichen Länge gleich (was er entweder durch Zeichnung oder Rechnung ausführen kann), so erhält er dadurch, indem er die Punkte A, c, d, e, f, ... t, u, B durch Gerade verbindet, eine dem Querdurchschnitte des Flusses (Profil desselben genannt) ähnliche Figur; denn die krummen Linien, welche sich durch den Querdurchschnitt auf der Oberfläche des Flußbettes darstellen, werden in diesen kurzen Distanzen nahe mit den geraden Linien zusammenfallen oder können als gerade Linien angesehen werden. Durch die Senkrechten auf AB und die Verbindungslinien der Endpunkte A, c, d, e ꝛc. wird die ganze Figur in 2 △△ ACc und BUu, und in lauter Parallel-trapeze CDdc, DEed, EFfe ꝛc. zerlegt. Nun berechnet er den Inhalt der beiden Dreiecke und jedes der Trapeze nach früher gelehrten Sätzen. Es ist nämlich $\triangle ACc = \frac{AC \,.\, Cc}{2}$, $\square CDdc = CD \,.\, \left(\frac{Cc + Dd}{2}\right)$, $\square DEed = DE \,.\, \left(\frac{Dd + Ee}{2}\right)$ ꝛc. Bevor er aber diese Rechnung, die etwas weitläuftig ist, ausführt, darin er sich überdies leicht verrechnen könnte, entwickelt er sich zuerst auf folgende Weise den Ausdruck dazu.

Die Summe der beiden Dreiecke und 17 Trapeze ist diese

$$\frac{AC \,.\, Cc}{2} + CD \,.\, \left(\frac{Cc + Dd}{2}\right) + DE \,.\, \left(\frac{Dd + Ee}{2}\right) + EF \,.\, \left(\frac{Ee + Ff}{2}\right) + FG \,.\, \left(\frac{Ff + Gg}{2}\right) + GH \,.\, \left(\frac{Gg + Hh}{2}\right) + HJ \,.\, \left(\frac{Hh + Ji}{2}\right) + JK \times \left(\frac{Ji + Kk}{2}\right) + KL \,.\, \left(\frac{Kk + Ll}{2}\right) + LM \,.\, \left(\frac{Ll + Mm}{2}\right) + MN \,.\, \left(\frac{Mm + Nn}{2}\right)$$

Digitized by Google

$$+ NO \cdot \left(\frac{Nn+Oo}{2}\right) + OP \cdot \left(\frac{Oo+Pp}{2}\right) + PQ \cdot \left(\frac{Pp+Qq}{2}\right) + QR \times \left(\frac{Qq+Rr}{2}\right) + RS \cdot \left(\frac{Rr+Ss}{2}\right) + ST \cdot \left(\frac{Ss+Tt}{2}\right) + TU \cdot \left(\frac{Tt+Uu}{2}\right) + \frac{UB \cdot Uu}{2}.$$

Nun sind aber AC, CD, DE ꝛc. alle unter einander gleich; ferner wird man bemerken, daß jede der Senkrechten Cc, Dd, Ee ꝛc. in obiger Summe doppelt vorkommt; daher ist diese Summe reducirt $= AC \cdot (Cc + Dd + Ee + Ff + Gg + Hh + Ji + Kk + Ll + Mm + Nn + Oo + Pp + Qq + Rr + Ss + Tt + Uu)$.

Nun suche man die Summe aller Senkrechten, welche in den Klammern stehen, so wird man dieselbe $= 220\frac{1}{2}$ Fuß finden; daher ist der Querdurchschnitt des Flusses $= 3 \cdot 220\frac{1}{2} = 661\frac{1}{2}$ □Fuß.

Anmerk. Eine Zeichnung nach verjüngtem Maße ist leicht anzufertigen; eine Beschreibung dieser Zeichnung würde hier zu viel Raum wegnehmen, daher übergehe ich sie, und will nur die Berechnung ähnlicher Aufgaben hierüber etwas auseinandersetzen.

Die Zeichnung einer Größe nach verjüngtem Maßstabe kommt in der Geographie, im Baufache, im Militär bei Aufnahme einer Gegend, in der Naturgeschichte bei Zeichnung der Thiere und Pflanzen ꝛc., in der Technik ꝛc. vor, und daher ist dieser Gegenstand nicht ohne Interesse, noch weniger ohne Nutzen, und junge Leute müssen auch Aufgaben darüber berechnen können; damit nicht angehende Conducteure hierüber in Verlegenheit gerathen, wie ich dieses an Manchen erfahren habe, die mich in dieser Sache um Belehrung ersuchten.

Die Aufgaben darüber können folgende sein:

1) Die natürliche Größe und das Verhältniß zum verjüngten Maße sind gegeben; man sucht dieses;

2) die natürliche Größe und das verjüngte Maß sind gegeben; man sucht ihr Verhältniß;

3) eine Zeichnung nach verjüngtem Maße und ihr Verhältniß zu einem andern verjüngten Maße sind gegeben; man sucht das letztere;

4) zwei Zeichnungen nach verjüngten Maßen sind gegeben; man sucht ihr Verhältniß;

5) eine Karte einer Gegend ohne Angabe ihres verjüngten Maßes ist gegeben; man sucht dieses letztere.

13. Ein Feldmesser hat die Gegend um Danzig im Umkreise von 5 Meilen aufgenommen, und will sie auf einer Karte darstellen, deren Verjüngung $\frac{1}{24000}$ oder $\frac{1}{50000}$ beträgt, d. h. deren Längeneinheiten $\frac{1}{24000}$, $\frac{1}{50000}$ der natürlichen Längeneinheiten sind; welche Größe wird die Karte erhalten und nach welchem Maße, und die Fläche der Karte wird welches Verhältniß zur natürlichen Fläche haben?

Die Einheit der natürlichen Größe ist die Meile $= 2000$ Ruthen, daher muß die Längeneinheit des verjüngten Maßes $= \frac{2000}{24000} = \frac{1}{12}$ Ruthe $= 1$ Fuß sein.

Digitized by Google

Da nun die Gegend um Danzig im Umkreise von 5 Meilen, also in die Länge und Breite nach 10 Meilen aufgenommen ist, so muß die Karte 10′ lang und 10′ breit sein, und enthält also dem Flächeninhalte nach 100 □Fuß. Das Verhältniß der Karte zur Natur in Rücksicht des Flächeninhalts ist gleich $\frac{1}{240000} \cdot \frac{1}{240000} : 1 = 1 : 576\,000\,000$. Für den Fall, daß die Verjüngung $\frac{1}{500000}$ sein soll, ist die Einheit des verjüngten Maßes $= \frac{2000}{500000}$ Ruthen $= \frac{1}{25}$ Ruthe $= \frac{12}{25}' = 5{,}76''$ Duodecimalmaß $= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}' =$ 4 Zoll Decimalmaß.

14. Specialkarten haben gewöhnlich $\frac{1}{1500000}$, Generalkarten $\frac{1}{2500000}$, $\frac{1}{5000000}$ ꝛc. der natürlichen Größe, oder ihre Verjüngung beträgt $\frac{1}{1500000}$ ꝛc.; wie groß ist die verjüngte Einheit, wie groß 1 Morgen, 1 Hufe, 1000 Morgen, 500 Hufen?

Die Einheit der natürlichen Länge bleibt stets die Meile, in Preußen 1 Meile $= 2000$ Ruthen; daher ist für die Verjüngung

$\frac{1}{1500000}$ eine natürliche Meile $= \frac{2000}{1500000}{}^0 = 1{,}92''$ Odm. $= 1{,}333''$ Dm.

$\frac{1}{2500000}$ " " " $= \frac{2000}{2500000}{}^0 = 1{,}15''$ " $= 0{,}8''$ "

$\frac{1}{5000000}$ " " " $= \frac{2000}{5000000}{}^0 = 0{,}576''$ " $= 0{,}4''$ "

Eine □Meile auf der Karte verhält sich zu einer natürlichen □Meile nach obigen Verjüngungen $= 1 : 22\,500\,000\,000$, $= 1 : 62\,500\,000\,000$, $= 1 : 250\,000\,000\,000$.

Eine □Meile in der Natur $= 2000 \cdot 2000$ □Ruthen $= \frac{4000000}{180} = 22\,222\frac{2}{9}$ Morgen.

Ein Morgen $= 180$ □Ruthen $= \frac{180}{4000000} = \frac{9}{200000}$ □Meilen. Daher ist 1 Morgen, nach der Verjüngung $\frac{1}{1500000}$, $= \frac{9}{200000} \cdot \frac{16}{25}$ □Zoll Decimalm. $= \frac{9}{312500}$ □Zoll $= 0{,}072$ □Linien; 1 Morgen, nach der Verjüngung $\frac{1}{2500000}$, $= \frac{9}{200000} \cdot \frac{16}{625}$ □Zoll $= \frac{9}{78125}$ □Linien ꝛc.

500 Hufen $= 500 \cdot 30$ Morgen; so sind

" " $= \frac{500 \cdot 30 \cdot 9}{200000} = \frac{27}{40}$ □Meilen,

" " $= 10\frac{4}{5}$ □Zoll für die Verjüngung $\frac{1}{500000}$;

" " $= 1\frac{2}{5}$ " " " " " $\frac{1}{1500000}$;

" " $= 0{,}216$ " " " " " $\frac{1}{2500000}$;

" " $= 0{,}108$ " " " " " $\frac{1}{5000000}$.

15. Die Einheiten der natürlichen Längen sind Meilen; von diesem Gegenstande will man ein solches Bild entwerfen, daß die Einheiten seiner Längen Zolle sind; in welcher Verjüngung hat man das Bild anzufertigen?

Da eine Meile $= 2000$ Ruthen $= 24\,000' = 12 \cdot 24\,000''$, so ist die Verjüngung $= 1 : 288\,000$ oder $\frac{1}{288000}$, wenn also auf Karten $\frac{1}{288000}$ steht, so sind Meilen auf derselben wirkliche Zolle.

16. Nach welchem Maßstabe muß eine Karte angefertigt werden, und welches ist ihre Verjüngung, wenn ihre Grade Zolle sein sollen?

Auf einen mittlern Meridiangrad werden $14\frac{2}{3}$ Preuß. Meilen gerechnet, das sind $14\frac{2}{3} \cdot 2000 \cdot 12 \cdot 12 = 4\,224\,000$ Zollen; daher ist die Verjün-

Digitized by Google

gung $= \frac{1}{4224000}$, und die Meile der natürlichen Länge wird also durch $\frac{2000^0}{14\frac{2}{3} . 2000 . 12 . 12} = \frac{1''}{14\frac{2}{3}} = \frac{3}{44}$ Zoll oder $\frac{16}{44} = \frac{9}{11}$ Linien dargestellt.

17. Ein Feldmesser bekommt von der Regierung den Auftrag, einen Theil einer Generalkarte, deren Verjüngung $\frac{1}{100000}$ ist, als eine Specialkarte, deren Längen das 5fache der gegebenen Karte sind, zu übertragen; welche Größe müssen die natürlichen Meilen auf dieser Karte haben? Und wenn die zu zeichnende Karte eine Gegend von 30 Meilen in die Länge und 20 Meilen in die Breite umfassen soll, wie lang und breit wird die Karte werden?

Das 5fache von $\frac{1}{100000} = \frac{1}{20000}$; daher müssen die Meilen der Karte durch $\frac{1}{20000}$ der natürlichen Meilen dargestellt werden. Nun ist $\frac{1}{20000}$ einer Meile $= \frac{2000^0}{20000} = \frac{1}{20}$ Ruthe $= \frac{12'}{20} = \frac{3}{5}'$ Duodecimalmaß $= \frac{10}{20} = \frac{1}{2}'$ Decimalmaß; daher betragen die natürlichen Meilen auf dieser Karte $\frac{3}{5}'$ oder $7\frac{1}{2}''$ Duodecimalmaß oder $\frac{1}{2}'$ oder $5''$ Decimalmaß.

Die Länge der Karte ist also $30 . \frac{3}{5} = 18'$ Duodecimalmaß, und ihre Breite $= 20 . \frac{3}{5} = 12'$ desselben Maßes, und ihre Fläche wird also den Fußboden eines Zimmers von 18 Fuß Länge und 12 Fuß Breite bedecken.

18. Man hat zwei Karten, welche nach verschiedenen Maßstäben gefertigt sind, und sucht ihr Verhältniß und das zur Wirklichkeit. Hier können folgende Fälle stattfinden:

a) Die Verjüngungen sind auf den Karten in Zahlen und die Meilen durch gerade Linien als Maßstäbe angegeben; z. B. (Fig. 78.) ab soll die Länge einer Meile nach verjüngtem Maßstabe von $\frac{1}{150000}$, AB die Länge einer Meile, dessen Maßstab $\frac{1}{50000}$ der natürlichen Länge sein soll; daher ist ab : AB $= \frac{1}{150000} : \frac{1}{50000} = 1 : 3$; also muß 3ab $=$ AB sein; nach der Zeichnung sieht man sogleich, daß dieses Verhältniß nicht stattfindet, und läßt sich dieses durch das Augenmaß nicht genau bestimmen, so nimmt man einen Zirkel zu Hilfe. Stimmen die Längen nach den Maßstäben mit den Längen nach den Zahlenangaben überein, so sind die Karten nach einem und demselben Maße, also entweder nach Preuß., oder Franz., oder Engl. Längenmaßen gefertigt; findet die Uebereinstimmung nicht statt, so folgt hieraus, daß die Karten, unter Voraussetzung der richtigen Zeichnung, nach verschiedenen Ländermaßen gefertigt sind; und da ich nun das Maß meines Landes kenne, so kann ich darnach das Maß des Landes ermitteln, nach dessen Maße die Karten gefertigt sind. Finde ich aber, mit Zuziehung anderer Hilfskenntnisse, daß keines Landes Linien, Zoll, Fuß ꝛc. die Länge nach den Maßstäben der Karten haben können, entweder weil sie zu klein oder zu groß nach der Rechnung und Darstellung ausfallen, was folgt hieraus? Ist es nicht offenbar, daß die Karten unrichtig sind? Man vergleiche die gewöhnlichen Karten nach diesen Ansichten, und man wird sich über ihre Ungenauigkeit wundern.

b) Nur die Verjüngungen sind in Zahlen angegeben, z. B. $\frac{1}{100000}$ und $\frac{1}{250000}$, so müssen sich sowohl die Längen- als auch die Breitengrade

Digitized by Google

dieser Karten eben so, d. h. $\frac{1}{100000} : \frac{1}{250000} = 5 : 2$ verhalten, und findet dieses nicht statt, so ist wenigstens eine, oder es sind beide Karten unrichtig.

Finde ich aber, daß die Karten richtig sind, so kann ich auch leicht den Maßstab zu jeder Karte, z. B. nach Preuß. Maße, zeichnen. Denn die Karten sind gewöhnlich nach geographischen Meilen, deren 15 auf einen Grad des Aequators oder auf einen mittlern Meridiangrad gehen, gezeichnet. Nun weiß ich, daß ein solcher Grad $14\frac{3}{4}$ Preuß. Meilen à 2000 Ruthen enthält, daher ist 1 Pr. Ml. : 1 geogr. Ml. $= 15 : 14\frac{3}{4} = 45 : 44$.

Nach einem beliebigen Maße, dessen Verhältniß ich zu einem Grade kenne, messe ich nun einen Grad, oder der Genauigkeit wegen mehrere Grade; angenommen, ich habe einen Preuß. Fuß, in Zolle und Linien getheilt, und eine Karte von Preußen, deren Verjüngung $\frac{1}{100000}$ beträgt, so müßte, da ich weiß, daß $14\frac{3}{4}$ Preuß. Meilen à 2000 Preuß. Ruthen auf einen mittlern Meridiangrad gehen, ein Grad der Breite $= 14\frac{3}{4}.2000^{0} = 14\frac{3}{4}.2000.144$ Zoll sein; und weil die Verjüngung $\frac{1}{100000}$ angenommen ist, so ist die Länge eines Meridiangrades, oder eines Grades der Breite $= \frac{14\frac{3}{4}.2000^{0}.144}{100000}$ Zoll $= 42{,}_{24}$ Zoll, also eine Minute dieser Breite $= \frac{42{,}_{24}}{60} = 0{,}_{704}''$ $= 8{,}_{448}$ Linien eines vor mir liegenden Fußes sein. Hiernach kann ich schon beurtheilen, ob meine Karte richtig in dem angegebenen Verhältnisse gezeichnet ist. Ich kann aber auch daraus die Länge einer Meile auf dieser Karte finden. Denn da $42{,}_{24}$ Zoll mehr als $3\frac{1}{2}$ Fuß betragen, so wird die vor mir liegende Karte, welche nicht über 2 Fuß breit ist, nicht einen Grad in der Breite halten; also messe ich 10 Minuten auf derselben, diese müssen also $7{,}_{04}$ Zoll halten, oder $84{,}_{48}$ Linien; nun sind 10 Minuten $= \frac{1}{6}$ Grad $= \frac{14\frac{3}{4}}{6} = \frac{44}{18} = \frac{22}{9}$ Meilen; also sind $\frac{22}{9}$ Meilen $= 84{,}_{48}$ Linien, daher 1 Meile $= \frac{9.84{,}_{48}}{22} = 34{,}_{56}$ Linien, d. h. 2 Zoll $10{,}_{56}$ Linien auf der Karte.

Auf dieselbe Weise kann ich die andere Karte, deren Verjüngung $\frac{1}{250000}$ beträgt, beurtheilen.

C. Körper, Gewichte (Kräfte) und Zeiten.

1. Nun fahre ich fort, dasjenige Verfahren anzugeben, welches der Mühlenbaumeister anwendet, die Quantität des Wassers zu ermitteln, welches in einer gegebenen Zeit durch oben gedachten Querdurchschnitt des Flusses strömt. Zunächst will er die mittlere Geschwindigkeit des Stromes erfahren. Nun weiß er, daß das Wasser eines Flusses nicht an allen Stellen seines Laufes eine gleiche Geschwindigkeit hat, sondern daß sich diese nach dem größern oder geringern Gefälle richtet; daher wählt er eine nicht zu geringe Di-

Digitized by Google

stanz zur Messung der Geschwindigkeit; er weiß ferner, daß das Wasser in der Mitte des Flusses, oder eigentlich im Strome, d. h. wo das Bette des Flusses am tiefsten ist, seine größte Geschwindigkeit und näher nach dem Ufer zu eine geringere hat; er weiß überdies, daß die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in verschiedenen Tiefen verschieden ist, daß sie nämlich mit der Tiefe abnimmt; diese Umstände berücksichtigend, unternimmt er Folgendes. Zu seiner Beobachtung wählt er nach seiner Bequemlichkeit eine Strecke von 500 Ruthen von seinem Querdurchschnitte den Fluß hinauf; also 500 Ruthen oberhalb seines Querdurchschnittes zieht er eine Schnur quer über den Fluß so, daß sie die Wasserfläche berührt, oberhalb derselben legt er hohle, hölzerne Kugeln, von nicht geringem Durchmesser, damit sie während ihres Schwimmens deutlich sichtbar seien, in die Mitte des Stromes und näher nach den Ufern hin 3 Kugeln, außerdem noch 3 andere in verschiedenen Tiefen, nach seiner Absicht mit Blei beschwert, an deren jede eine Schnur mit einem Korkflößchen versehen, welches deutlich erkennbar ist, befestigt; nach dieser Vorbereitung zieht er die Schnur über den Fluß hinweg, wodurch die Kugeln Freiheit zum Schwimmen mit dem Laufe des Flusses erhalten; er geht oder reitet längs dem Ufer des Flusses, eine Uhr, Sekunden zeigend, in der Hand, und beobachtet den Lauf der schwimmenden Kugeln; an seinem Querdurchschnitte hat er gleichfalls eine Schnur quer über den Fluß, seine Oberfläche berührend, gezogen. Die Kugeln, welche oberhalb des Wassers schwimmen, hat er mit A, B, C bezeichnet, A in der Mitte des Stromes; die, welche in gewissen Tiefen über der Wasseroberfläche schwimmen, mit a, b, c, und a wieder in der Mitte. An die, die Oberfläche des Wassers berührende Schnur an seinem Querdurchschnitte, kommt nach einem Laufe

von	25	Minuten	A,	
»	26	» 40	Sekunden	B,
»	26	» 45	»	C,
»	28	» 20	»	a,
»	28	» 25	»	b,
»	28	» 30	»	c;

aus der Länge des Weges = 500 Ruthen = 6000 Fuß und der Dauer der Zeiten jeder Kugel sucht er nun ihren Weg in einer Sekunde, d. h. ihre Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit	der	Kugel	A = $\frac{6000}{25.60}$ =	4 Fuß.
»	»	»	B = $\frac{6000}{1600}$ =	3,750 Fuß.
»	»	»	C = $\frac{6000}{1605}$ =	3,738 »
»	»	»	a = $\frac{6000}{1700}$ =	3,530 »
»	»	»	b = $\frac{6000}{1704}$ =	3,519 »
»	»	»	c = $\frac{6000}{1710}$ =	3,509 »
				22,046 Fuß.

Digitized by Google

Die Summe der Geschwindigkeiten aller 6 Kugeln ist also $22,_{046}$ Fuß, diese durch 6 dividirt, giebt die mittlere Geschwindigkeit $= 3,_{6743}$ Fuß; also strömt in jeder Sekunde ein Wasser-Prisma, welches zur Grundfläche den Querdurchschnitt, und zu seiner Höhe die mittlere Geschwindigkeit des Wassers hat, durch gedachten Querdurchschnitt. Der kubische Inhalt aber eines Prisma ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe; nun war der Querdurchschnitt $= 61\frac{1}{2}$ □Fuß, und die mittlere Geschwindigkeit des Wassers $= 3,_{674333}\ldots$ Fuß; daher ist der Inhalt dieses Prisma $= 661,_5 \times 3,_{674333}\ldots = 2430,_{5715}$ Kubikfuß. Folglich strömen in jeder Sekunde $2430,_{5715}$ Kubikfuß Wasser durch den Querdurchschnitt.

Man kann nun die Frage aufstellen, welche Pferdekraft diese Wassermasse mit ihrer gegebenen Geschwindigkeit ausübe. Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir das früher erwähnte Sachsische Pferd, das auf Eisenbahnen 1116 Centner ziehen soll, nehmen; ferner nehmen wir an, daß es in jeder Sekunde 2 Schritte zu 2 Fuß mache, dann ist die Kraft dieses Pferdes $1116 . 4 = 4464$. Das specifische Gewicht des Flußwassers wird von Manchen $= 1,_{009}$ angegeben, gewiß ist es schwerer als destillirtes Wasser, doch wollen wir das Gewicht eines Kubikfußes des Flußwassers nur $= 66$ ℔ $= \frac{3}{4}$ Ctr. setzen; so ist das Gewicht obiger Wassermasse $= \frac{3}{4} . 2430,_{5715} = 1458,_{3429}$ Ctr.; also hat dieses Wasser eine $0,_{327}$ Pferdekraft, was in Wahrheit von der Wirklichkeit sehr abweicht, und dieses rührt von den unrichtigen Annahmen her. Rechnet man 10 Cntr. auf ein Pferd, so können diese Wassermasse kaum 145 Pferde wegschleppen.

2. Ein Maurermeister hat die Wahl unter drei Maurergesellen zu einer Arbeit zu treffen; er weiß, daß A und B zusammen in 2 Tagen 560 Kubikfuß, A und C in 3 Tagen 882 Kubikfuß und B und C in 5 Tagen 1430 Kubikfuß einer Mauer aufgeführt haben. Von einem Gebäude, welches 48′ lang, 24′ breit ist, soll eine Mauer von 2′ Dicke 30′ hoch gemacht werden. In welcher Zeit würde jeder einzelner Geselle und in welcher die 3 zusammen, bei gleichzeitiger Arbeit, diese Mauer vollenden?

A und B machen in einem Tage 280, A und C in einem Tage 294 und B und C in einem Tage 286 Kubikfuß; daher macht A in einem Tage $294 - 286 = 8$ und C in einem Tage $294 - 280 = 14$ Kubikfuß mehr als B in einem Tage. Hieraus ergiebt sich die doppelte Arbeit von B in einem Tage $= 280 - 8 = 272$, also die tägliche Arbeit des B $= 136$ Kubikfuß; ferner findet man, daß A in einem Tage 144, und C in einem Tage 150 Kubikfuß anfertigt.

Die ganze Grundfläche des Gebäudes sammt der Mauer beträgt $48.24 = 1152$ □Fuß. Da die Mauer 2 Fuß dick sein soll, so sind die Dimensionen der von der Mauer begrenzten Grundfläche 44 und 20′, also ihr Inhalt $= 44.20 = 880$ □Fuß; daher ist die Grundfläche der Mauer $=$

Digitized by Google

$1152 - 880 = 272$ □Fuß, und weil sie 30′ hoch sein soll, so beträgt ihr kubischer Inhalt $272 . 30 = 8160$ Kubikfuß.

A kann also diese Mauer allein in $\frac{8160}{144} = 56\frac{2}{3}$ Tagen, B in $\frac{8160}{136} = 60$ Tagen, C in $\frac{8160}{150} = 54\frac{2}{5}$ Tagen aufführen.

Alle 3 Gesellen verfertigen täglich $144 + 136 + 150 = 430$ Kubikfuß; daher können sie diese Mauer bei gleichzeitiger Arbeit in $816 : 430 = 18\frac{4}{43}$ Tagen vollenden.

3. Das specifische Gewicht des Blei's ist $= 11{,}445$, des Queckfilbers $= 13{,}597$. Jemand will zu einer Festlichkeit einen Springbrunnen in aller Eile anfertigen; die dazu zu gebrauchende Röhre hat einen Zoll als innern Durchmesser, und das Wasser seines Springbrunnens wünscht er bis zu einer Höhe von 20′ zu treiben; wie vieles Blei oder Queckfilber braucht er dazu; d. h. ein Wasser-Cylinder von 1 Zoll Durchmesser und 20 Fuß Höhe hat gleiches Gewicht mit einem Cylinder von demselben Durchmesser und welcher Höhe, wenn dieser Cylinder von Blei oder Queckfilber ist?

Die Grundfläche dieses Cylinders ist $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . 3{,}14159$ □Zoll, und weil seine Höhe 20′ oder $20 . 12''$ beträgt, so ist sein Inhalt $= 20 . 12 . \frac{1}{4} \times 3{,}14159 = 60 . 3{,}14159 = 188{,}4954$ Kubikzoll. Da nun das Gewicht von 1 Kubikfuß Wasser $= 66$ ℔, so ist das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser $= \frac{66}{1728} = \frac{11}{288}$ ℔; also ist das Gewicht von dem oben gedachten Wasser-Cylinder $= 188{,}4954 . \frac{11}{288}$ ℔.

Da das specifische Gewicht des Bleies $= 11{,}445$ ist, so wiegt 1 Kubikzoll von demselben $11{,}445 . \frac{11}{288}$ ℔; folglich braucht man $188{,}4954 \times \frac{11}{288} : 11{,}445 . \frac{11}{288} = \frac{188{,}4954}{11{,}445}$ Kubikzoll Blei, welches mit dem Wasser-Cylinder gleiches Gewicht hat. Da nun dieser Blei-Cylinder einen mit dem Wasser-Cylinder gleichen Durchmesser haben soll, so ist auch seine Grundfläche $= \frac{1}{4} . 3{,}14159$ □Zoll, und dividirt man mit derselben in den ganzen Inhalt des Cylinders, so muß man seine Höhe erhalten; daher ist die Höhe des Blei-Cylinders $= \frac{188{,}4954}{11{,}445} : \frac{1}{4} . 3{,}14159 = \frac{240}{11{,}445}$ Zoll $= 20{,}969856$ Zoll.

Man wird in vorstehender Rechnung bemerkt haben, daß die Grundfläche des Cylinders aus der Rechnung geht, und man die gesuchte Höhe desselben erhält, wenn man die Höhe des Wasser-Cylinders durch das specifische Gewicht des Bleies dividirt. Diesen Satz hätte ich gleich zur Berechnung der gesuchten Höhe in Anwendung bringen können; ich that es aber aus der Ursache nicht, damit derjenige Leser, welcher dieses liest und nachrechnet, durch eigene Beobachtung auf denselben komme, wenn er ihn noch nicht gewußt hat.

Daher muß die gesuchte Höhe des Cylinders von Queckfilber, dessen specifisches Gewicht $= 13{,}597$, $= \frac{20 . 12}{13{,}597}$ Zoll $= 17{,}651$ Zoll sein.

Digitized by Google

4. Der Genfer-See in der Schweiz soll 900 Fuß tief sein; man denke sich nun ein vierseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein □Fuß ist, in diesem Wasser begrenzt, und dieses Prisma von 100 zu 100 Fuß durch einen Querdurchschnitt parallel mit seiner Oberfläche zertheilt; so ist die Frage, wie groß dieser Druck in den verschiedenen Tiefen von 100 zu 100 Fuß sein wird?

Der Querdurchschnitt oder die Grundfläche des Prisma für die Tiefe von 100′ sei A, von 200′ B, von 300′ C ꝛc. Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe; da nun die Grundfläche des Wasser-Prisma in den verschiedenen Tiefen ein □Fuß sein soll, so ist der Inhalt des ersten Prisma 100 Kubikfuß, der des zweiten 200 Kubikfuß ꝛc. Daher hat die Grundfläche A $100 . 66\ \mathfrak{U} = 100 . \frac{3}{5}$ Centner $= 60$ Cntr., die Grundfläche B $200 . \frac{3}{5} = 120$ Cntr., die Grundfläche C $= 300 . \frac{3}{5} = 180$ Cntr. ꝛc., die unterste Grundfläche I $900 . \frac{3}{5} = 540$ Centner zu tragen.

Anmerk. Das letzte Beispiel enthält den Grund, warum nun in tiefem Wasser leichter als in seichtem schwimmt; denn das Wasser drückt nach allen Seiten mit gleicher Kraft; mit welcher Kraft es nun nach unten zu drückt, mit derselben drückt es nach oben zu; aus demselben Grunde gehen beladene Schiffe nicht so tief in der See als in einem Flusse, und dazu kommt noch das specifische Gewicht des Meerwassers, welches noch mehr die Last des Schiffes vermindert. Darüber folgende Aufgabe.

5. Das Gewicht eines Schiffes sammt der Ladung sei 1000 Schiffslasten zu 4000 ℔, und das specifische Gewicht desselben, im Durchschnitt, oder als eine Masse von gleichförmiger Dichtigkeit betrachtet, sei gleich dem des Eises, dessen specifisches Gewicht, im Mittel genommen, $= 0{,}950$ ist. Welchen Rauminhalt hat dieses Schiff?

Ein Kubikfuß Eis dem Gewichte nach $= 0{,}95 . 66$ ℔; daher faßt das Schiff $1000 . 4000\ \mathfrak{U} : 0{,}95 . 66\ \mathfrak{U} = 63\,795{,}853$ Kubikfuß.

6. Das specifische Gewicht des Flußwassers soll $1{,}009$ sein; so wird das Schiff in voriger Aufgabe welches Gewicht in Flußwasser verlieren und nur welches darin haben?

Das Gewicht von 1 Kubikfuß Flußwasser $= 1{,}009 . 66$ Pfd.; daher das Gewicht von 63 795,853 Kubikfuß Flußwasser $= 63\,795{,}853 . 1{,}009 . 66 = 4\,248\,421{,}034682$ Pfd.; dieses Gewicht verliert also das Schiff in Flußwasser; da nun aber das Gewicht des Schiffes nur 4 000 000 Pfd. beträgt, so fehlen daran noch 248 421,034682 Pfd., bis es dem Gewichte des Flußwassers von demselben Volumen gleich wäre.

7. Das specifische Gewicht des Seewassers ist $= 1{,}0286$; welches Gewicht fehlt dem Schiffe in Aufgabe 5., bis es dem Gewichte des Meerwassers von gleichem Volumen gleich ist?

Das Gewicht von 1 Kubikfuß Seewasser $= 1{,}0286 . 66$ Pfd.; daher das Gewicht von 63 795,853 Kubikfuß $= 4\,330\,947{,}3501228$ Pfd.; also fehlen dem Gewichte oben gedachten Schiffes 330 947,3501228 Pfd., bis

Digitized by Google

sein Gewicht dem des Seewassers von gleichem Volumen gleich käme; und das Schiff verliert also in der See $330947,_{350122}$ Pfd. $- 248421,_{034682}$ Pfd. $= 82526,_{3154408}$ Pfd. mehr als in Flußwasser.

8. Ein Wasserbehälter in Gestalt eines abgekürzten Kegels hat zum Durchmesser seiner obern Oeffnung 30′, zum Durchmesser seines Bodens 24′, und eine Höhe von 18′. In der Wand dieses Behälters befinden sich drei Oeffnungen, jede hat eine senkrechte Höhe von 6″ und eine Breite von 8″. Wenn das Gefäß ganz voll Wasser gefüllt ist, so steht der oberste Rand der ersten Oeffnung 6′, der zweiten 12′ und der dritten $17\frac{1}{2}$′ in senkrechter Höhe unter dem Wasserspiegel.

Anmerk. In dieser Aufgabe will ich die Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es aus der Oeffnung herausfließt, nicht nach Willkür annehmen, sondern sie berechnen, wie sie nahe der Wirklichkeit kommt, und weil diese Berechnung für manchen Leser interessant sein könnte, so will ich sie hier ausführen; die dazu erforderlichen Kenntnisse der reinen Mathematik sind nur gering, aber zu hoch für Schüler, die auf der Stufe der Bildung stehen, welche die Haupttendenz dieses Buches bezeichnet.

Der Wasserspiegel eines Wasserbehälters ACFE (Fig. 79.) sei AE, und B eine Oeffnung in demselben, so ist AB $=$ T die Tiefe der Oeffnung unter dem Wasserspiegel (Niveau), und es ist, wenn die Oeffnung klein ist, die Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es in einer Sekunde aus der Oeffnung strömt, $= 5\frac{3}{8}\sqrt{\text{T}}$, ist T z. B. 16 Fuß, so ist die Geschwindigkeit in 1 Sek. $= 5\frac{3}{8}\sqrt{16} = 5\frac{3}{8}.4 = 21\frac{1}{2}$ Fuß. Wäre nun die Oeffnung B $= 1, 2, 3, 4$ ꝛc. Quadratzoll, so wäre die Wassermenge, welche in 1 Sek. durch die Oeffnung strömt, $= 21\frac{1}{2}.12.1$, $21\frac{1}{2}.12.2$, $21\frac{1}{2}.12.3$, ꝛc. Kubikzoll.

Wenn aber die Ränder der Oeffnung in Vergleich mit der Wasserhöhe bedeutend sind, so muß man die Geschwindigkeit am obern und untern Rande der Oeffnung nehmen und den senkrechten Querdurchschnitt des Wasserstrahls berechnen.

In vorliegender Aufgabe sind die Oeffnungen in Bezug auf die Wasserhöhe nur geringe; daher wird es genügen, wenn man die Mitte jeder Oeffnung unter dem Niveau nimmt.

Die Mitte der ersten Oeffnung steht unter dem Wasserspiegel $6\frac{1}{4}$′, der zweiten $12\frac{1}{4}$′, und der dritten $17\frac{1}{4}$ Fuß; daher ist die Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es aus der ersten Oeffnung strömt, $= 5\frac{3}{8}\sqrt{6\frac{1}{4}} = 5\frac{3}{8}\sqrt{\frac{25}{4}} = 5\frac{3}{8}.\frac{5}{2} = 13\frac{7}{16}$′, aus der zweiten $= 5\frac{3}{8}\sqrt{12\frac{1}{4}} = 5\frac{3}{8}\sqrt{\frac{49}{4}} = 5\frac{3}{8}.\frac{7}{2} = 18\frac{13}{16}$′, aus der dritten $= 5\frac{3}{8}\sqrt{17\frac{1}{4}} = 5\frac{3}{8}\sqrt{\frac{69}{4}} = 5\frac{3}{8} \times 4,_{1533} = 22,_{3239875}$ Fuß in 1 Sekunde.

Die Breite der Oeffnung ist nun 8 Zoll, ihre senkrechte Höhe 6 Zoll, dazu gehört ihr eine Länge $= \sqrt{36+1} = \sqrt{37} = 6,_{082476}$″; folglich ist die Fläche jeder Oeffnung $= 8.6,_{082746} = 48,_{661968}$ □Zoll; daher fließen aus der ersten Oeffnung $13\frac{7}{16}.12.48,_{661968}$, aus der zweiten $18\frac{13}{16}.12.48,_{661968}$, und aus der dritten $22,_{3239875}.12 \times 48,_{661968}$ Kubikzoll Wasser in einer Sekunde.

Digitized by Google

a) Wie groß ist das Gewicht des Wassers im vollen Behälter, wenn es Flußwasser ist, dessen specifisches Gewicht $= 1{,}009$.

Zunächst muß man den körperlichen Inhalt des Behälters berechnen; und da er die Gestalt eines abgekürzten Kegels hat, so ist zunächst die Höhe des ganzen Kegels zu suchen. (Fig. 80.)

Sei AB der obere Durchmesser des Behälters $= 30'$, CD der Durchmesser seines Bodens $= 24'$, und Mm seine Höhe $= 18'$. Die Geraden Mm, AD, BC mögen sich in E treffen, so ist E die Spitze des ganzen Kegels, MmE seine Axe, welche zugleich seine Höhe darstellt.

Nun ist AM : Dm = ME : Em, also $15 : 12 = ME : Em$ und getrennt, $3 : 12 = Mm : mE = 1 : 4$; und $Mm = 18'$, also $mE = 4 . 18 = 72'$, und $ME = 90'$.

Der Inhalt eines Kegels ist, wie früher bemerkt, $\frac{1}{3}$ von dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe. Die Grundfläche AGB des ganzen Kegels $= 15 . 15 . 3{,}_{14159}$, die DgC des kleinen $= 12 . 12 . 3{,}_{14159}$; daher ist der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3} . 90 . 15 . 15 . 3{,}_{14159}$, des kleinen Kegels $CDE = \frac{1}{3} . 12 . 12 . 3{,}_{14159} . 72$; daher ist der Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{1}{3} . (90 . 15 . 15 - 72 . 12 . 12) . 3{,}_{14159} = 10\,348{,}_{39746}$ Kubikfuß.

Das Gewicht von 1 Kubikfuß des Flußwassers $= 1{,}_{009} . 66$ Pfd.; daher ist das Gewicht des Wassers, welches den Behälter füllt, $= 10\,348{,}_{39746} . 1{,}_{009} . 66 = 869\,141{,}_{18045124}$ Pfd.

b) Der Behälter soll voll Wasser sein und Nichts dazu fließen; die beiden obern Oeffnungen bleiben geschlossen, nur die unterste wird geöffnet und dem Ausströmen des Wassers volle Freiheit gelassen; in welcher Zeit wird der Behälter leer sein, und wie viele Pfunde Wasser fließen in einer Minute heraus?

In jeder Sekunde fließen durch die unterste Oeffnung nach obiger Angabe $\frac{22{,}_{3239875} . 12 . 48{,}_{661968}}{1728}$ Kubikfuß $= \frac{22{,}_{63185\ 76116\ 125}}{3}$ Kubikfuß; und der Ausfluß des Wassers in einer Minute beträgt $452{,}_{63715\ 223225}$ Kubikfuß, oder, dieses mit $1{,}_{009} . 66$ Pfd. multiplicirt, $30\,142{,}_{91851\ 57544\ 565}$ Pfd.; der Behälter wird in $\frac{10\,348{,}_{39746}}{452{,}_{63715\ 223225}}$ Minuten $= 22{,}_{8624}$ Minuten $= 22$ Minuten $51{,}_{744}$ Sek. geleert.

Eben so kann man die Zeit berechnen, welche jede der andern Oeffnungen gebraucht, das Gefäß bis zu der Tiefe zu leeren, in welcher sich der unterste Rand der Oeffnung befindet. In jedem Falle muß aber dann noch vorher ein anderer abgekürzter Kegel berechnet werden.

c) In welcher Zeit werden die 3 Oeffnungen, wenn sie gleichzeitig offen sind, den Behälter leeren?

Digitized by Google

Die Beantwortung dieser Frage macht die Berechnung noch zweier abgekürzten Kegel nothwendig; des einen obere Grundfläche ist die des Behälters, seine untere geht durch den untersten Rand der ersten Oeffnung und seine Höhe beträgt $6\frac{1}{2}$ Fuß = Ma.

Sei ac parallel AM, so ist Ea : EM = ac : MA; nun ist Ea = $90 - 6\frac{1}{2} = 83\frac{1}{2}$, EM = 90, MA = 15 Fuß; daher ist $83\frac{1}{2} : 90 =$ ac : 15; also ac = $\frac{83\frac{1}{2}}{6}$ Fuß.

Diesen abgekürzten Kegel kann man wie den vorigen berechnen; ich will hier aber ein anderes Verfahren, das jedoch nur aus dem obigen abgeleitet ist, anwenden.

Sei nämlich der Radius der obersten Grundfläche MA = R, der Radius der neuen Grundfläche ac = r, und die Höhe dieses abgekürzten Kegels Ma = H, so ist der Inhalt dieses abgekürzten Kegels = $\frac{H}{3} \times (R.R + R.r + r.r).\pi$.

Es ist nun H = $6\frac{1}{2}$, R = 15, r = $\frac{83\frac{1}{2}}{6}$, $\pi = 3{,}14159$; daher ist der Inhalt dieses abgekürzten Kegels = $\frac{6\frac{1}{2}}{3}.(15.15 + 15.\frac{83\frac{1}{2}}{6} + \frac{83\frac{1}{2}}{6}.\frac{83\frac{1}{2}}{6}).3{,}14159 = \frac{13}{6.12.12}.90\,349.3{,}14159$ Kubikfuß.

Die erste Oeffnung liefert in einer Sek. $13\frac{7}{16}.12.48{,}661968$ Kubikzoll.
" zweite " " " " " $18\frac{13}{16}.12.48{,}661968$ "
" dritte " " " " " $22{,}3239875.12.48{,}661968$ Kbz.
dieses macht zusammen $54{,}5739875.12.48{,}661968$ Kubikzoll = $\frac{1}{3} \times 54{,}5739875.1{,}013791$ Kubikfuß; daher brauchen die 3 Oeffnungen den eben berechneten abgekürzten Kegel voll Wasser zu leeren, seinen Inhalt durch die letzte Zahl Kubikfuß dividirt Sekunden; dieses giebt

$$\frac{13.90\,349.3{,}14159}{288.54{,}5739875.1{,}013791} = 231{,}492 \text{ Sek.} = 3 \text{ Min. } 51{,}492 \text{ Sek.}$$

Nun ist der zweite abgekürzte Kegel cefd zu berechnen, dessen obere Grundfläche durch den untern Rand der ersten, und dessen untere Grundfläche durch den untern Rand der zweiten Oeffnung geht. Ma = $6\frac{1}{2}$, Mb = $12\frac{1}{2}$, also ab = 6 Fuß.

Es ist wieder be : mD = bE : Em; und mD = 12, bE = $90 - 12\frac{1}{2} = 77\frac{1}{2}$, Em = 72; daher be : 12 = $77\frac{1}{2}$: 72; folglich be = $\frac{77\frac{1}{2}}{6} = \frac{155}{12}$ Fuß.

Anstatt aber den abgekürzten Kegel cefd zu berechnen, kann man auch den untern eDCf berechnen, dessen Höhe bm = $18 - 12\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$, be = $\frac{155}{12}$ und mD = 12 Fuß ist; daher ist des letztern Inhalt, nach obiger Formel, $\frac{5\frac{1}{2}}{3}.(\frac{155}{12}.\frac{155}{12} + \frac{155}{12}.12 + 12.12).3{,}14159$ Kubikfuß = $\frac{11}{6.144}.67\,081.3{,}14159$ Kubikfuß.

Digitized by Google

Nun könnte man diesen und den abgekürzten Kegel AcdB von dem ganzen abgekürzten Kegel hinwegnehmen, so würde man den abgekürzten Kegel celd erhalten; doch diese Rechnung ist eben so langwährend als die direkte, daher ziehe ich letztere vor. Nun ist nach obiger Rechnung $ac = \frac{83\frac{1}{2}}{6} = \frac{167}{12}$, $be = \frac{155}{12}$, $ab = 6$ Fuß; daher ist sein Inhalt $= \frac{6}{3}.(\frac{167}{12}.\frac{167}{12} + \frac{167.155}{12.12} + \frac{155.155}{12.12}).3,_{14159} = \frac{1}{72}.77819..3,_{14159}$ Kubikfuß.

Diesen Raum leeren nur die mittlere und unterste Oeffnung, welche in 1 Sekunde $18\frac{13}{16}.12.48,_{661968} + 22,_{3239875}.12.48,_{661968} = 41,_{1364875}.12.48,_{661968}$ Kubikzoll $= \frac{1}{1728}.41,_{1364875}.1,_{013791}$ Kubikfuß herauslassen; daher sind zur Leerung dieses Raumes $\frac{1}{72}.77819 \times 3,_{14159} = \frac{1}{1728}.41,_{1364875}.1,_{013791}$ Sek. $= 244,_{2577}$ Sek. $= 4$ Minuten $4,_{2577}$ Sek. erforderlich.

Den dritten abgekürzten Kegel leert die unterste Oeffnung allein, und sie gebraucht dazu $\frac{11}{6.144}.67\,081.3,_{14159} : \frac{22,_{3239875}.48,_{661968}.12}{1728}$

$= \frac{11.67\,081.3,_{14159}}{22,_{3239875}.8,_{110328}.36}$ Sek. $= 355,_{6552}$ Sek. $= 5$ Minuten $55,_{6552}$ Sekunden.

Addirt man nun die drei Zeitabschnitte, welche auf die Leerung der drei abgekürzten Kegel verwendet worden sind, so erhält man 13 Minuten $51,_{4049}$ Sekunden.

III. Raum, Geld und Zeit.

A. Längen, Geld und Zeit.

Längengrößen und Zeit deuten immer auf Bewegung hin, und da hiebei noch auf Geld Rücksicht genommen werden soll, so muß diese Bewegung eine Reise sein, welche mit Kosten verbunden ist. Daher ist diese Art Aufgaben sehr beschränkt, wenn gleich auch die Reise zu Fuße, zu Pferde, zu Wasser und zu Wagen, in beiden letzten Fällen wieder entweder auf gewöhnliche Weise oder durch Dampf betrieben werden kann. Ueberdies ist die Proportionalität nicht einmal in allen Fällen zuläßig. Z. B.

1. Das Porto eines einfachen Briefes von Königsberg bis Danzig kostet 4 Sgr., beide Oerter sind 25 Meilen von einander entfernt, und dieser Weg wird von der Post in 18 Stunden zurückgelegt. Der Weg von Danzig bis Berlin beträgt 66 Meilen und das Postporto eines einfachen Briefes 8 Sgr.; in welcher Zeit muß also der Weg von Danzig bis Berlin gemacht werden?

25 Mi. : 66 Mi. = 18 St. : A (wenn 25 Mi. 4 Sgr. kosten)
8 Sgr. : 4 Sgr. = A : B

25 : 33 = 18 St. : B = $23\frac{12}{11}$ Stunden, ein Resultat,

das mit der Wirklichkeit im Widerspruche steht. Hier wurde die Zeit der Größe des Porto's umgekehrt in Verhältniß gesetzt; nun setze man beide in ein gerades Verhältniß, so erhält man $25 : 132 = 18$ St. $: C = \frac{132 \cdot 18}{25} = 95\frac{1}{25}$ Stunden; aber auch dieses Resultat ist falsch; denn der Weg wird etwa in 48 bis 50 Stunden zurückgelegt.

2. Ein einfacher Brief wird von Königsberg bis Berlin in 56 Stunden durch die Post befördert und das Porto beträgt 9 Sgr.; wenn nun von Königsberg bis Berlin $76\frac{1}{4}$ Meilen und von Danzig bis Berlin 66 Meilen und das Porto eines einfachen Briefes von Danzig bis Berlin 8 Sgr. beträgt, in welcher Zeit geschieht die letzte Beförderung?

$$\left.\begin{array}{l} 76\frac{1}{4} \text{ Ml.} : 66 \text{ Ml.} \\ 9 \text{ Sgr.} : 8 \text{ Sgr.} \end{array}\right\} = 56 \text{ St.} : K = 43\tfrac{79}{915} \text{ Stunden,}$$

wieder ein Resultat, das mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt.

3. Das Dampfboot der Blitz legt den Weg von Danzig bis Neufahrwasser, $\frac{3}{4}$ Meilen, in 50 Minuten zurück und die Fahrkosten für eine Person betragen $2\frac{1}{2}$ Sgr. Das Dampfschiff die Gazelle macht den Weg von Königsberg bis Neufahrwasser, dem Hafen von Danzig, 18 Meilen, in 9 Stunden; wie viel wird das Fahrgeld für eine Person betragen?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ Ml.} : 18 \text{ Ml.} \\ \frac{5}{6} \text{ St.} : 9 \text{ St.} \end{array}\right\} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Sgr.} : X = 21 \text{ ₰ } 18 \text{ Sgr.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ Ml.} : 18 \text{ Ml.} \\ 9 \text{ St.} : \frac{5}{6} \text{ St.} \end{array}\right\} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Sgr.} : Y = 5\tfrac{5}{8} \text{ Sgr.}$$

Sowohl das eine als das andere Resultat ist falsch; denn für eine Person beträgt das Fahrgeld auf dem ersten Platze 3 ₰, auf dem zweiten 2 ₰ 5 Sgr.

4. Das Dampfschiff die Gazelle macht den Weg von Königsberg bis Neufahrwasser, 18 Meilen, in 9 Stunden und das Fahrgeld für eine Person auf dem ersten Platze beträgt 3 ₰; für eine Person auf dem ersten Platze kostet das Fahrgeld auf dem Dampfboote der Pfeil zwischen Neufahrwasser und Danzig $2\frac{1}{2}$ Sgr., der Weg ist $\frac{3}{4}$ Meilen weit, in welcher Zeit wird es denselben zurücklegen?

$$\left.\begin{array}{l} 18 \text{ Ml.} : \frac{3}{4} \text{ Ml.} \\ 90 \text{ Sgr.} : 2\frac{1}{2} \text{ Sgr.} \end{array}\right\} = 18 \text{ St.} : A = \tfrac{1}{48} \text{ Stunden} = 1 \text{ Minute}$$

15 Sekunden, welches nicht möglich ist.

5. Das Dampfschiff die Gazelle legt den Weg von Königsberg bis Neufahrwasser, 18 Meilen, in 9 Stunden zurück, und das Fahrgeld für eine Person auf dem ersten Platze kostet 3 ₰; auf demselben Platze kostet das Fahrgeld für eine Person zwischen Königsberg und Pillau 20 Sgr., zwischen Pillau und Neufahrwasser 2 ₰ 10 Sgr.; zwischen Königsberg und Pillau rechnet man 7 Meilen, nach der Karte über die Fahrt der Gazelle, sind zwischen Pillau und Neufahrwasser $11\frac{1}{2}$ Meilen. In welcher Zeit fährt man a) von Königsberg bis Pillau, b) von Pillau bis Neufahrwasser, c) wie

Digitized by Google

groß sind die Wege von Königsberg bis Pillau und von diesem Orte bis Neufahrwasser?

a) $\left.\begin{matrix} 18\text{ Ml.} : 7\text{ Ml.} \\ 3\text{ ℳ} : \frac{2}{3}\text{ ℳ} \end{matrix}\right\} = 18\text{ St.} : \text{S} = 1\frac{1}{6}\text{ Stunden.}$

b) $\left.\begin{matrix} 18\text{ Ml.} : 11\frac{1}{2}\text{ Ml.} \\ 3\text{ ℳ} : 2\frac{1}{3}\text{ ℳ} \end{matrix}\right\} = 18\text{ St.} : \text{T} = 8\frac{17}{18}\text{ Stunden.}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{7}{3} = \text{P} : \text{N}$ oder $9 : 7 = 18\text{ Ml.} : \text{N} = 14$ Meilen;

also der Weg zwischen Pillau und Neufahrwasser $= 14$ Meilen und der zwischen Pillau und Königsberg 4 Meilen. Diese letzten Resultate, wenn sie auch mit den Messungen auf der Karte nicht übereinstimmen, werden dennoch richtig sein; doch die unter a) und b) sind falsch.

Da also in diesen Aufgaben die genannten ungleichartigen Größen, Längen, Zeiten und Geld, nicht genau proportionirt sind, so darf man auch Aufgaben dieser Art nicht nach Proportionen berechnen, und man muß sich wohl hüten, Aufgaben unter gewissen Bedingungen zu rechnen, die nicht genau sich gegenseitig bedingen.

B. Flächen, Geld und Zeit.

Auch hier werden sich nur wenige Fälle darbieten, daß sich diese drei ungleichartigen Größen gegenseitig genau bedingen, und sobald dieses nicht stattfindet, kann man zwar immer noch Aufgaben vorlegen, muß aber auch gleich bemerken, daß hier keine genaue Proportionalität vorhanden ist, und der Geldwerth durch andere Rücksichten bedingt wird, die nicht in Proportion gezogen werden können.

1. Einen Acker, 64 Ruthen lang und 45 Ruthen breit, zu bearbeiten kostet 4 ℳ, und die Bearbeitung desselben wurde in 8 Tagen vollendet. Für einen andern Acker von derselben Beschaffenheit, der 84 Ruthen lang und 75 Ruthen breit ist, mußte man an Arbeitskosten 14 ℳ bezahlen; in welcher Zeit wurde der letzte Acker bestellt?

$\left.\begin{matrix} 64^{\circ} : 84^{\circ} \\ 45^{\circ} : 75^{\circ} \end{matrix}\right\} = 8\text{ Tg.} : \text{F} = 17\frac{1}{2}\text{ Tagen.}$

Die $17\frac{1}{2}$ Tage sind nämlich für dieselben wirkenden Kräfte, Pferde und Menschen, oder auch nur Menschen allein. Nun sind aber noch die Arbeitskosten in Rechnung zu bringen, und diese werden eigentlich durch die Arbeit und Zeit bedingt.

Will man die Arbeitskosten als Stellvertreter der Arbeiter annehmen, so hat man folgende Rechnung:

$\left.\begin{matrix} 64^{\circ} : 84^{\circ} \\ 45^{\circ} : 75^{\circ} \\ 14\text{ ℳ} : 4\text{ ℳ} \end{matrix}\right\} = 8\text{ Tage} : \text{D.} = 30\text{ Tagen.}$

Ob nun diese Rechnung in der Wirklichkeit stattfindet, muß man wohl untersuchen; denn manche Bedingungen scheinen auf den ersten Blick wirklich

Digitized by Google

nach Proportion in Rechnung gestellt werden zu können, was in der That nicht geschehen darf, wie ich dieses schon früher hin und wieder bemerkt habe; daher wollen wir uns folgende Aufgabe vorlegen, und dann das Weitere untersuchen.

2. Wir wollen annehmen, daß 1 Arbeiter in einem Tage 1 Morgen Landes, 18 Ruthen lang und 10 Ruthen breit bearbeiten könne, und dafür 12 Sgr. an Arbeitslohn empfange;

a) so werden 5 Arbeiter in 6 Tagen einen Acker, natürlich von derselben Beschaffenheit, der 120 Ruthen breit ist, von welcher Länge bearbeiten, und wie viel verdienen?

b) so werden 9 Arbeiter in 4 Tagen einen Acker, der 225 Ruthen lang ist, von welcher Breite bestellen und wie viel dadurch verdienen?

Es ist im Voraus klar, daß 5 Arbeiter, nämlich bei gleicher Leistung an Arbeit, in 6 Tagen $5 . 6 . 12$ Sgr. $= 12$ Sgr., und 9 Arbeiter in 4 Tagen $9 . 4 . 12$ Sgr. $= 14$ Sgr. 12 Sgr. erhalten müssen, wenn 1 Arbeiter in einem Tage 12 Sgr. erhält. Hieraus geht auch sogleich hervor, daß die Kosten der ganzen Bearbeitung im zusammengesetzten Verhältnisse aus den geraden der Arbeiter und den geraden der Zeiten stehen, und daraus folgt wieder, daß man die Gesammtkosten nicht ohne Weiteres in Stelle der Arbeiter setzen könne. Wir verfolgen aber unsere Rechnung noch weiter.

a) 1 Arb. : 5 Arb. $=$ 18° : A (Länge bei 10° Br., wenn 5 Arb. 1 Tg. arb.)
1 Tg. : 6 Tg. $=$ A : B (» » » » » » 6 » »)
120° : 10° $=$ B : C (» » 120° » » » » » »)
1 : 5 $=$ 9 : C $=$ 45° Länge.

Daß dieses Resultat richtig ist, folgt auch daraus: da 1 Arbeiter in einem Tage 180 □Ruthen bearbeitet, so werden 5 Arbeiter in 6 Tagen $5 . 6 . 180$ □Ruthen bestellen, und diese durch die eine Dimension $= 120°$ dividirt, giebt die andere $= 45°$.

b) Eben so leicht findet man für diesen Fall die Arbeit $= 9 . 4 . 180$ □Ruthen und dieselbe durch die eine Dimension $= 225$ dividirt, giebt die andere $= 28\frac{4}{5}$ Ruthen.

In dieser Gattung von Aufgaben sollen keine Kräfte als gegebene Bedingung vorkommen, und an ihre Stelle wollen wir nun die Arbeitskosten stellen, so können wir folgende Aufgabe zur Berechnung uns vorlegen:

3. Ein Acker von 45° Breite und 120° Länge ist in 6 Tagen bearbeitet worden, und man zahlte dafür 12 Sgr.; wie viel wird man für die Bearbeitung eines Ackers, der 225 Ruthen lang und $28\frac{4}{5}$ Ruthen breit ist, und in 4 Tagen beschafft werden soll, an Arbeitskosten zu zahlen haben?

Da wir die Berechnung des Flächeninhalts kennen, so wollen wir gleich die Flächen selbst anstatt ihrer Dimensionen in Rechnung stellen

$$\left.\begin{matrix} 120° . 45 \text{ □Ruthen} & : & 36 . 180 \text{ □Ruthen} \\ 6 \text{ Tg.} & : & 4 \text{ Tg.} \end{matrix}\right\} = 12 \text{ Sgr.} : \text{A.}$$

Hieraus folgt A $=$ 9 Sgr. 18 Sgr.

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} 120 . 45 \text{ □Ruthen} \\ 4 \text{ Tg.} \end{matrix} : \begin{matrix} 36 . 180 \text{ □Ruthen} \\ 6 \text{ Tg.} \end{matrix}\right\} = 12 \text{ ℛ} : \text{B.}$$

Es ergiebt sich B = 21 ℛ 18 Sgr.; also weder die eine noch die andere Rechnung giebt das richtige Resultat, nämlich 14 ℛ 12 Sgr., und dieses war im Voraus zu erwarten. Aehnliche unrichtige Resultate würden wir erhalten, wenn wir die Zeit berechnen wollten.

Nun entsteht die Frage, wie man denn richtig solche Aufgaben berechnen müsse, da sie doch in ihren Bedingungen nichts Ungereimtes enthalten? Zur richtigen Beantwortung dieser Frage müssen wir uns erinnern, daß die Arbeitskosten nicht in einfachen, sondern in zusammengesetzten Verhältnissen stehen, wie oben bemerkt wurde, also dividiren wir die Kosten durch die Zeiten, so bekommen wir Zahlen, die den Arbeitern proportionirt sind; thun wir dieses, so erhalten wir: $\frac{12}{6}$ ℛ : $\frac{14\frac{2}{3}}{4}$ ℛ = 2 : $\frac{18}{5}$ = 10 : 18 = 5 : 9, also 5 und 9 Arbeiter proportionirt. Die Arbeiten stehen aber auch im zusammengesetzten Verhältnisse der Arbeiter und der Zeiten, daher stehen die Arbeiter mit den Kosten im direkten Verhältnisse, und die Zeiten dürfen also nicht mehr in Rechnung gebracht werden; also ist richtig

120 . 45 □Ruthen : 36 . 180 □Ruthen = 12 ℛ : C

und man findet C = 14 ℛ 12 Sgr., wie oben.

4. Ein Acker, der 120° lang, 45° breit ist, wird in 6 Tagen für 12 ℛ bearbeitet; ein anderer ist 225° lang, $28\frac{4}{5}$° breit, und man will auf seine Bearbeitung 14 ℛ 12 Sgr. verwenden, in welcher Zeit wird er bestellt sein?

Nun erinnere man sich, daß die Zeiten in einfachen Verhältnissen stehen; daß ferner die Arbeiten und Kosten gleiche Verhältnisse zu einander haben müssen, und daß jedes dieser Verhältnisse zusammengesetzt ist aus dem geraden der Arbeiter und dem geraden der Zeiten, und dann geht hieraus hervor, daß diese Aufgabe nicht berechnet werden kann, wenn nicht das Verhältniß der Arbeiter gegeben wird; oder man muß gleiche Zahlen der Arbeiter annehmen, und dann erhält man auch eine andere Zeit.

Aus den Bemerkungen wird hervorgehen, daß man bei Aufgaben dieser Art vorsichtig sein müsse, und nicht sogleich nach den gewöhnlichen Regeln schließen dürfe; daher ist auch die zweite Berechnung der ersten Aufgabe falsch, und da die Kosten derselben nicht im gleichen Verhältnisse mit den Arbeiten stehen, so ist die Aufgabe unter den daselbst gegebenen Bedingungen ganz falsch, und eignet sich zu keiner Berechnung.

Da diese Bedingungen sehr mangelhafte Aufgaben gestatten, so verweile ich nicht länger bei denselben und gehe zur folgenden Kombination über.

C. Körper, Geld und Zeit.

Wenn ich diese Rubrik noch anführe, so geschieht es mehr der Vollständigkeit als des Interesses halber; und was ich im Vorstehenden bemerkt

Digitized by Google

habe, das hat auch hier gleiche Giltigkeit, und ich werde daher auch die Sache möglichst kurz behandeln, um zu interessantern Gegenständen zu gelangen; doch war es nothwendig, auf die gemachten Bemerkungen die Aufmerksamkeit des Lesers zu richten, weil die mannigfaltigen Kombinationen auch Aufgaben der Art vorführen können, und wenn man in solchen Sachen sich nicht einen scharfen Blick durch vielfältige Betrachtungen erworben hat, so kann man leicht in solchen Fällen in Verlegenheit gerathen, aus welcher die gewöhnlichen Rechenbücher dieser Art, die häufig im Gebrauche sind, nicht befreien; weil sie aus Gründen, die ich nicht kenne, solche Kombinationen nicht gemacht und auch darüber keine ähnlichen Betrachtungen angestellt haben.

Aehnlicher Art, wie im Vorstehenden, wollen wir auch hier verfahren, um immer sicher zu sein, daß wir in unsere Schlüsse keinen Trugschluß hineinbringen, und daher uns eine Aufgabe aus richtigen Elementen und nach richtigen Gesetzen zusammenstellen. Als Beispiel will ich das Graben eines Grabens wählen.

Man kann wohl annehmen, daß ein kräftiger Gräber in jeder Sekunde einen Stich mache, und mit jedem Wurfe 20 Pfund Erde aus der Grube werfe. Von Erden finde ich nun das specifische Gewicht des Thons (Letten) $= 2{,}630$, der Walkererde $= 2{,}000$, der guten Gartenerde $= 1{,}93$, des weißen Sandes $= 2{,}631$, Thonschiefers $= 2{,}880$ ꝛc.; ich setze daher das specifische Gewicht der Erde des Grabens $= 2{,}8$, und hieraus stelle ich nun folgende Aufgaben zusammen.

1) In jeder Sekunde werden aus der Vertiefung eines Grabens 20 ℔ Erde, deren specifisches Gewicht $= 2{,}8$ ist, geworfen. Die Arbeit wird täglich im Durchschnitt 14 Stunden fortgesetzt; sie dauert 8 Wochen zu 6 Tagen; der Graben hat unten eine Breite von 5, oben eine von 13 Fuß, seine Tiefe beträgt 8 Fuß. Nimmt man an, daß nur ein Mann arbeite und täglich 20 Sgr. erhalte; wie lang wird der Graben unter den gegebenen Bedingungen werden? Wie viel wird der Gräberlohn betragen? Wie viele Kubikfuß Erde werden für 20 Sgr. aus der Vertiefung des Grabens herausgeworfen?

Zunächst berechne ich das Volumen der herausgeworfenen Erde in der gegebenen Zeit und nach dem doppelten gegebenen Gewichte. 20 ℔ in einer Sekunde, also in einer Minute $60 . 20 = 1200$ ℔; daher in 1 Stunde $= 60 . 1200 = 72\,000$ ℔; folglich in 14 Stunden oder in einem Tage $= 14 . 72\,000 = 1\,008\,000$ ℔; also in 6 Tagen oder in einer Woche $= 6 . 1\,008\,000 = 6\,048\,000$ ℔ und in 8 Wochen $= 8 . 6\,048\,000 = 48\,384\,000$ ℔ Erde.

Da das specifische Gewicht dieser Erde $= 2{,}8$, so ist das Gewicht eines Kubikfußes $= 2{,}8 . 66$ ℔; folglich ist das Volumen der aus dem Graben geworfenen Erde $= 48\,384\,000 : 2{,}8 . 66 = \frac{2880000}{11}$ Kubikfuß

Nun suche ich die Länge des Grabens; diese erhalte ich, wenn ich sein ganzes Volumen durch den Querdurchschnitt desselben dividire. Die obere Breite = 13, die untere = 5, also die mittlere = $\frac{5+13}{2} = 9'$; seine Tiefe = 8′; daher ist der Querdurchschnitt = 8 . 9 = 72 □Fuß; daher die Länge des Grabens = $\frac{40000}{11}$ Fuß.

Der Gräberlohn beträgt 8 . 6 . $\frac{2}{3}$ ₰ = 32 ₰. 20 Sgr. sind $\frac{20}{12.30}$ = $\frac{1}{18}$ von 32 ₰; also werden für 20 Sgr. $\frac{1}{18}$. $\frac{2880000}{11}$ = $\frac{60000}{11}$ Kubikfuß Erde aus dem Graben herausgeworfen.

Die Resultate der Rechnung zeigen, daß die Arbeit für einen Mann zu stark ist, und man kann sie eher für 20 bis 30 Mann als für einen annehmen.

2. Wenn 30 Mann in 8 Wochen zu 6 Tagen zu 14 Stunden einen Graben von $3636\frac{4}{11}'$ Länge, 8′ Tiefe und 9′ mittlerer Breite graben und dafür 960 ₰ erhalten; so werden 10 Mann wie lang einen Graben führen, der 6′ tief und 8′ mittlerer Breite hat, wenn sie 6 Wochen zu 5 Tagen zu 12 Stunden arbeiten, und wie viel werden sie verdienen?

30 M. : 10 M.
8 W. : 6 W.
6 Tg. : 5 Tg.
14 St. : 12 St.
6′ : 8′ Tiefe
8′ : 9′ mittl. Br.

$= \frac{40000}{11} : L = \frac{75000}{77}$ Fuß Länge.

Der Arbeitslohn wird durch folgende Proportionen gegeben:

30 M. : 10 M.
8 W. : 6 W.
6 Tg. : 5 Tg.
14 St. : 12 St.

$= 960$ ₰ : ₰ = $\frac{1200}{7}$ ₰.

3. Ein Graben von $3636\frac{4}{11}'$ Länge, 8′ Tiefe und 9′ mittlerer Breite ist in 8 Wochen zu 6 Tagen à 14 Stunden gegraben, und die Kosten betragen 960 ₰. Ein anderer Graben soll 6′ tief gemacht werden, und eine mittlere Breite von 8′ haben, man will ihn in 6 Wochen zu 5 Tagen à 12 Stunden beendigt haben, und will darauf $171\frac{3}{7}$ ₰ verwenden; wie lang kann er werden?

Aus dem Vorstehenden ist bekannt, daß die Arbeiter und die Kosten in gleichen Verhältnissen stehen, die aus den geraden der Arbeiter und der Zeiten zusammengesetzt sind; daher darf man zu dieser Berechnung die Zeit nicht mehr in Rechnung bringen, und man setzt nur die Arbeiten und Kosten in Verhältniß. Also

$\frac{40000}{11}$. 8 . 9 : Länge × 6 . 8 = 960 ₰ : $\frac{1200}{7}$ ₰;

daher die gesuchte Länge = $\frac{40000.8.9.1200}{11.6.8.960.7} = \frac{75000}{77}$ Fuß mit dem Obigen übereinstimmend.

Digitized by Google

IV. Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit.

Die Beschränkungen, welche in voriger Numer durch Auslassung der Kräfte und Zuziehung der Zeit herbeigeführt wurden, herrschen in dieser Gattung von Aufgaben nicht; die meisten hierher gehörigen Aufgaben sind aber schon beiläufig früher behandelt, und daher werde ich hier nur wenige noch anführen..

1. Der Wispel Roggen muß für die Königl. Magazine zu 25 und Hafer zu 26 Scheffeln eingeliefert werden, und wird dagegen zu 24 Scheffeln ausgemessen, und das mehr Gelieferte wird für das Eintrocknen und den Verlust beim Ausmessen gerechnet. Nach der Maß- und Gewichts-Ordnung soll das niedrigste Gewicht eines Preuß. Scheffels Roggen $80\frac{1}{2}$, und Hafer $45\frac{1}{2}$ Pfund sein. Wenn nun Roggen der Scheffel zu 1 ℛ 5 Sgr., und Hafer zu 18 Sgr. eingeliefert und nach einem halben Jahre das Getreide ausgemessen wird, dabei aber nichts verloren geht, sondern durch Eintrocknen auf obige Quantitäten sich vermindert hat; wie schwer muß ein Scheffel genannter Getreidearten beim Ausmessen sein, und welchen Preis muß er haben?

Das Gewicht eines Scheffels Roggen $= \frac{25 \cdot 80\frac{1}{2}}{24}$ ℔ $= \frac{25 \cdot 161}{48} =$ 83 ℔ $20\frac{2}{3}$ Loth. Das Gewicht eines Scheffels Hafer $= \frac{26 \cdot 45\frac{1}{2}}{24}$ ℔ $= \frac{13 \cdot 91}{24} = 49$ ℔ $9\frac{1}{3}$ Loth.

Der Preis eines Scheffels Roggen $= \frac{25 \cdot 35}{24}$ Sgr. $= 1$ ℛ 6 Sgr. $5\frac{1}{2}$ ₰. Der Preis eines Scheffels Hafer $= \frac{26 \cdot 18}{24}$ Sgr. $= 19\frac{1}{2}$ Sgr..

2. Ein junger Mann gewann mit einem andern Mitspieler zusammen $\frac{1}{4}$ des großen Looses von 200 000 ℛ. Davon kommen $12\frac{1}{2}$ Procent für den Staat, und von jedem Thaler 1 Sgr. für den Collecteur. Da ihm sein bisheriges Geschäft, die Dorfschulmeisterei, nicht gefällt, so giebt er es auf und will ein anderes beginnen. Er stellt nun folgende Betrachtungen an. Wenn er im Herbste für sein Geld Getreide einkauft, so kann er es erst im nächsten Frühjahre versenden. Bis zur Versendung des Getreides muß er rechnen, daß $5\,\%$ eintrocknen und beim Umarbeiten verloren gehen; $1\frac{1}{2}\,\%$ muß er für das Umarbeiten rechnen; $4\,\%$ für Miethe der Speicher; dann bleibt es noch immer unsicher, ob im nächsten Jahre Handel sein wird oder nicht; wenn der letzte Fall eintritt, so bleibt ihm das Getreide vielleicht einige Jahre liegen. Außerdem bietet sich ihm Gelegenheit dar, sein Geld sicher zu $5\,\%$ jährlich auf Zinsen geben? Was ist für diesen jungen Mann das Räthlichste zu thun?

a) Da der Gewinn nur $\frac{1}{8}$ des großen Looses ist, wie viel erhält er nach Abzug aller Kosten baar?

Digitized by Google

$\frac{1}{8} \cdot 200\,000$ ℳ $= 25\,000$ ℳ, davon $12\frac{1}{2}\,\% = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{25}{200} =$ $\frac{1}{8}$, also erhält er nur $\frac{7}{8}$ von dem Achtel oder nur 21 875 ℳ; davon erhält der Einnehmer 21 875 Sgr. = 729 ℳ 5 Sgr., also bleiben ihm endlich 21 145 ℳ 25 Sgr. Das große Loos besteht also nur in 169 166 ℳ 20 Sgr.

b) Wenn der Gewinner 20 000 ℳ zu $5\,\%$ jährlicher Zinsen ausleiht, und die Zinsen 5 Jahre hindurch erspart, welchen Gewinn hat er dann?

$\frac{20000 \cdot 25}{100} = 5000$ ℳ.

c) Wenn er im Herbste für 12 000 Thlr. Getreide gekauft hätte, wie hoch würde ihm diese Summe nach 2 Jahren zu stehen kommen?

An baarem Kapital		12000 Thlr.
Für Austrocknen ꝛc. jährlich $5\,\%$, macht in 2 Jahren .		1200 „
Für Umarbeiten jährlich $1\frac{1}{2}\,\%$, macht in 2 Jahren .		460 „
Für Miethe der Speicher $4\,\%$, macht in 2 Jahren . .		960 „
		14520 Thlr.

Nach 2 Jahren muß er 14 520 Thlr. aus seinem Getreide erst lösen, wenn er nur sein reines Kapital wieder gewinnen will; nun rechne man noch die vielen Unkosten hinzu, bis es zum Verkaufe kommt, so wird man begreifen, daß Kaufmannswaaren einem großen Risiko ausgesetzt sind.

3. Jemand kauft für 2000 Thlr. Käse, das Pfund zu $1\frac{1}{3}$ Sgr.; nach einem Jahr ist er so eingetrocknet, daß man ihn mit $25\,\%$ Gewinn verkaufen kann, und zwar das Pfund für 3 Sgr.

a) Wie viele Pfunde Käse hat man gekauft und wie viel wiegt er nach einem Jahre?

$\frac{2000 \text{ . } 30 \text{ Sgr.}}{1\frac{1}{3} \text{ Sgr.}} = 45\,000$ Pfd. Käse.

Wenn eine Summe in einem Jahre $25\,\%$ einbringt, so ist die künftige 125 während die baare 100; daher

125 : 100 = 3 Sgr. : S $= \frac{1 \cdot 2}{5} = 1\frac{2}{5}$ Sgr.; das Pfd. Käse muß also nach 1 Jahre zu $1\frac{2}{5}$ Sgr. verkauft werden, um nichts davon zu gewinnen oder zu verlieren; daher ist also während der Zeit eines Jahres für $1\frac{2}{5}—1\frac{1}{3}$ $= \frac{1}{15}$ Sgr. Käse eingetrocknet; nun ist $\frac{1}{15}$ Sgr. $= \frac{\frac{1}{15}}{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{15}$ von $1\frac{1}{3}$ Sgr., daher ist $\frac{1}{15}$ des Gewichts eingetrocknet: dieses macht von 45000 Pfd. $\frac{45000}{15} = 2500$ Pfd., und daher wiegt die ganze Quantität Käse nach 1 Jahre nur noch 42 500 Pfd.

4. Ein Besitzer eines Salzwerkes kauft von seinem Nachbar eine Salzquelle für 3500 Thlr. Die Soole hält 12 Pfd. Salz, d. h. in 100 Pfd. Salzwasser sind 12 Pfd. Salz enthalten. In breiten, flachen offenen Rinnen leitet er die Soole aus der Quelle nach seinem Salzwerke. In den Monaten Mai, Juni, Juli, August kann er bei heitern Tagen die Verdunstung

Digitized by Google

des Wassers im Durchschnitt 15 %, in den Monaten April und September nur 10 %, im März und Oktober nur 5 %, und in den übrigen im Durchschnitt nur 1 % rechnen.

a) Eine Million Pfunde dieser Soole ist nach einem Jahre wie schwer? Während des Jan. 1 %, 100 : 99 = 1000000 : 99000 ℔

» » Febr. 1 », 100 : 99 = 990000 : 99 . 9900

» » März 5 », 100 : 95 = 99.9900 : 99 . 99 . 95

» » Aprils 10 », 100 : 90 = 99.99.95 : 837985,5

» » Mai 15 », 100 : 85 = 837985,5 : 712287,675 = M

» » Juni 15 », 100 : 85 = M : 605434,52575 = J

» » Juli 15 », 100 : 85 = J : 514619,3451875 = K

» » August 15 », 100 : 85 = K : 437426,44343 = A

» » Sptr. 10 », 100 : 90 = A : 393683,7991 = S

» » Oktb. 5 », 100 : 95 = S : 373999,61 = O

» » Nov. 1 », 100 : 99 = O : 370259,514 = N

» » Dezbr. 1 », 100 : 99 = N : 366557,01786 = D

Nach einem Jahre wiegt nach obigen Bedingungen 1 Million Pfund Soole 366 557 ℔. Da nur Wasser verdunstet und das Salz zurückbleibt, so könnte er auf diese Weise, wenn er die Soole gegen den Zufluß des Wassers durch den Regen und Schnee schützen könnte, Salz frei von Wasser erhalten.

b) Wie viele Procente Wasser verdunsten jährlich und in wie vielen Jahren würde sich die Soole auf die angegebene Weise in Salz verwandeln?

Die Soole enthielt gleich Anfangs 12 % Salz; diese betragen von 1 Mill. Pfunde 100 : 12 = 1 000 000 : 120 000 Salz. Also haben jene obigen 366 557 ℔ Soole noch 120 000 ℔ Salz, und es sind also in einem Jahre 633 443 ℔ Wasser verdunstet; dieses giebt

1 000 000 : 633 443 = 100 : 63,3443.

63,3443 Procent; dafür setze man 63 %. Nun muß man wie vorher die Rechnung so weit fortsetzen, bis man auf den Rückstand von 120 000 ℔ Salz kommt. 100 : 37 = 366 557 ℔ : 135 626,1 ℔ = A.

100 : 37 = A : 50 181,657 ℔.

Hieraus geht hervor, daß nicht 3 Jahre erforderlich sind, um die Soole durch Verdunstung in Salz zu verwandeln.

c) Angenommen, daß die Soole durch Verdunstung innerhalb 8 Jahre sich in Salz verwandele und daß er dieses Salz den Centner zu 20 Sgr. verkaufen könne; wie viele Centner Soole muß die Quelle jährlich liefern, wenn sie die Interessen des Kapitals, das für die Quelle gezahlt wurde, tragen soll?

Da das Salz erst nach 3 Jahren verkäuflich ist, und das Kapital 3500 ℳ beträgt, so trägt es in 3 Jahren zu 5 % 35 . 15 = 725 ℳ;

Digitized by Google

diese sind $\frac{725}{\frac{2}{3}} = 1087\frac{1}{2}$ Centner Salz; da dieses nun $12\frac{0}{0}$ der Soole beträgt, so ist $12 : 100 = 1087\frac{1}{2} : 9062\frac{1}{2}$ Centner, die Soole $9062\frac{1}{2}$ Ctr. in 3 Jahren; daher muß die Quelle jährlich $3020\frac{5}{6}$ Ctr. Soole liefern.

Drittes Kapitel.

Berechnung solcher Größen, welche durch vier ungleichartige Größen bedingt werden.

Die vier ungleichartigen Größen sind bekanntlich Raumgrößen, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit. Hier eröffnet sich nun ein weites Feld zu den mannigfaltigsten Aufgaben; nur wenige werde ich aber anführen, weil ich bereits im Vorhergehenden das vorgesteckte Ziel überschritten habe.

I. Längen, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit.

Ein Schiffskapitain nimmt 8 Mann, welche ein Schiff von 80 Lasten $\frac{3}{4}$ Meilen weit aus der See einen Fluß hinauf bis zur Seestadt für 12 ℳ ziehen; sie legen diesen Weg in 3 Stunden zurück. Unter ähnlichen Umständen muß ein anderer Schiffskapitain sein Schiff von 90 Last eine Meile weit aus der See bis zur Handelsstadt an Leinen von Männern ziehen lassen. Es melden sich zu dieser Arbeit 12 Mann, welche den ganzen Weg in $2\frac{1}{2}$ Stunden machen?

a) Wie viel wird er diesen anArbeitslohn zahlen?

$$\left.\begin{array}{l} 80 \text{ Last} : 90 \text{ Last} \\ \frac{3}{4} \text{ Ml.} : 1 \text{ Ml.} \\ 2\frac{1}{2} \text{ St.} : 3 \text{ St.} \end{array}\right\} = 12 \text{ ℳ} : \text{ ℳ} = 21\frac{3}{5} \text{ ℳ}.$$

b) Da das zweite Schiff eine Meile weit in $2\frac{1}{2}$ Stunden gezogen wurde, so wird das erste mit derselben Geschwindigkeit in welcher Zeit seinen Weg zurücklegen?

$1 \text{ Ml.} : \frac{3}{4} \text{ Ml.} = 2\frac{1}{2} \text{ St.} : \text{St.} = 1\frac{7}{8}$ Stunden.

c) Unter den obigen Bedingungen für das erste Schiff wird man wie viele Mann gebrauchen, um das Schiff in $1\frac{7}{8}$ Stunden die $\frac{3}{4}$ Meilen weit zu schleppen? Und wie viel werden dieselben erhalten?

$\frac{3}{4}$ Meilen kann man mit geringer Last ohne Anstrengung in einer Stunde, also um so mehr in $1\frac{7}{8}$ Stunden gehen, und daher fragt die Aufgabe nach keiner Unmöglichkeit. Dieselbe Aufgabe kann man auch so stellen: 8 Mann haben in 3 Stunden Etwas geleistet, so werden wie viele Mann in $1\frac{7}{8}$ St. dasselbe leisten?

Digitized by Google

Ein Mann brachte also in 1 Stunde $\frac{1}{24}$ des Ganzen zu Stande, so wird 1 Mann in $1\frac{7}{8}$ Stunden $\frac{1\frac{7}{8}}{24}$ des Ganzen $= \frac{5}{64}$ desselben machen; daher sind zur Ausführung des Ganzen $12\frac{4}{5}$ Mann erforderlich. Dieselbe Zahl Mann erhält man durch folgende Porportion:

$1\frac{7}{8}$ St. : 3 St. $= 8$ M. : M $= 12\frac{4}{5}$ Mann.

d) Wie viel zog 1 Mann vom ersten Schiffe $\frac{1}{4}$ Meile weit und in welcher Zeit nach der ersten und der Bedingung unter c)?

10 Last zog 1 Mann $\frac{1}{4}$ Meile in 1 Stunde nach der ersten Bedingung,

$6\frac{1}{4}$ » » 1 » » » » $\frac{5}{8}$ » » » Beding. unter c.

Also $2\frac{1}{2}$ Last zog 1 Mann in $\frac{1}{4}$ Stunde nach der ersten und

$2\frac{1}{2}$ » » 1 » » $\frac{1}{4}$ » » » Beding. unter c.

e) Diese Aufgabe kann nicht anders als in der Art berechnet werden, was früher über die Größe oder Quantität der Bewegung gesagt wurde. Die Größe der Bewegung ist aber das Produkt aus der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit; die Masse desselben wird durch sein Gewicht bestimmt; seine Geschwindigkeit ist der Weg, den er in der Zeiteinheit zurücklegt. Diese Begriffe auf unsere Aufgabe angewandt, so setzen wir die Masse des ersten Schiffes $= 80$ Lasten $= 80$; die Masse des andern $= 90$ Lasten $= 90$.

Die Zeiteinheit ist 1 Stunde, und die Wege in dieser Zeit oder die Geschwindigkeiten sind $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$ Meile für das erste, und $\frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ Mi. für das zweite Schiff; daher $80 . \frac{1}{4} : 90 . \frac{2}{5} = 12$ ℳ : ℳ $= 21\frac{3}{5}$ ℳ.

Anmerk. Setzt man in vorstehende Aufgabe für eine der Angaben, welche man als unbekannt wegläßt, den berechneten Lohn für das Ziehen des Schiffes, so muß man durch Rechnung das ausgelassene Datum erhalten. Immer muß man aber bei dieser Art von Aufgaben den Satz: die Größen der Bewegung sind den Arbeiten, also auch den Verdiensten durch dieselben proportional in Anwendung zu bringen. Lassen wir z. B. die Zeit in den Angaben für das zweite Schiff weg, und setzen dafür den Lohn $21\frac{3}{5}$ ℳ, so erhalten wir

12 ℳ : $21\frac{3}{5}$ ℳ $= 80 . \frac{1}{4} :$ Größe der Bewegung $= 36$;

es ist also 36 das Produkt aus der Masse (90 Last) und der Geschwindigkeit, daher ist diese $\frac{36}{90} = \frac{2}{5}$, und da die Geschwindigkeit $=$ dem Wege dividirt durch die Zeit ist, der Weg 1 Meile : Zeit $= \frac{2}{5}$, also ist die Zeit $\frac{1}{\frac{2}{5}} = 2\frac{1}{2}$ Stunden.

II. Flächen, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit.

1. In 4 Wochen haben 12 Pferde eine Wiese von 480 Quadr.-Ruth. so abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches anfangs darauf stand, als auch dasjenige, welches in gedachter Zeit nachwuchs, verzehrt haben. Unter ähnlichen Umständen haben 18 Pferde in 6 Wochen eine Wiese von 792 Quadr.-Ruth. auf dieselbe Art abgeweidet. In welcher Zeit werden 21 Pferde unter sonst gleichen Umständen eine Wiese von 990 Q.R. abfressen?

Digitized by Google

Zunächst muß man den wöchentlichen Nachwuchs berechnen. Das gesammte Futter für eine gewisse Zeit ist das Produkt aus der Zahl der Pferde und der Zahl der Wochen und der Masse, welches ein Pferd in einer Woche verzehrt hat; also steht das Futter im zusammengesetzten Verhältnisse aus den geraden der Pferde und den geraden der Zeiten.

Nennt man die Masse Gras, welches anfangs auf einer □R. stand, 1 Centner (oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ꝛc. Centner), und den wöchentlichen Nachwuchs auf einer □R. W, so ist der Gesammtnachwuchs auf der ersten Wiese 480 × W . 4, auf der zweiten 792 . W . 6; daher

$$4.12 : 6.18 = 480 + 480.4.W : 792 + 792.6.W, \text{ oder}$$
$$4 : 9 = 20 + 20.4.W : 33 + 33.6.W, \text{ oder}$$
$$1 : 3 = 5 + 20.W : 11 + 11.6.W.$$

Da in jeder Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich dem der innern ist, so folgt $11 + 66W = 15 + 60W$, daher $W = \frac{2}{3}$ Ctr.

Der wöchentliche Nachwuchs auf einer □Ruthe beträgt also $\frac{2}{3}$ von dem Grase, welches anfangs auf dieser Fläche stand.

Daher haben 12 Pferde in 4 Wochen $480 + 480 . 4 . \frac{2}{3} = 480 \times \frac{1}{3}\frac{1}{0}$ (Centner, Pfunde ꝛc.) verzehrt, und hieraus folgt, daß 1 Pferd in 1 Woche $\frac{1}{3}\frac{1}{0}$ frißt.

Nun wollen wir die Zeit suchen, in welcher 21 Pferde 990 □R. abweiden.

Als die Pferde auf die Weide geführt werden, haben sie noch Nichts von dem Grase verzehrt; in jeder Woche fressen sie aber $21 . \frac{1}{3}\frac{1}{0} = 770$; in jeder Woche bekommt die Weide nur einen Nachtrag von $\frac{2}{3} . 990 = 660$, und da die Pferde alles Gras in der gesuchten Zeit verzehrt haben sollen, so kann man sich zur Lösung dieser Aufgabe folgende Frage vorlegen: wie oft hat man zu Nichts 770, ebenso oft man zu 990 die Zahl 660 setzt, bis beide Summen einander gleich werden? An Nichts fehlt bis 990 diese Zahl selbst, also muß durch das Mehr, welches zu Nichts hinzukommt, das Fehlende ersetzt werden. Da nun zu Nichts mit jedem Zusatze 110 mehr als zu 990 hinzukommt, so muß das Hinzusetzen $\frac{9}{1}\frac{0}{1}\frac{0}{0} = 9$mal geschehen. Wenden wir diese Schlußweise auf unsere Aufgabe an. Zu Anfange ist das von den Pferden verzehrte Futter Nichts, auf der Weide stehen aber bereits 990 Ctr. Nun frißt jedes Pferd $\frac{1}{3}\frac{1}{0}$, also fressen 21 Pferde in jeder Woche 770 Ctr.; die Weide erhält aber nur einen Nachwuchs von 660 Ctr., also werden sie für so viele Wochen mit Futter versehen sein, wie oft 770—660 in 990 enthalten sind, und daher können die 21 Pferde 9 Wochen unter obigen Voraussetzungen auf einer Wiese von 990 □R. weiden.

2. In 5 Wochen haben 24 Ochsen eine Weide von 720 □Ruthen so abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches zu Anfange darauf stand, als auch jenes, welches in gedachter Zeit nachwuchs, verzehrt haben. Unter

Digitized by Google

denselben Umständen haben 22 Ochsen in 6 Wochen 684 □R. abgeweidet. Nach diesen Angaben ist welche Wiese erforderlich, um 30 Ochsen 7 Wochen lang zu unterhalten?

Das Verhältniß des wöchentlichen Nachwuchses zu finden, rechnet man wie vorher; also

$$24.5 : 22.6 = 720 + 720.5.W : 684 + 684.6.W$$

oder $24.5 : 22.6 = 720.(1+5W) : 684.(1+6W)$;

folglich $W = \frac{3}{4}$. Daher fressen 24 Ochsen in 5 Wochen $720.(1+\frac{1}{4}\frac{5}{4}) = 19.180$, also 1 Ochse in einer Woche $19.\frac{3}{2}$. Demzufolge verzehren 30 Ochsen in 7 Wochen $19.\frac{3}{2}.30.7 = 19.3.15.7$.

Da der wöchentliche Nachwuchs $\frac{3}{4}$ beträgt, so ist er in 7 Wochen $\frac{21}{4}$ des anfänglichen Bestandes, also das Futter für die ganze Zeit $1+\frac{21}{4} = \frac{25}{4}$; daher ist der anfängliche Bestand $= \frac{4}{25}.19.3.15.7 = 957\frac{3}{5}$ □R.

3. Eine Heerde von 500 Schafen hat in 8 Wochen ein Feld von 4896 □Ruthen abgefressen; eine andere Heerde von 600 Schafen hat ein Feld von $6220\frac{4}{5}$ □Ruthen in 9 Wochen abgezehrt. Wie stark wird die Heerde sein, welche in 10 Wochen ein Feld von 8704 □R. abweidet?

Der wöchentliche Nachwuchs wird, wie schon bemerkt, gefunden:

$$5.8 : 6.9 = 4896.(1+8W) : \tfrac{31104}{5}.(1+9W);$$

daraus folgt $W = \frac{1}{8}$.

Daher haben 500 Schafe in 8 Wochen $4896.(1+\frac{8}{8}) = 4896.2$, daher 1 Schaf in einer Woche $\frac{4896}{2000}$ verzehrt.

Um die Zahl der Schafe zu finden, schließen wir ferner so: das Feld von 8704 □Ruthen liefert in 10 Wochen $8704.(1+\frac{10}{8} = 8704.\frac{9}{4}$ an Futter. In 10 Wochen verzehrt 1 Schaf $10.\frac{4896}{2000} = \frac{2448}{100}$; also können mit dem gedachten Futter $8704.\frac{9}{4} : \frac{2448}{100} = \frac{8704.9.100}{4.2448} = 800$ Schafen reichen.

Anmerk. Wer ähnliche Aufgaben zu machen wünscht, der kann sie in folgender Art anfertigen. Z. B. man nehme eine beliebige Zahl Verzehrer, etwa 18 Rinder, eine beliebige Zeit, 6 Wochen, und der wöchentliche Nachwuchs sei $\frac{3}{5}$; damit ich nun eine ganze Zahl Quadrat-Ruthen erhalte, wähle ich eine Zahl, welche durch 18 theilbar ist, etwa 540 □R., also ist das ganze Futter $540.(1+\frac{1}{5}\frac{8}{0}) = 108.23$. Nun nehme ich etwa 27 Rinder, und 8 Wochen, so ist das gesammte Futter $F = Q.(1+\frac{2}{5}\frac{4}{0}) = Q.\frac{29}{25}$, es muß aber zugleich $27.8.\frac{108.23}{18.6} = 27.8.23$ sein; daher finde ich $Q = 27.8.23.\frac{5}{29}$ Quadratruthen. Will ich aber ganze Zahlen haben, so stelle ich die Berechnung so an:

18 Rinder, 6 Wochen, Weide, Nachwuchs $(\frac{3}{5})$, $\frac{18}{5}$, Futter $\frac{23}{5}$
27 " 8 " " " $(\frac{3}{5})$, $\frac{24}{5}$, " $\frac{29}{5}$
28 " 5 " " " $(\frac{3}{5})$, 3, " 4.

Daraus schließe ich, daß die Zahl der Quadrat-Ruthen der Weide durch 23, 29, 5 und 4 theilbar sein müsse, und setze daher die erste Weide $= 23.29.20$, die zweite $= 23.29.\frac{20}{25}.\frac{4}{5} = 2300$, die dritte $= 23.29.20.\frac{1}{4} = 23.29.5$ ꝛc.

Digitized by Google

III. Körper, Gewichte (Kräfte), Geld und Zeit.

1. Biot bemerkt in seiner Experimental-Physik über die mechanische Theilbarkeit der Körper Folgendes: »Bei der Fabrikation der vergoldeten Fäden, welche zu Stickereien gebraucht werden, bildet man zuerst einen 360 Unzen schweren Cylinder aus Silber, und vergoldet ihn mit darüber gelegtem Plattgolde, dessen Totalgewicht höchstens 6 Unzen beträgt. Diese 366 Unzen Materie werden dann durch Löcher, deren Durchmesser immer mehr abnimmt, gezogen, bis sie einen übergoldeten Faden von solchen Dimensionen darstellen, daß 202 Fuß Länge desselben $\frac{1}{16}$ Unze wiegen.« Welches ist die ganze Länge des Fadens in Fuß und Toisen zu 6 Fuß, und auf gewöhnliche Lieues von 2000 Toisen reducirt?

$\frac{1}{16}$ Unze : 366 Unzen = 202 Fuß : F = 1 182 912 Fuß.
6 F. : 1 Toise = 1 182 912 : T = 197 152 Toisen.
2000 T. : 1 Lieue = 197 152 : L = 98,576 Lieus.

Biot bemerkt weiter: »Also dessen Totallänge 98,576 gewöhnliche Lieues oder 59,146 geographische Meilen ausmacht.« Eine geographische Meile enthält wie viele Lieues?

59,146 geogr. Ml. : 1 geogr. Ml. = 98,576 Lieues = L; also 1 geogr. Meile = 1,6666 . . . oder $1\frac{2}{3}$ Lieues.

Biot: »Dann geht dieser Faden zwischen Walzen hindurch, die ihn abplatten und durch ihren Druck noch um $\frac{1}{7}$ verlängern, so daß die Länge des so erhaltenen vergoldeten Streifens wie lang in Fuß, Lieues und geographischen Meilen ist?

Nimmt der Faden an seiner Länge um $\frac{1}{7}$ zu, so wird er $\frac{8}{7}$mal so lang, als er war, daher ist seine Länge
$\frac{8}{7}$. 1 182 912 Fuß = 1 351 899,43 Fuß, dafür Biot 1 351 900 F. setzt.
$\frac{8}{7}$. 197 152 Toisen = 225 316,57 Toisen.
$\frac{8}{7}$. 98,576 Lieues = 112,658 Lieues, Biot 112,66 Lieues.
$\frac{8}{7}$. 59,146 geogr. Meilen = 67,5954 geogr. Meilen, Biot 67,60 geogr. Meilen, d. i. mehr als die Entfernung von Paris bis Lyon; der Streifen hält dann $\frac{1}{8}$ Linie in der Breite, und nimmt man mit Reaumur an, daß ein Kubikfuß Gold = 21 220 Unzen, und 1 Kubikfuß Silber = 11 532 Unz. wiegt, so findet man, daß seine Dicke wie viele Linien beträgt?

Der Faden ist ein Prisma, dessen Länge = 1 351 900 Fuß, und seine Breite = $\frac{1}{8}$ Linie = $\frac{1}{8.144}$ Fuß. Seinen kubischen Inhalt kann man nach obigen Angaben leicht aus seinem Gewichte finden.

Da 1 Kubikfuß Silber = 11 532 Unzen, so faßt 1 Unze Silber $\frac{1}{11532}$ Kubikfuß, also 360 Unzen Silber = $\frac{360}{11532} = \frac{30}{961}$ Kubikfuß.

21 220 Unzen Gold = 1 Kubikfuß, also 1 Unze Gold = $\frac{1}{21220}$ Kubikfuß; daher 6 Unzen Gold = $\frac{6}{21220}$ Kubikfuß. Daher der kubische

Digitized by Google

Inhalt des Fadens $= \frac{30}{661} + \frac{3}{10610} = \frac{3211183}{10166410}$ Kubikfuß; dieser Inhalt durch das Produkt aus der Länge 1 351 900 und der Breite $8\frac{1}{144}$ Fuß dividirt, giebt die Dicke $= \frac{3211183}{10166410} : \frac{1351900}{1152} = \frac{462560352}{1723032037315}$ Fuß $= \frac{6660050688}{1723032037315}$ Linien $= 0{,}003865$ Linien nach altfranzösischem Maße.

Biot findet die Dicke des Fadens $= \frac{1}{259}$ Linien, oder genauer $= \frac{2}{517}$ Linien; und wenn man den letzten Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, so findet man $\frac{2}{517} = 0{,}003868$ Linien. Diese Dicke ist etwas größer als obige, und das hat darin seinen Grund, daß Biot den dritten Näherungswerth des Kettenbruches genommen hat, welcher stets etwas größer als der wahre Werth ist.

Für die Dicke des Goldes findet Biot $\frac{1}{5172}$ Linien, welche man ebenso wie die des Fadens finden kann. Denn man berechne die Dicke des silbernen Fadens und nehme diese von der vergoldeten hinweg, so hat man die doppelte Dicke des Goldes, und daraus findet man die Dicke des Goldes.

Wenn nun die Mark fein Gold 214 ℳ kostet, wie theuer ist der ganze vergoldete Faden, ohne Arbeitslohn?

Eine Unze $= 2$ Loth $= \frac{1}{8}$ Mark; daher 360 Unzen Silber $= \frac{360}{8}$ Mark f. S., und weil 1 Mark f. S. $= 14$ ℳ, so sind $\frac{360}{8}$ Mk. f. S. $= \frac{360}{8} . 14 = 630$ ℳ.

6 Unzen fein Gold $= \frac{3}{8}$ Mark f. G. $= \frac{3}{8} . 214$ ℳ $= 80\frac{1}{4}$ ℳ; daher ist der Werth des ganzen Fadens ohne Arbeitslohn $= 710\frac{1}{4}$ ℳ.

2. Am 4. Juli 1843 stand im Intelligenzblatte für den Bezirk der Königl. Regierung zu Danzig folgende Bekanntmachung, aus welcher hier aber nur das zum Verständnisse der Rechnung Nöthige herausgehoben wird. »Das Neuhäuser Steinkohlenflötz ist im Meiningischen erst vor 5 Jahren erbohrt worden, und es weist sich als eins der mächtigsten in Deutschland aus. In dem Grubenfelde, welches zunächst an das meinige grenzt und unmittelbar an dieses stößt, steigt eine Mächtigkeit von 7 bis 40 Fuß und darüber, und in meinem Felde tritt es über 13 Fuß stark in bauwürdiger Teufe auf. Da das Feld einen Flächenraum von 160 000 Freiberger Quadratlachter (zu 49 Leipziger Quadratfuß) oder etwa 8 Millionen Quadratfuß hat, so ist, schlägt man die Durchschnittsmächtigkeit des Kohlenflötzes nur zu 10 Fuß an, der geschätzte Steinkohlenvorrath in demselben über 80 Millionen Centner. Mein Grubenfeld bezahlt von seiner Produktion nur den halben Zehnten und ist von allen sonstigen Abgaben frei.«

»Ich habe mich entschlossen, das Eigenthum meines Neuhäuser Kohlenfeldes zur Hälfte und zum gemeinschaftlichen Abbau einer Aktiengesellschaft für 240 000 Thlr. Preuß. Courant erb- und eigenthümlich, wie ich es

Digitized by Google

selbst besitze, abzutreten, wobei ich folgende, mit etwa 180 000 Gulden neuem Kapitalaufwand verknüpfte Verpflichtungen übernehme:

1) Die Verzinsung des Aktienkapitals aus eigenen Mitteln für so lange, bis der Grubenbau zur rentabeln Kohlenförderung gelangt ist;

2) in dem Vereinskohlenfelde den bereits im schwunghaften ununterbrochenen Betrieb begriffenen Hauptförderschacht binnen 3 Jahren durch das über 13 Fuß mächtige Steinkohlenflötz niederzubringen, und sodann diesen Schacht noch weiter und volle 100 Lachter von Tage nieder abzuteufen, so daß mittelst desselben zu gleicher Zeit zwei Feldsektionen von zusammen 800 000 Quadratfuß Flächenraum mit einem geschätzten Kohleninhalte von 8 Millionen Centnern abgebaut werden können;

3) Maschinenhaus, Zechenhaus, Schmiede- und Schlosser-Werkstätten, Koaksöfen, Magazine, Bureau-Lokale und Wohnungen für die Beamten, ferner Stallungen, Wagenschuppen, Ladeplätze und Fahrwege dauerhaft zu erbauen und herzustellen;

4) zwei Dampfmaschinen zur Kohlenförderung und Wasserhaltung, ferner Pumpwerke, Ventilations- und Förderungsapparate einzuhauen, Eisenbahnen in den Gruben, nach den Magazinen und Ladeplätzen zu konstruiren, und die Vorrichtungsbaue in der ersten Abbausektion so herzustellen, daß alle 24 Stunden 1200 Centner Kohlen gehauen und gefördert werden können;

5) das nöthige Grundeigenthum für Bauplätze, Zechenhöfe, Ladeplätze, Communications- und Abfuhrwege zu erwerben; und endlich

6) jährlich 150 000 Centner Kohlen von den gesellschaftlichen Werken zum Accordpreise von 24 Kreuzern per Centner für den Verbrauch in meinen zu errichtenden Eisenhüttenwerken auf eine Reihe von Jahren zu kaufen.

Planmäßig wird das Feld binnen 160 Jahren in 8 Sektionen abgebaut, und es sollen jährlich in den Vereinswerken 400 000 bis 420 000 Centner Kohlen gehauen und gefördert werden, so daß nach Abzug jener 150 000 Centner, welche ich zum Verbrauche in meinen Hüttenwerken von den Vereinsgruben jährlich kaufe, etwa 250 000 Centner für den weitern Absatz disponibel bleiben.

Digitized by Google

Rente-Berechnung

für den Betrieb der Vereins-Kohlenwerke bei Neuhaus auf eine Jahres-Produktion von 400 000 Centnern.

400 000 Centner Steinkohlen zum durchschnittlichen Verkaufspreise von 24 Kr. Rhein. pr. Cntr.		Rhein. Fl. 160000
Kosten:		
150 Häuer zur Gewinnung von 400000 Ctr. Kohlen, à 200 Fl. durchschnittlichen Jahrlohn	Fl. 30000	
30 Häuer, Zimmerlinge, Knechte und Grubenjungen zu den Vorrichtungsbauen und Nebenarbeiten, à 150 Fl. Jahrlohn	„ 4500	
Steiger-, Schmiede- und Maschinenwärter-Lohne, Ingenieur- u. Faktorgehalte, Regie- u. Bureaukosten, Generalia	„ 5000	
Unterhalt und Reparatur der Maschinen, der Gebäude und Wege	„ 3000	
Halber Zehnt auf 160000 Fl. Verkaufswerth .	„ 8000	
Für unvorhergesehene u. außerordentliche Ausgaben	„ 3000	
Caducitäten	„ 1500	
		„ 55000
		Fl. 105000
Ab: Zur Fundirung einer Waisen-, Wittwen- und Waisenanstalt für die Grubenarbeiter . . .	Fl. 2000	
Zur Ansammlung eines Fonds für künftige Schachthaue in der 3. bis 8. Sektion des Vereinsfeldes	„ 2000	
		„ 4000
		Fl. 101000
Halber Antheil der Aktionäre		Fl. 50500
Ab: Zins zu 5 Procent vom Aktienkapital		„ 21000
		Fl. 29500
Tilgungsrate zur allmähligen Rückzahlung des Aktienkapitals		„ 3500
Bleiben also zur Dividendvertheilung . . .		Fl. 26000

was auf jede Aktie von 200 Thlr. Preuß. Cour. 12 Thlr. oder 6 Procent exclusive 5 Procent jährlichen Zins ausmacht.

Digitized by Google

Hierauf folgt der Aktienplan, der nur diese zur Rechnung nöthige Angabe enthält: »Zur allmähligen Zurückbezahlung des Aktien-Kapitals 2000 Thaler Preuß. Courant. Mit letztern werden jährlich 5 Aktien durch das Loos in doppeltem Betrage des ursprünglichen Kapitals, also jede Aktie mit 400 Thaler Preuß. Courant zurückbezahlt. Es leuchtet ein, daß durch diese allmählige Amortisation der Aktien sich die Dividende für die übrigbleibenden mit jedem Jahre steigern, und in eben dem Maße der Kapitalwerth der Aktien auch erhöhen müsse.«

Nach Nelkenbrecher ist die Sächsische Bergwerkslachter $= 3\frac{1}{2}$ Leipziger Ellen; 1 Leipziger Elle $= 250{,}_{6}$ Pariser Linien; 1 Preuß. Fuß $= 139{,}_{13}$ Pariser Linien. 1 Centner $= 110$ Pfund Handelsgewicht und 114 Pfund Berggewicht; 1 Leipziger Pfund $= 467{,}_{167}$ Grammen nach Chelius. 1 Centner der Zollvereinsstaaten $= 50$ Kilogrammen; 1 Preuß. Centner $= 110$ Preuß. Pfd.; 1 Preuß. Pfd. $= 467{,}_{711}$ Grammen. Das specifische Gewicht der Steinkohlen $= 1{,}_{232}$ bis $1{,}_{510}$. 1 Preuß. Kubikfuß destillirten Wassers $= 66$ Preuß. Pfd.

1) Das Grubenfeld enthält wie viele Leipziger Quadratfuß?
$160\,000 \cdot 49 = 7\,840\,000$ Leipziger □Fuß.

2) Das Grubenfeld enthält wie viele Preuß. Quadratfuß?
Da 1 Leipz. Elle $= 2$ Fuß $= 250{,}_{6}$ Par. Lin., und 1 Pr. Fuß $= 139{,}_{13}$ Par. Lin., so ist 1 Leipz. Fuß $= \frac{125{,}_{3}}{139{,}_{13}} = \frac{125\,30}{139\,13}$ Preuß. Fuß; also 1 Leipz. □Fuß $= \frac{125\,30}{139\,13} \cdot \frac{125\,30}{139\,13}$ Preuß. Quadratfuß; daher ist das Grubenfeld $= 7\,840\,000 \times \frac{125\,30 \cdot 125\,30}{139\,13 \cdot 139\,13} = 6\,358\,821{,}_{5}$ Preuß. □Fuß.

3) Nimmt man die Durchschnittsmächtigkeit des Grubenfeldes zu 10 Fuß an, so beträgt das Steinkohlenflötz wie viele Preuß. Kubikfuß?
10 Leipz. Fuß $= \frac{125\,300}{139\,13} = 9{,}_{00586}$ Preuß. Fuß, dafür man der Kürze wegen 9 Preuß. Fuß setze, so ist das Steinkohlenflötz $= 6\,358\,821{,}_{5} \cdot 9 = 57\,229\,393{,}_{5}$ Preuß. Kubikfuß.

4) Ein Preuß. Kubikfuß Steinkohlen hat welches Gewicht in Preuß. und Leipz. Pfunden ausgedrückt?
Für das spec. Gewicht der Steinkohlen $= 1{,}_{232}$ ist 1 Preuß. Kubikfuß Steinkohlen $= 66 \cdot 1{,}_{232} = 81{,}_{312}$ Preuß. Pfd. $= 81{,}_{312} \cdot \frac{467{,}_{167}}{467{,}_{711}} = 81{,}_{217}$ Leipz. Pfund.

5) Die in 3. angezeigten Steinkohlen haben welches Gewicht in Preuß. Centnern, in Leipz. Centnern Handelsgewicht, in Centnern Berggewicht und in Centnern der Zollvereinsstaaten?
Das Steinkohlenflötz $= 57229393{,}_{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1{,}_{232} = 42303967{,}_{6752}$ Preuß. Ctr. für das spec. Gewicht der Steinkohlen $= 1{,}_{232}$,

Digitized by Google

und $= 57\,229\,393,_{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,_{21} = 51\,849\,830,_{111}$ Preuß. Ctr. für das spec. Gewicht der Steinkohlen $= 1,_{21}$.

Nach obigen Angaben findet man einen Leipz. Centner Handelsgewicht $= 0,_{9966}$ Preuß. Centnern; daher hat das Steinkohlenflötz $= 42\,253\,202,_{914}$ bis $51\,787\,610,_{7144}$ Leipz. Ctr. Handelsgewicht.

Das Steinkohlenflötz enthält $40\,865\,632,_{774}$ bis $50\,086\,936,_{263}$ Leipziger Centner Berggewicht.

Das Steinkohlenflötz enthält $54\,555\,196,_{714}$ bis $66\,865\,541,_{413}$ Centner der Zollvereinsstaaten.

6) Wenn das Grubenfeld in 160 Jahren bearbeitet werden soll, wie viele Centner nach den Resultaten in voriger Numer können jährlich zu Tage gefördert werden?

Jährlich 264 399,$_{8}$ bis 324 061,$_{4}$ Preuß. Centner.
255 410,$_{2}$ bis 313 043,$_{2}$ Leipz. Ctr. Berggewicht.
340 969,$_{9}$ bis 417 909,$_{6}$ Ctr. der Zollvereinsstaaten.

7) Werden die in 5. berechneten Centner Berggewicht zu 24 Kreuzer Rheinisch für den Centner verkauft, so wird daraus welche Summe in Preuß. Courant gelöst? Wie groß ist der jährliche Ertrag? Wie viel bleibt jährlich, nach Abzug aller Kosten, für die Aktionäre?

— 40 865 632,$_{774}$ Centner
1 — 24 Kr. Rhein.
60 — 1 Fl. Rhein.
7 — 4 Thlr. Preuß. Cour.

35 | 326 925 062,$_{192}$ |
Resultat 9 340 714,$_{9}$ Thlr. Pr. Cour.

— 50 086 936,$_{263}$ Centn.
1 — 24 Kr. Rhein.
60 — 1 Fl. Rhein.
7 — 4 Thlr. Preuß. Cour.

35 | 400 695 490,$_{104}$ |
Resultat 11 448 442,$_{57}$ Thlr. Pr. Cour.

Der jährliche Ertrag ist 58 379,$_{46}$ bis 71 552,$_{76}$ Thlr. Preuß. Cour. Alle Kosten und Abzüge betragen jährlich 59 000 Fl. Rhein. oder 33714$\frac{2}{7}$ Thlr. Pr. Cour.; daher bleibt ein jährlicher Gewinn von 24 665,$_{18}$ bis 37 838,$_{46}$ Thlr. Pr. Cour., darum beträgt der halbe Antheil der Aktionäre 12 332,$_{59}$ bis 18 919,$_{24}$ Thlr. Pr. Ct.

Die Zinsen von 240 000 Thlr. zu 5 % haben den Betrag von 12 000 Thlr.; also bleiben noch 332,$_{59}$ bis 6919,$_{24}$ Thlr. Pr. Ct.

Tilgungsrate zur allmähligen Rückzahlung des Aktien-Kapitals 3500 Fl. Rhein. oder 2000 Thlr. Pr. Cour., so bleibt zur jähr-

Digitized by Google

lichen Dividenden-Vertheilung entweder eine Schuld von 1667,41 Thlr., oder im günstigsten Falle ein baarer Werth von 4919,24 Thlr. Pr. Cour.

8) Die 150 Häuer und 30 Gehilfen werden jährlich wie viele Cntr. Berggewicht zum Gebrauche liefern? Wie viel wird jeder der 150 Häuer jährlich hauen?

Da in 160 Jahren das Grubenfeld bearbeitet werden soll, so werden in einem Jahre 40 865 633 bis 50 086 936 Centner, dividirt durch 160 = 255 410 bis 313 043 Centner geliefert.

Jeder der 150 Häuer fördert jährlich 1702,7 bis 2086,95 Ctr.

9) Wie viele Centner werden täglich geliefert, wenn man das Jahr zu 365 Tagen rechnet, mit Ausschluß der 52 Sonntage und der 3 hohen Festtage?

Nach vorstehender Annahme bleiben 310 Arbeitstage, und daher können täglich 255 410 bis 313 043, dividirt durch 310 oder 823,9 bis 1009,6 Ctr. geliefert werden.

Gedruckt bei C. J. Dalkowski.

Digitized by Google

Außer diesem Werke sind bei den Verlegern erschienen:

1) Mathematische und astronomische Werke.

Argelander, F. W. A., Untersuchungen über die Bahn des großen Kometen vom Jahre 1811. 1 Thlr.

Bessel, F. W., Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab A. 1750 usque ad annum 1850. 8v. m. 6 Thlr. 20 Sgr.

— — Astronomische Untersuchungen. 2 Bde. gr. 4. 10 Thlr. 20 Sgr.

Cauchy, A. L., Lehrbuch der algebraischen Analysis, aus dem Französischen übersetzt von C. L. B. Huzler. gr. 8. 2 Thlr.

Förstemann, A., Arithmetisches Uebungsbuch zum zweckmäßigen Unterricht in der Zahlenrechnung, Buchstabenrechnung und Algebra. gr. 8. 20 Sgr.

Jacobi, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. 4to. maj. 3 Thlr.

Strehlke, F., Aufgaben über das geradelinigte Dreieck, geometrisch und analytisch gelöst. gr. 8. 20 Sgr.

2) Schulbücher.

I. Für Gymnasien und höhere Bürgerschulen.

Ellendt, Fr., (Direktor des Gymnasiums in Elsleben), Lehrbuch der Geschichte für die obern Klassen der Gymnasien. 3te vielfach verbesserte und zum Theil umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1844. 38 Bogen stark. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

— — Lateinisches Lesebuch für die untersten Klassen der Gymnasien. Neunte verbesserte Auflage. 8. 1846. 16 Bog. stark. 15 Sgr.

Ellendt, J. E. (Direktor des altstädtischen Gymnasiums in Königsberg), Materiallen zum Uebersetzen aus dem lateinischen ins deutsche, für mittlere Klassen deutscher Gymnasien. Mit besonderer Rücksicht auf griechische Geschichte und Mythologie aus römischen Klassikern gesammelt mit leitenden Anmerkungen. 8. 1842. 19 Bogen stark. 20 Sgr.

Clemens, F. A. (Oberlehrer am Gymnasium zu Tilsit), Grundriß der Naturlehre, nach ihrem gegenwärtigen Zustande für die obern Klassen höherer Lehranstalten. 2 Curse. 1839. gr. 8. 19½ Bogen stark. 1 Thlr. 7½ Sgr.

Dr. Rupp, J. (Divisionsprediger), Uebersicht der allgemeinen Geschichte für obere Klassen der Gymnasien, mit genealogischen Tabellen und einem Atlasse von 27 historischen Karten. gr. 8. 1837. 25½ Bg. Text und 27 color. Karten in Folio. 2 Thlr. 15 Sgr.

Der Text apart 1 Thlr. 10 Sgr. Der Atlas apart 1 Thlr. 5 Sgr.

Digitized by Google

Dr. Ohlert, G. H. E. (Prorektor an der höhern Burgschule), kleine Geographie für die untern und mittlern Klassen der Gymnasien und höheren Bürgerschulen ꝛc. 8. 1842. 8 Bogen stark. 10 Sgr.

— — Leitfaden für den ersten Unterricht in der Naturgeschichte. 8. 1837. 6 Bogen. 7½ Sgr.

Struve, K. L., die Quantität der Endsylben in der lateinischen Declination und Conjugation. gr. 8. 3¾ Sgr.

II. Werke für den Unterricht in höheren Töchterschulen ausschließlich bestimmt.

Nösselt, Fr. (Professor und Direktor einer höheren Töchterschule in Breslau), kleine Geographie für Töchterschulen und die Gebildeten des weiblichen Geschlechts. Sechste vermehrte und verbesserte Auflage. gr. 8. 1846. 16½ Bogen stark. 22½ Sgr.

— — Handbuch der Geographie für die Gebildeten des weiblichen Geschlechts. 3 Bde. Dritte sehr vermehrte und verbesserte Auflage. gr. 8. 1841. 90 Bogen stark. 4 Thlr. 15 Sgr.

Hassenstein, E., und **E. Leyde**, erstes Lesebuch für Töchterschulen. gr. 8. 1838. 15 Bogen stark. Ladenpreis 20 Sgr.

— — Lesebuch für Töchterschulen. 1r Theil. gr. 8. 1838. 24 Bogen stark. Ladenpreis 27½ Sgr.

Auch unter dem Titel:
Lesebuch für mittlere Klassen höherer oder für Oberklassen niederer Töchterschulen.

— — Lesebuch für Töchterschulen. 2r Theil. gr. 8. 1839. 36 Bogen stark. Ladenpreis 1 Thlr. 7½ Sgr.

Auch unter dem Titel:
Lesebuch für die oberen Klassen höherer Töchterschulen, oder Sammlung deutscher Gedichte und prosaischer Aufsätze für die Gebildeten des weiblichen Geschlechts.

III. Für Elementarschulen.

Preuß, A. E. (Direktor des Waisenhauses), Preußische Landes- und Volkskunde. 1 Thlr. 10 Sgr.

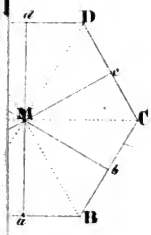
Dessen gedrängte Uebersicht der preußischen Landes- und Volkskunde. 5 Sgr.

Kawerau (Schulrath), Wandkarte von Ost- und Westpreußen. 2te Auflage in 4 gr. Folioblättern color. 1 Thlr. 10 Sgr.

Brauns (Lehrer), Wandkarte von Europa in 16 groß Folioblättern colorirt. 2 Thlr. 10 Sgr.

Digitized by Google

Fig.4.



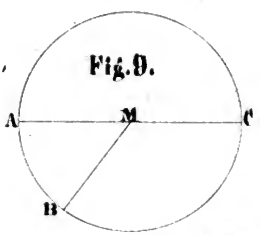


Fig.9.

Fig.13.

Fig.14.

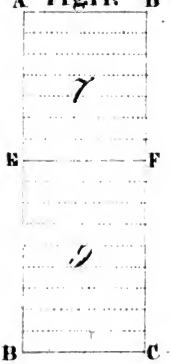
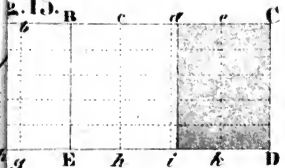


Fig.15.



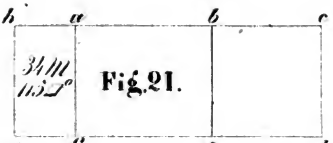


Fig.21.

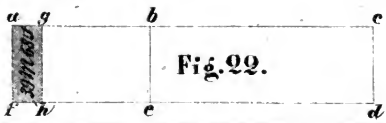
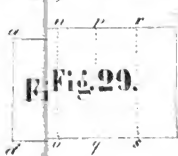


Fig.22.

UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Fig.29.



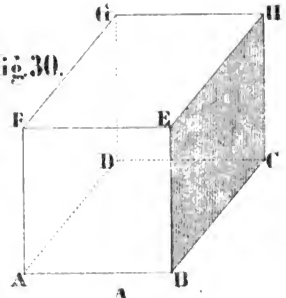


Fig.30.

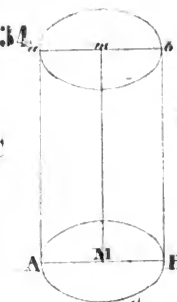


Fig.34.

Fig.35.

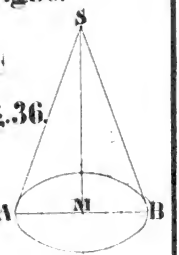


Fig.36.

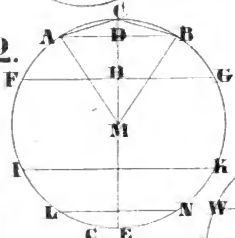


Fig.42.

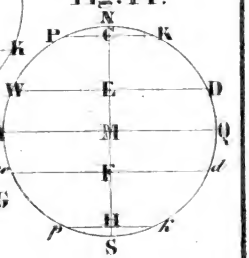


Fig.44.

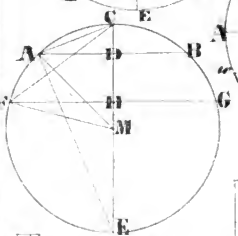


Fig.

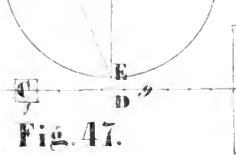
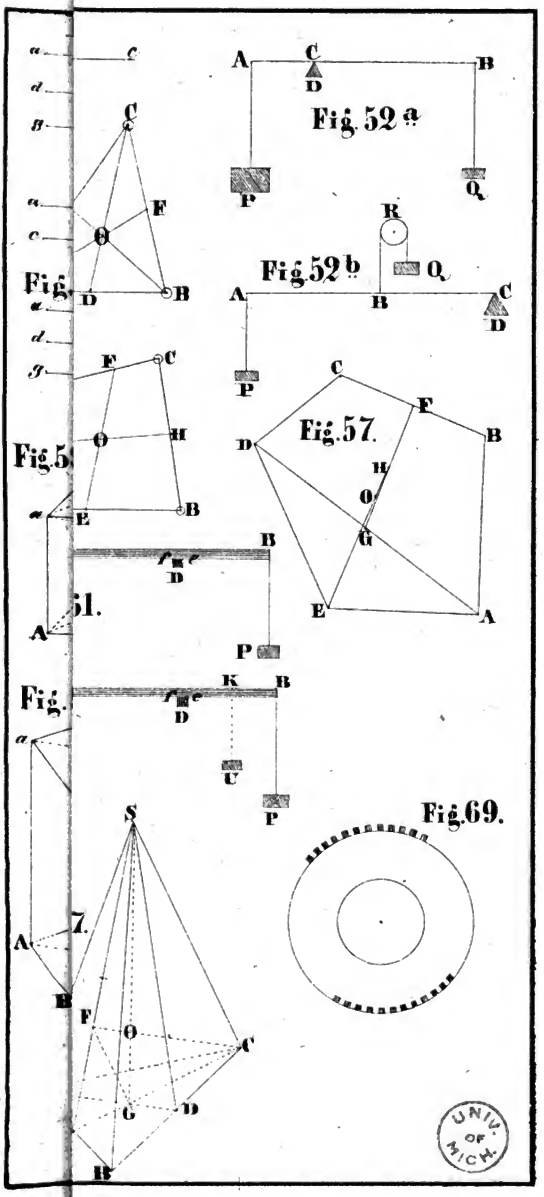


Fig.47.

UNIV OF MICH.

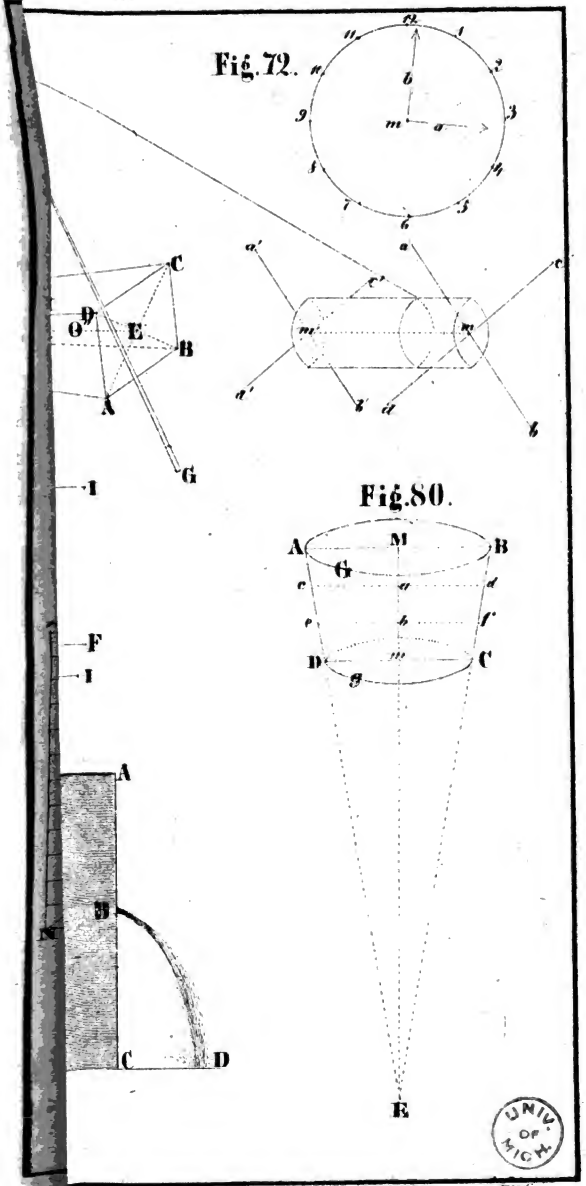
Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06708 1482

B 448381

Digitized by Google